JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Elevers strategier vid lösning av aritmetiska flertalsuppgifter

En kvalitativ studie som undersöker elevers val av strategier vid beräkning av uttryck med tre eller fler tal

KURS: *Examensarbete II för grundlärare F-3/ 4–6, 15 hp*
PROGRAM: *Grundlärarprogammet med inriktning mot arbete i grundskolans årskurs 4–6*
FÖRFATTARE: *Pontus Meijer*
EXAMINATOR: *Martin Hugo*
TERMIN: *VT2025*

JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Kurs: Examensarbete II för grundlärare F-3/ 4–6, 15 hp
Program: Grundlärarprogammet med inriktning mot arbete i grundskolans årskurs 4–6
Termin: VT2025

Sammanfattning

Pontus Meijer

Elevers strategier vid lösning av aritmetiska flertals uppgifter – En kvalitativ studie som undersöker elevers val av strategier vid beräkning av uttryck med tre eller fler tal.

Antal sidor: 32

Denna uppsats behandlar hur elever i årskurs 6 utför flertalsuppgifter som är manipulerade på sådant sätt att associativitet ska vara en enklare beräkningsstrategi. Associativitet är en av grundläggande del av aritmetik och matematik då det behandlar räknesättens egenskaper och ligger till grund för mer komplex matematik som algebra (Eaves et al., 2021)

Uppsatsen innehåller både arbetsblad och uppföljande samtal med elever för att både urskilja vilka strategier som används och låta eleverna resonera om hur och varför de valt sin strategi. 27 elever deltog i enkäten och som sedan kategoriserades i tre kategorier baserat på deras användning av associativitet: (1) elever som inte använt associativitet, (2) elever som använt associativitet i enstaka uppgifter eller använt andra räknelagar och kategori 3) elever som använt associativitet vid flera tillfällen. Tre samtal genomfördes från de tre olika kategorierna.

Studien kan konstatera att två strategier var vanligast och ingen av dem var associativitet trots uppgifternas manipulation. Resultatet ska ses som en större förståelse av elevernas val av strategier och inte som ett generellt resultat för andra årskurs 6 elever.

Sökord: Matematik, associativitet, aritmetik, flertalsuppgifter och matematiska strategier.

JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Kurs: Examensarbete II för grundlärare F-3/ 4–6, 15 hp
Program: Grundlärarprogammet med inriktning mot arbete i grundskolans årskurs 4–6
Termin: VT2025

Abstract

Pontus Meijer

Students´ Strategies for Solving Multi-Term Arithmetic Problems – A Qualitative Study of Students' Choice of Strategies in Calculating Expressions with Three or More Terms.

Number of pages: 32

This paper explores how Year 6 students solve arithmetic problems involving three or more numbers, specifically designed to promote the use of the associative property as an efficient calculation strategy. Associativity is an essential concept in arithmetic and serves as a foundation for more advanced mathematics as algebra (Eaves et al., 2021). The research combines quantitative data from a questionnaire with qualitative insights from students over conversations to identify which strategies are used, and why students choose them.

A total of 27 student participated in the questionnaire, and their answers were categorized into three groups based of their use of associativity: (1) students who did not use associativitety, (2) student who used associativity in a few cases or applied other arithmetic properties, and (3) students who used associativity in multiple occasions. Three students from each group were selected to participate in follow-up conversation, providing further insight into their reasoning on their strategy choice.

The results show that two main strategies were most frequently used- neither of which involved the associative property, despite the problems being structured to promote its use. These findings contribute to a deeper understanding of these students 'strategic thinking in arithmetic and the challenges they face in recognizing and applying mathematical properties and not as generic result for other Year 6 students.

Keywords: Mathematics, associativity, arithmetic, multi-terms problems and mathematics strategies.

Innehållsförteckning

Sammanfattning *2*
Abstract *3*
Innehållsförteckning *4*
1. Inledning *1*
2. Syfte och frågeställningar *2*
3. Bakgrund *3*
3.1 Associativa lagen och kommutativa lagen 3
3.2 Varför förståelse om associativitet är viktigt 3
3.3 Undervisning om associativitet 5
3.4 Elevers attityder till aritmetiska problem med associativitet 6
3.5 Teori 7
4. Metod *8*
4.1 Metodval 8
4.2 Urval 10
4.3 Genomförande 10
4.6 Etiska ställningstagande 12
5 Resultat *14*
5.1 Resultat från arbetsbladen 14
5.2 Resultat från uppföljande samtal 15
5.2.1 Elevers användning av strategier baserade på associativitet och kommutativitet och deras resonemang 16
5.2.2 Förbestämda strategier 19
5.2.3 Identifiering av nya strategier i samband med arbetsbladet och det uppföljande samtalet 22
6 Diskussion *25*
6.1 Statisk syn på operationer 25
6.1.2 Upptäcka associativitet 26
6.1.3 Strategivalsteori 28
6.2. Metoddiskussion 29
6.2.2 Arbetsbladet 30
6.2.3 Uppföljande samtal 31
6.3 Framtida forskning 32
Referenser *33*
Bilagor *35*
Bilaga 1 arbetsbladet deltagarna genomförde 35

Bilaga 2 Samtyckesblankett 36
Bilaga 3 Frågor till de uppföljande samtalen: 37

1. Inledning

Inom matematik och aritmetik så finns det tre grundläggande räknelagar. De tre lagarna är kommutativa lagen, distributiva lagen och associativa lagen. Denna studie kommer enbart att beröra associativitet och kommutativitet. Lagarna bestämmer inte hur du behöver genomföra aritmetiska operationer utan beskriver egenskaper hos de fyra räknesätten addition, subtraktion, multiplikation och division. Associativa lagen innebär att när det finns tre- eller flertals uppgifter som enbart innehåller addition eller multiplikation så behöver du inte utföra beräkningen i den ordningen talen presenteras i. Det går därför att utföra vilken av operationerna först utan att det påverkar resultatet vilket gör att du kan välja vilka två tal du först vill addera eller multiplicera för att göra beräkningen så enkel som möjlig.

Trots att associativitet är en grundläggande räknelag inom både addition och multiplikation finns det begränsad forskning, specifikt på hur svenska elever använder sig av associativitet. Mycket av den tidigare forskningen den här studien har tagit del av har genomförts i andra länder vilket gör att resultaten möjligen inte är direkt överförbar till svensk kontext.

Elevers strategival att gruppera tal för att göra en förenkling av uttrycken är inte vanligt enligt den tidigare forskningen studien tagit del av och det finns därför intresse i att försöka förstå elevers resonemang bakom sina val av strategier. Studien kommer därför undersöka när, hur och varför eleverna använder associativitet – eller väljer att inte göra det – samt vilka faktorer som kan påverkar elevernas val av strategi.

Enligt rådande kursplan (Skolverket, 2022, s.55 & 57) ska eleverna utveckla ” förmågan att välja och använda lämpliga matematiska metoder för att göra beräkningar och lösa rutinuppgifter” och lära sig ”Metoder för beräkningar med naturliga tal i huvudräkning och skriftlig beräkning”. Om elever ska kunna välja lämpliga metoder behöver elever kunskap om vilka egenskaper räknesätten har. Eleverna kommer annars inte aktivt kunna välja vilka strategier som är lämpliga, därför är det intressant att undersöka hur användningen för associativitet är i en autentisk situation.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka vilka strategier elever i årskurs 6 använder sig av vid uppgifter med tre- eller flertalsuppgifter där associativitet är användbart för att förenkla beräkningen.

För att kunna besvara detta syfte har följande frågeställningar framställts:

1) Vilka strategier använder sig elever av när de beräknar aritmetiska tre- eller flervalsuppgifter?
2) Vilka resonemang för eleverna för sina strategival?

3. Bakgrund

Bakgrunden i denna studie ger en kontext till studiens fokusområde. Kapitlet kommer beskriva viktiga begrepp (3.1) samt relevant forskning (3.2, 3.3, 3.4) som har fokus på associativitet.

3.1 Associativa lagen och kommutativa lagen

Associativa lagen är en grundläggande egenskap hos addition och multiplikation. Associativitet innebär att när tre eller fler tal kombineras, spelar det ingen roll hur talen grupperas utan resultatet blir detsamma. Till exempel vid addition $(a + b) + c = a + (b + c)$. Du kan alltså välja mellan att räkna den vänstra operationen $(a + b)$ först eller den högra $(b + c)$ utan att det påverkar summan (Dubé & Robinson, 2010). Konkret betyder det att $1 + 2 + 3$ kommer få summan 6 oavsett vilken ordning av operationerna som genomförs först. Samma princip gäller även för multiplikation där både den vänstra och högra operationen kan beräknas först $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ utan att produkten ändras. I multiplikation så kommer $1 \cdot 2 \cdot 3$ alltid få produkten 6 oavsett om du genomför den högra eller vänstra operationen först.

Kommutativa lagen är en räknelag som gäller för addition och multiplikation. Kommutativitet innebär i addition att $a + b = b + a$ och inom multiplikation $a \cdot b = b \cdot a$ (Kiselman & Mouwitz, 2008). Det innebär att ordningen i vilken talen i en uppgift beräknas kan varieras utan att resultatet påverkas. Denna egenskap möjliggör för elever att själva välja i vilken ordning beräkningarna ska genomföras.

Associativitet och kommutativitet användes av eleverna under arbetsbladen denna studie genomförde.

3.2 Varför förståelse om associativitet är viktigt

En förståelse för associativitet är viktig för att kunna hantera operationer som ger konsekventa resultat, vilket också hjälper elever att utveckla en mer komplett förståelse av matematiska relationer och operationer (Dubé, 2014; Robinson et al., 2006). Genom att elever vet hur räknesätten hör ihop och vilka lagar som gäller de enskilda räknesätten får eleverna en större förståelse för matematikens struktur (Dubé & Robinsson, 2010).

Associativitet är en av de grundläggande egenskaperna hos matematiska operationer, och förståelsen för denna är viktig för att kunna ta till sig mer avancerad matematik (Dubé, 2014) En stark förståelse för associativitet gör att elever kan förenkla matematiska uttryck och uppgifter genom omgruppering av tal för enklare beräkningar (Dubé & Robinsson, 2010).

Genom en förståelse för associativitet, som är en grundläggande del av aritmetiken, så underlättas övergången till algebra (Eaves, Attridge, Gilmore, 2019; Eaves et al., 2021; Robinson & Dubé, 2013). Associativitet hjälper individer att tolka algebraiska problem som ”generaliserad aritmetik[1]” vilket underlättar övergången mellan grundläggande matematik och mer avancerade matematiska koncept som algebra. Genom att använda sig av sina kunskaper om grundläggande aritmetiska operationer och principer, som associativitet, för att förstå och hantera mer abstrakta och komplexa algebraiska problem (Eaves et al., 2021). Förståelsen för associativitet kan då underlätta för eleverna att utveckla en starkare grund i matematik vilket kan hjälpa till för framtida lärande inom matematik (Robinsson et al., 2017; Schifter, 1999).

Associativitet tillåter elever välja en mer effektiv strategi som även tillåter elever bli mer flexibla för att lösa matematiska uttryck då elever kan välja att beräkna den högra operationen först eller inte vid addition $(a + b) + c = a + (b + c)$ och vid multiplikation $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Många individer och särskilt barn har en begränsad förståelse för associativitet vilket kan hindra dem från att identifiera och använda strategier kopplade till associativitet. Genom en stärkt förståelse för associativitet kan det öka tidseffektiviteten i problemlösning och matematikprestationer över tid (Eaves et al., 2022; Eaves et al., 2021; Robinson et al., 2016; Schifter, 1999). Förståelsen för associativitet är viktig då den hjälper elever att snabbt och korrekt lösa matematiska uttryck. När elever inte utvecklar förståelse för associativitet och andra egenskaper räknesätten besitter så riskerar elever att förlita sig på metoder som vänstertill-höger strategin som är ineffektiva under vissa uppgifter (Robinson & Dubé, 2008). Vänster-till-

[1] Generaliserad aritmetik innebär att de regler och principer man använder för att hantera vanliga tal och operationer (som addition och multiplikation) tolkas och appliceras på symboliska uttryck och variabler i algebra (Eaves et al. 2021)

höger strategin är en strategi som innebär att beräkna talen i den ordning som de presenteras i. Elever behöver utveckla beräkningsförmåga, kunskap om operationsordning och arbetsminne för att kunna identifiera lösningsmetoder som är effektiva (Eaves et al., 2022; Robinson & Dubé, 2013).

3.3 Undervisning om associativitet

Enligt Warren (2003) så är det vanligt att eleverna har en statisk syn på operationer där det finns brister i att se hur omgrupperingar av termer påverkar resultatet av en operation. Statisk syn på operationer innebär att eleverna uppfattar dessa som oföränderliga och fasta utan att förstå hur omgrupperingar för operationer inom addition och multiplikation kan omgrupperas utan att förändra resultatet. Eleverna saknar då en flexibel förståelse för operationer vilket är en grundläggande aspekt av algebra och aritmetisk struktur (Warren, 2003). Det råder en brist på undervisning som fokuserar på hur räknesätten och dess operationer förhåller sig till varandra, vilket begränsar elevernas möjligheter att upptäcka och förstå sambanden (Warren, 2003). Där lärande om associativitet handlar inte om att utföra algoritmer eller uppställningar utan att skapa en förståelse för djupare matematiskt tänkande och problemlösning (Robinson & Dubé, 2012; Schifter, 1999). Genom att låta elever diskutera olika strattegier kan elever jämföra och upptäcka fördelar och nackdelar med olika strategier. Det kan främja en djupare förståelse för associativitet genom att elever blir mer medvetna om vilka alternativ som finns (Eaves et al., 2022; Dubé & Robinsson, 2010; Robinson & Dubé, 2012; Schifter, 1999). Utbildningspraktiker ska fokusera på att undervisa effektiva och flexibla strategier för aritmetisk problemlösning (Eaves et al., 2022; Robinson & Dubé, 2013). Undervisning ska inkludera strategiska metoder som stärker förståelsen för associativitet genom uttryck där lärare kan hjälpa elever att se relationerna mellan operationerna som innehåller addition och multiplikation (Dubé & Robinsson, 2010). Genom att kunna se relationer mellan operationer innebär att elever förstår hur olika matematiska operationer är kopplade till varandra och hur de kan påverka varandra i olika sammanhang (Dubé & Robinson, 2010). Förståelse för räknesätten innebär exempelvis förståelsen av hur man kan omgruppera tal (associativitet) eller byta ordning på tal (kommutativitet) utan att ändra resultatet. Den förmågan är grundläggande för en djup förståelse av matematiska strukturer och hjälper elever att se mönster och samband (Dubé & Robinson, 2010).

Undervisning kan använda sig av konkreta representationer (ex. bilder och block) som visuellt hjälpmedel för att hjälpa eleverna att förstå konceptet av associativitet. Genom att integrera associativitet och algebra kan eleverna ges större förståelse för dess relevans (Dubé & Robinsson, 2010). Lärare kan skapa uppgifter där eleverna uppmanas lösa problem med olika grupperingar för att själva få utforska och upptäcka associativitet (Schifter, 1999).

3.4 Elevers attityder till aritmetiska problem med associativitet

Elevers attityder till att använda associativitet när de ska lösa aritmetiska problem är varierande. En stor del är skeptiska eller uppfattar omgruppering som fusk i stället för att följa traditionella strategier så som vänster-till-höger strategin (Dubé & Robinson, 2018; Robinson et al., 2016; Robinson et al., 2017). Att associativitet är mindre attraktiv som strategianvändning av elever än andra problemlösningsstrategier kan bero på hur undervisningen om associativitet går till och vilken inställning till matematik eleverna har sen innan, har eleverna en positiv inställning till matematik så tenderar eleverna vara mer benägna att testa nya strategier (Dubé & Robinson, 2010; Eaves et al., 2019; Eaves et al., 2021; Eaves et al. 2022; Robinson et al., 2016; Robinson et al., 2006).

Elevers förståelse för associativitet är en grundsten i att eleverna ska våga testa omgruppering av termer och när detta inte finns så lutar de sig mot mer traditionella och bekräftade strategier (Dubé & Robinson, 2018; Dubé & Robinson, 2010; Robinson et al., 2006). Ålder verkar spela en roll då äldre människor tenderar till att vara mer öppna för att testa och använda associativitet (Robinson & Dubé, 2013; Robinson et al., 2016; Robinson et al., 2006). Genom att undervisningen specifikt riktas mot den associativa lagen och dess tillämpning i aritmetiska problem kan både användningen och legitimiteten öka. Detta eftersom osäkerhet, missuppfattningar eller en rädsla för att göra fel kan hämma elever från att praktiskt tillämpa associativitet, även nr de har en teoretisk förståelse för begreppet (Dubé & Robinson, 2010; Eaves et al., 2021; Robinson & Dubé, 2012; Robinson et al., 2017). Elever med större medvetenhet om olika andra strategier gör det enklare att acceptera och börja använda associativitet som en metod för att omgruppera termer för enklare beräkning (Eaves et al., 2022). När det blir mer komplexa problem så tycks omgruppering av termer skapa en större kognitiv belastning där även

operationsordning kommer spela roll vilket kan göra att färre använder sig av associativitet (Eaves et al., 2022). Detta beror på omgruppering av tal kräver mer mentalt arbete när uppgiftens struktur är mer komplex och att operationsordning (prioriteringsreglerna) blir mer relevanta och påverkar svaret vilket påverkar vilka tal som kan omgrupperas och i vilken ordning.

3.5 Teori

I denna studie används begreppet strategivalsteori som ett samlingsnamn för forskningsbaserade perspektiv på hur elever väljer och använder sig av olika strategier vid lösning av matematiska uttryck. Något som ska understrykas är att strategivalsteori inte är en enhetlig eller formellt etablerad teori inom forskningslitteraturen utan snarare en benämning som används för att beskriva ett forskningsfält inom matematikdidaktik. Strategivalsteori behandlar elevers strategiutveckling, valmedvetenhet och flexibilitet inom matematiska uttryck (Threlfall, 2002; Siegler, 1988).

Forskningen inom området visar att elever ofta har tillgång till flera olika strategier och att deras val påverkas av både uppgiftens karaktär och deras förståelse för matematiska samband (Carpenter & Moser, 1984; Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001). Begrepp som är centrala är strategimedvetenhet och strategiflexibilitet. Strategimedvetenhet syftar till elevens insikt om de olika sätt det går att lösa ett matematiskt uttryck på samt att vissa strategier kan vara mer effektiva än andra (Threlfall, 2002). Strategiflexibilitet innebär att eleven har förmågan att anpassa sin strategi utifrån kontext – till exempel genom att använda sig av associativ omstrukturering endast när det förenklar uttrycket för att underlätta beräkningen (Rittle-Johnson, Sigler & Alibali, 2001; Siegler, 1988).

Strategivalsteori omfattar också begrepp som proceduriell kunskap vilket betyder att en elev kan utföra en matematisk procedur korrekt, till exempel att addera tal i rätt ordning utan att förstå varför procedurer fungerar (Rittle-Johnson et al., 2001). Begreppslig förståelse betyder däremot att eleven förstår de underliggande matematiska principerna såsom associativitets betydelse vid addition eller multiplikation (Rittle-Johnson et al., 2001).

Genom att analysera elevers val av strategier, samt graden av strategimedvetenhet, strategiflexibilitet och begreppslig förståelse ges möjlighet att fånga nyanser i deras matematiska tänkande. Detta gör begreppen värdefulla verktyg i att analysera data, beskriva datan i resultatet och kunna diskutera datan i diskussionsavsnittet genom att kunna uppmärksamma vilka egenskaper eleverna använder sig av i sina strategival.

4. Metod

Detta kapitel kommer redogöra för metodvalen (4.1), vilket urval som studien tagit del av (4.2) på vilket sätt enkäterna (4.3) och intervjuerna (4.4) analyserats för att få fram ett resultat. Avslutningsvis så tas det upp vilka etiska ställningstagande som studien gjort utifrån etiska forskningsprinciper (4.5).

4.1 Metodval

I denna studie används en kvalitativ metodansats med kvantitativa inslag för att få en djupare förståelse av elevers strategianvändning vid aritmetiska tre- och flertalsuppgifter. Valet grundar sig i studiens syfte att undersöka vilka strategier och varför eleverna använder dem under uppgifter där strategier baserade på associativitet förenklar beräkningen i uppgiften. Där av genomfördes en enkät som följdes upp med samtal med enskilda elever hur de gått till väga på arbetsbladen. Arbetsbladen innebar ett möjliggörande av mönsteridentifiering medan de uppföljande samtalen gav en insyn i elevernas resonemang, förståelse och förklaringar till varför de använde sig av just den strategin de använde.

Arbetsbladen bestod av 12 uppgifter (se bilaga 1) där sex av dem var manipulerade på sådant sätt att strategi baserat på associativitet skulle innebära en enklare beräkning. I resultatet och diskussionsavsnitten kommer enbart uppgifter från arbetsbladen som är manipulerade för att underlätta beräkningen genom en strategi baserad på associativitet att redogöras för. De manipulerade uppgifterna redogörs enbart för att kunna upptäcka ifall eleverna besitter begreppslig förståelse, proceduriell kunskap, strategiflexibilitet och strategimedvetenhet. Detta val att blanda uppgifter där strategier för associativitet underlättar beräkningen och uppgifter där vänster-till-höger strategin underlättar beräkningen är till för att elever inte allt för uppenbart ska upptäcka en systematik i uppgifternas konstruktion. Uppgifterna som användes på arbetsbladet finns i tabell 1.

Tabell 1

$127 + 143 + 178 =$	$\mathbf{619 + 18 + 62}=$	$\mathbf{78 + 55 + 45} =$
$312 + 88 + 291 =$	$\mathbf{6 \cdot 2 \cdot 50} =$	$8 \cdot 5 \cdot 10 =$
$\mathbf{12 \cdot 4 \cdot 25} =$	$4 \cdot 25 \cdot 5$	$\mathbf{75 + 32 + 113 + 37} =$
$\mathbf{75 + 25 + 43 + 57} =$	$44 + 56 + 37 + 25 =$	$\mathbf{15 + 18 + 24 + 16} =$

Kommentar: De fetmarkerade uppgifterna är de som kommer att redovisas i resultatet och de uppgifter där en strategi baserad på associativitet underlättar beräkningen av uppgiften.

Uppgifterna behöver innehålla tre tal eller fler för att eleverna ska kunna utföra en strategi baserad på associativ eller visa annan strategimedvetenhet eller flexibilitet. Den enda lösningen med hjälp utav associativitet är genom att utföra den högra operationen först. Uppgifterna som innehållet fyra tal används för att undersöka om elevernas sätt att genomföra beräkningar förändras, då dessa uppgifter erbjuder flera möjliga lösningsstrattegier. Genom att arbeta med fyra tal ges eleverna dessutom ökade möjligheter att tillämpa den associativa lagen på olika sätt, $=(a + b) +> + d = a +$ $=(b + c) + d> = a + (b + (c + d))$. Det finns en risk att eleverna upptäcker association genom enkäten då uppgifterna är manipulerade så att det ska vara till fördel att beräkna uppgifter genom en omgruppering av talen. Med detta menas att i en uppgift som ser ut $a \cdot b \cdot c$ så är det en enklare beräkning att börja med högra operationen $(a \cdot (b \cdot c)$ för att sedan multiplicera produkten av $b \cdot c$ med a. På samma sätt, i additionsuppgfiterna, innebär den högra operationen en mer lätttilgänglig beräkning, exempelvis i uttrycket $a + (b + c)$ där summan av $b + c$ därefter adderas till a. Detta gäller för de uppgifter som har manipulerats.

Uppföljande samtal menar Bryman (2008) ingår i kategorin kvalitativa intervjuer för att möjliggöra en djupare förståelse av respondentens perspektiv. Enligt Byrman (2008) bör uppföljande samtal genomföras i en semistrukturerad form, där förutbestämda frågor kombineras med möjlighet för intervjuaren att ställa följdfrågor. Detta skapar utrymme för en fördjupad förståelse och bidrar till att klargöra respondentens perspektiv och resonemang.

4.2 Urval

Urvalet av deltagare skedde genom bekvämlighetsurval. Den valda skolan är belägen i en mellanstor stad i Sverige. Skolan valdes efter praktiska omständigheter, såsom tillgång till elever och möjligheten att genomföra både enkät och intervjuer inom tidsramen för studien. Studien genomfördes i en årskurs 6 där 27 deltog på arbetsbladen. Arbetsbladen kategoriserades i fyra grupper utifrån svaren. De tre grupperna var 1) elever som använt sig av en associativ strategi flera gånger, 2) elever som nästan enbart använt sig av vänster-till-höger strategin, 3) elever som nästan enbart använt sig av uppställningar och 4) elever som använt av både associativitet och kommutativitet. Efter genomförda arbetsblad gjordes en avgränsning på vilka elever som skulle delta ifrån de olika grupperna. Tidspressen möjliggjorde enbart 13 uppföljande samtal vilket innebar att tre elever från samtliga kategorier medverkade och fyra från elever som använt sig av en associativ strategi. För att fånga så många nyanser som möjligt i varje kategori likfördelades kategorierna i så stor utsträckning som möjligt. De uppföljande samtalen genomfördes semistrukturerat, vilket innebar att inledande frågeställningar var i stort sett desamma men att följdfrågorna anpassades efter elevsvar – antingen för att klargöra vad eleverna avsåg eller för att få dem att utveckla sina svar och resonemang ytterligare. Enligt Bryman (2008) kännetecknas semistrukturerade intervjuer (i detta fall samtal) av att intervjuaren använder en intervjuguide med teman som ska beröras, men att ordningsföljden och utformningen av följdfrågor kan variera beroende på hur samtalet utvecklas. Detta gör metoden flexibel och lämpar sig väl för att kunna förstå respondenternas perspektiv.

Arbetsbladen är konstruerade genom Canva vilket är webbaserad designplattform då den tillåter att skapa visuellt innehåll utan att besitta avancerade designkunskaper. Intervjun är semistrukturerade vilket betyder att jag skapade frågor på förhand för att säkerställa att intervjuerna blev snarlika men utrymme för eleven att kunna uttrycka sig på sitt sätt och hur hen utförde uppgifterna och sina beskrivningar varför hen gjorde på sitt sätt.

4.3 Genomförande

Eleverna genomförde ett arbetsblad med aritmetiska uppgifter, utformade för att kunna beräknas med olika strategier, däribland associativitet. Arbetsbladet tog cirka 20 minuter för eleverna att genomföra. Efter insamlade enkäter analyserades elevernas lösningar

utifrån vilka strategier som använts därefter kategoriserades de genomförda arbetsbladen i fyra kategorier.

1. Elever som använt sig av en associativ strategi flera gånger.
2. Elever som nästan enbart använt sig av vänster-till-höger strategin.
3. Elever som nästan enbart använt sig av uppställningar.
4. Elever som använt sig av både associativitet och kommutativitet.

Ur varje kategori valdes tre elever ut, förutom från kategori ett där fyra deltog, totalt 13 elever, för intervju. Syftet med att välja tre elever ur varje kategori är för att kunna skapa en förståelse för, se likheter och skillnader mellan kategorierna men också inom kategorierna. Urvalet av elever inom respektive kategori baserades på hur frekvent de hade använt den strategi som kategorin representerade i sina arbetsblad. Exempelvis prioriterades elever som i högre grad använde strategier baserade på associativitet för uppföljande samtal än elever som enbart använt sig en gång av just den strategin. Syftet med detta urval var att få fram resonemang och perspektiv som på bästa sätt kunde representera de olika kategorierna.

Detta möjliggjorde både struktur och flexibilitet för att kunna upptäcka likheter och skillnader i elevernas val av strategi och resonemang. Samtliga intervjuer spelades in och transkriberades för vidare analys. Även följdfrågorna var till viss del förbestämda men anpassades efter svar och elevens nivå eller för att förtydliga elevens svar.

Den kvalitativa analysen av arbetsbladet analyserades efter fem variabler och dokumenterades systematiskt in i ett excel dokument och med förkortningar ifrån varje kategori.

- Var svaret rätt?
- Löstes uppgiften genom associativitet?
- Löstes uppgiften genom kommutativitet?
- Löstes uppgiften genom vänster-till-höger strategin?
- Löstes uppgiften genom uppställning?

Färgkodningen användes för att skapa en enklare struktur för att se mönster i varje elevs strategival under hela arbetsbladet, ge en helhetsbild i vilka strategival som var vanligast.

Den kvalitativa analysen av de uppföljande samtalen analyserades genom en inspiration från tematisk analys som är tagna ifrån Bryman (2008)

Steg ett: innebär att jag bekantade mig med materialet. De uppföljande samtalen lyssnades på två gånger vardera och sedan transkriberades samtalen så likt som möjligt där ord som öh, eh togs bort ifall de inte tillförde något till innebörden av elevens svar.

Steg två: så användes öppen kodning. I denna fas användes färgkodning utefter vilken av de olika strategierna eleverna använde sig av. Var det en elev som förklarade hur hen använt sig av en strategi baserad på associativitet fick detta svar en grön färg. Var det en elev som förklarade hur hen använt sig av kommutativitet så fick det svaret gul färg och så vidare.

Steg tre: i denna fas sorterades den färgade transkriberingen utifrån associativitet, kommutativitet, vänster-till-höger strategin och uppställningar. Detta gjordes för att skapa ordning i datan men också för att kunna upptäcka likheter och skillnader mellan och inom de olika teman.

Steg fyra: I denna fas parades kopplingar mellan och inom teman. Detta gjordes i ett nytt dokument för att skapa ordning i vilka teman som fanns kvar och vilka likheter och skillnader det fanns inom teman. I denna fas valdes det att slå ihop vänster-till-höger strategin och uppställningar då det var stora likheterna mellan svar och resonemang. Det var i denna fas som begreppen strategimedvetenhet, proceduriell kunskap, strategiflexibilitet och begreppslig förståelse kunde bli etiketter på datan. Begreppen användes för att urskilja vilka kvaliteter elevernas svar från arbetsbladen och de uppföljande samtalen hade.

4.6 Etiska ställningstagande

Studien har utgått från forskningsetiska principer: informationskravet, samtyckeskravet, Konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Bryman, 2008). Samtyckeskravet uppnås genom att vårdnadshavare fyllt i en samtyckesblankett (se bilaga 2) och där eleverna själva fått möjlighet till att avbryta sitt deltagande när som helst. All data har anonymiserats och behandlats konfidentiellt. Studien använder endast materialet för det syfte deltagarna informerats om.

För att uppfylla informationskravet har samtliga deltagare i studien informerats både skriftligt och muntligt om studiens syfte, genomförande och deras roll som deltagare.

Deltagarna fick ta del av ett informationsbrev där det tydligt framgick att deltagande var frivilligt, att de när som helst kunde avbryta deras medverkan utan konsekvenser. Det har också framgått både skriftligt och muntligt att deras svar och samtal skulle behandlas anonymt. Informationen har givits på ett anpassat språk efter elevernas ålder och förståelsen har kontrollerats innan datainsamlingen. Deltagarna har också fått välja ifall de vill medverka på det uppföljande samtalet som skulle spelas in eller inte och att det var frivilligt att genomföras.

Konfidentialitetskravet har säkerställts genom att allt insamlat material har avidentifierats. Inga namn eller andra personuppgifter som kan kopplas till enskilda deltagare har använts i transkribering eller analys. Elevernas svar har kodats och presenterats på ett sådant sätt att ingen individ ska kunna identifieras. Allt det insamlade materialet har hanterats med största sekretess och förvarats på ett säkert och oåtkomligt sätt för andra än mig själv.

I enlighet med nyttjandekravet kommer det insamlade materialet endast att användas till den här studien och inte släppas till andra som skulle vara intresserade av materialet.

5 Resultat

Resultatet presenteras genom en överblick av enkäterna (Tabell 1), följt av en sammanfattning av vad som framkommit i den kvalitativa analysen av elevsvaren samt de kategorierna som identifierades. Därefter redovisas elevernas resonemang utifrån kategorier.

5.1 Resultat från arbetsbladen

Tabellen nedan redovisar samtliga uppgifter som manipulerats för att förenkla beräkningar genom strategier baserade på associativitet. En elev kan använda sig av uppställning med samtliga tal och vänster-till-höger strategin då dessa strategier inte utesluter varandra, detsamma gäller storleksordning av tal och uppställning med samtliga tal. En elev kan däremot inte använda sig av associativitet eller kommutativitet och någon annan strategi.

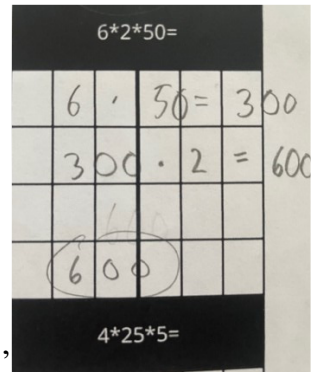
Tabell 1

Uppgifts nr.	Uppgift	Associativitet	Vänster-till-höger	Storleksordning av tal	Kommutativitet	Uppställning med samtliga tal	Inget svar
2	$619 + 18 + 62$	3	20	4	0	19	0
3	$78 + 55 + 45$	3	20	4	0	19	0
5	$6 \cdot 2 \cdot 50$	2	21	1	2	2	1
7	$12 \cdot 4 \cdot 25$	4	16	1	5	2	2
9	$75 + 32 + 113 + 37$	5	10	11	0	11	1
10	$75 + 25 + 43 + 57$	9	15	3	0	11	0
12	$15 + 18 + 24 + 16$	9	14	4	0	13	0

Kommentar: Tabell över elevers val av strategi vid de uppgifter där strategier baserade på associativitet förenklar beräkningen.

Efter analys av vilka strategier som eleverna använde sig av så framkom det fem strategier under additionsuppgifterna och fem strategier under multiplikationsuppgifterna. Under additionsuppgifterna så använde flest elever sig av vänster-till-höger strategin. Uppställning med samtliga tal var den strategi som användes näst mest av eleverna. Strategier baserade på associativitet var den tredje mest använda strategin och den fjärde mest använda strategin var storleksordning av tal där talen rangordnades från störst värde

till lägst eller tvärtom för att sedan börja sin beräkning. Minst använda strategin var kommutativitet. Uppställning med samtliga tal ingår i vänster-till-höger strategin och storleksordning av tal, vilket betyder att du kan använda dig av vänster-till-höger- eller storleksordning av tal strategin och samtidigt använder dig av uppställning med samtliga tal. Strategin att storleksorda tal skulle tekniskt sett betraktas som ett uttryck för kommutativitet, då eleverna omgrupperar talen. I denna kategori används dock strategin inte för att effektivisera eller förenkla beräkningen. Eftersom nästan samtliga elever som tillämpade denna strategi kombinerade den med uppställning av samtliga tal har den därför givits en egen kategori. Däremot är det omöjligt för strategier baserade på associativitet eller kommutativitet och samtidigt ingå i uppställning med samtliga tal. Uppgifterna med fyra tal i blir associativitet mer vanligt och då förekommer det främst genom gruppering av termerna. Gruppering av termer innebär att eleverna utför uppgiften $(c + d) + (a + b)$ sedan beräkna summan av de två operationerna. Eleverna genomför alltså högra operationen för sig och sedan vänstra för att addera ihop de två summorna. För att en strategi skulle kategoriseras som kommutativitet så skulle eleverna vid lösning av uppgifterna eller addition omstrukturera uttrycket $(a \cdot c) \cdot b$ (se figur 1) då det är ett aktivt sätt av eleven att förenkla uttrycket. **Figur 1**



Kommentar: Elevlösning på uppgift 5.

5.2 Resultat från uppföljande samtal

Elevsvaren är kategoriserade i två grupper utifrån studiens frågeställning ” Vilka strategier använder sig elever av när de beräknar aritmetiska tre- eller flervalsuppgifter?”. De två identifierade grupperna utgörs av elever som använder strategier baserade på associativitet eller kommutativitet samt av elever som tillämpar förbestämda strategier , vilket kommer kallas förbestämda strategier, eftersom det framgår tydligt både i arbetsbladet

och i det uppföljande samtalet att eleven konsekvent, eller i stort sett konsekvent, löser samtliga uppgifter med hjälp av en och samma strategi. Den andra frågeställningen ”Vilka resonemang för eleverna för sina strategival?” besvaras i tre kategorierna. Kategorierna är ”Elevers användning av strategier baserade på associativitet och kommutativitet och deras resonemang”, ”Förbestämda strategier” samt ”Identifiering av nya strategier i samband med arbetsbladet och det uppföljande samtalet”

5.2.1 Elevers användning av strategier baserade på associativitet och kommutativitet och deras resonemang

Ett arbetsblad vars val av strategier varierade mycket var av Elev 1. Denna elev tittade på uppgiftens tal för att försöka hitta lättare lösningar. I citatet under är det uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$

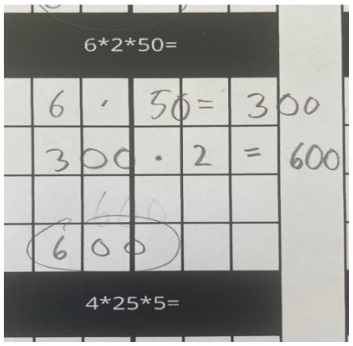
> Elev 1: Jag började något lätt tal som $2 * 50$ sen såg jag att tar man bara 100 sex gånger så blir det 600.
> Intervjuaren: Vad är ett lätt tal?
> Elev 1: När två tal blir 100 eller 10.

Elev 1 svar visar på att hen ser på talen i uppgiften för att se ifall det finns operationer som bildar ”lätta” tal. ”Lätta” tal är då tal som bildar jämna 10- eller 100-tal. Denna elev utför uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$ genom beräkningen $a \cdot (b \cdot c)$ då $(b \cdot c)$ bildar produkten 100 och sedan multiplicerar $100 \cdot 6 = 600$. Eleven använder sig utav en strategi utifrån att hen förstår de associativa egenskaperna hos multiplikation. Elevens beskrivning av sitt tillvägagångssätt indikerar på en strategisk flexibilitet, där eleven aktivt söker vad som upplevs som ”enklare tal”. Däremot framkommer ingen begreppslig förståelse, då eleven inte förklarar varför den högra operationen kan utföras först. Eleven visar på en proceduriell kunskap genom att känna till att beräkningen kan genomföras på detta sätt. Eleven sätt att beräkna uppgiften på uppvisar en viss strategimedvetenhet då hen väljer en strategi som medför enklare och ett effektivare sätt att beräkna uppgiften på än vänster-till-höger och att storleksordna tal som strategier är.

Elev 6 uppvisade under uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$ egenskaper som strategieflexibilitet och strategimedvetenhet.

Elev 6: Jag tänkte 2 är enkelt det är ju bara att dubbla. Så då tog jag 6*5 och sen la till nollan och dubblade och adderade sista talet i huvudet.

Figur 2



Elevlösning på uppgift 5 av elev 6

På uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$ så valde eleven att börja med $6 \cdot 5 = 30$ eleven lägger då till en nolla i produkten vilket betyder att produkten blir 300 och dubblar produkten $300 \cdot 2 = 600$. Detta visar en strategimedvetenhet hos eleven då hen ser på talen i uppgiften för att hitta ett enkelt sätt att beräkna uppgiften på. Eleven söker efter enklare sätt att genomföra den sista operationen och väljer därför en strategi där det upplevs lättare att dubblera ett tal. Detta indikerar även strategisk flexibilitet, då lösningen förutsätter användning av en strategi baserad på kommutativt genom att omstrukturera uttrycket $(a \cdot c) \cdot b$. Eleven visar både proceduriell kunskap och begreppslig förståelse genom att eleven vet att hen får multiplicera på detta sätt men kan inte förklara varför.

Något som framkom under de uppföljande samtalen med eleverna är att den begreppsliga förståelse inte finns på ett sådant sätt att de kan uttrycka sig om varför de kan genomföra operationerna i olika ordningar utan elever som använder sig av detta utför det genom en proceduriell kunskap. Eleverna vet att de får utföra operationerna i olika ordningar utan att det kommer påverka resultatet. Citatet under förklara elev 8 hur hen beräknade uppgift 7: $12 \cdot 4 \cdot 25$.

Elev 8: Jag tog $4 * 25 = 100$ och sen 100*12 Intervjuaren:
Varför började du med $4 * 25$?
Elev 8: För att det blir 100 och är enklare än $4 * 12$

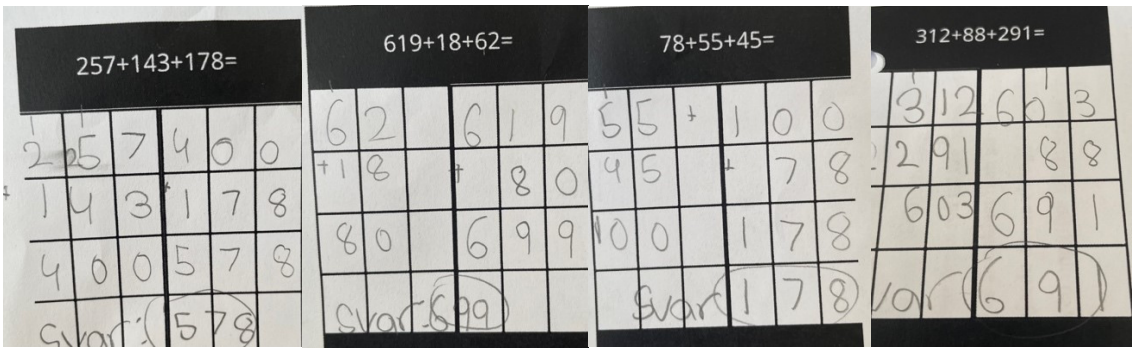
Elev 8 vet att $4 \cdot 25 = 100$ får beräknas först för att sedan beräkna $12 \cdot 100$. Elev 8 uppvisar i denna uppgift både strategimedvetenhet och strategisk flexibilitet genom att bedöma att $100 \cdot 12$ är en enklare beräkning än $4 \cdot 12$. Eleven genomför därmed beräkning som $a \cdot (b \cdot c)$ vilket utför en strategi baserad på associativitet.

Elev 10 utförde uppgifterna på arbetsbladet på liknande sätt fast med mer intention i vilken strategi som ska väljas. Elev 10 använde sig av flera olika strategier under arbetsbladet och har också svårt att förklara varför hen gör valet av strategier mer än att hen tycker de passar ihop. Citatet nedan behandlar först uppgift 3: $78 + 55 + 45$ och sen uppgift 4: $312 + 88 + 291$

> Elev 10: Då tog jag $55 + 45$ som blir 100 Intervjuaren:
> Varför gjorde du så för?
> Elev 10: För att det är de minsta talen sen tog jag 100 + 78 som blir 178 Intervjuaren:
> Hur gjorde du på nästa uppgift?
> Elev 10: Då tog jag $312 + 291$
> Intervjuaren Men de är ju inte de två minsta talen?
> Elev 10: Men tar man dem två största så blir det också enkelt att lägga till den minsta och då blir det 603 + 88 vilket är 691 men det beror också på vilka tal det är.
> Intervjuaren: Hur menar du att det beror på vilka tal det är?
> Elev 10: Jag vet inte riktigt men ibland är det enklare att börja med vissa tal som ser ut att passa ihop. Det beror lite på vad som känns lättast just då.

Elev 10 beräknar uppgift 3: $78 + 55 + 45$ genom associativitet då eleven genomför den högra operationen först. På uppgift 4: $312 + 88 + 291$ så beräknar eleven uppgiften genom kommutativitet genom att beräkna talen utifrån högst värde $(a + c) + b$ även att uppgiften var designad så att vänster-till-höger strategin $(a + b) + c$ skulle bli en enklare beräkning då vänstra operationen bildar ett jämt hundra-tal. Eleven visar på en strategieflexibilitet där hen kan utföra olika strategier men en mindre utvecklad strategimedvetenhet då hen inte anpassar strategierna utefter uppgifternas kontext och struktur. Eleven visar inte på någon begreppslig förståelse men en proceduriell kunskap genom att hen vet om att hen får utföra operationerna i olika ordningar utan påverkan av resultatet. Elev 10 använde i huvudsak varierande strategier vid lösningen av additionsuppgifterna med tre termer (se figur 3). I uppgift 1: $257 + 143 + 178$, tillämpades vänster-till-höger strategin. På uppgift 2: $619 + 18 + 62$, och uppgift 3: $78 + 55 + 45$ användes en strategi baserad på associativitet och en strategi baserad på kommutativitet användes på uppgift 4: $312 + 88 + 291$

Figur 3



Kommentar: Elevlösning på uppgift 1, 2, 3 och 4 från elev 10

Sammanfattningsvis uppvisar eleverna i denna kategori en kombination av strategisk flexibilitet, strategimedvetenhet och proceduriell kunskap. Eleverna visar strategieflexibilitet genom att eleverna byter val av strategi utefter kontext (i detta fall konstruktionen av uppgifterna). Elevernas visar generellt i denna kategori en strategimedvetenhet där val av strategi beror på uppgiften eleverna möter. Eleverna väljer inte alltid den mest effektiva/ enklare strategin på uppgiften då eleverna ibland väljer strategier baserade på kommutativitet på uppgifter som är konstruerade för att associativa strategier ska vara enklare. Eleverna besitter proceduriell kunskap då eleverna väljer andra operationer i stället för vänster-till-höger strategin. Begreppslig förståelse har ingen elev uppvisat kunskap om.

5.2.2 Förbestämda strategier

I denna kategori förkommer elever som löser uppgifterna med vänster-till-höger strategin och elever som använder sig av storleksordning av tal. Anledningen till att de två olika strategierna placeras i samma kategori, snare än separat, är att de delar gemensamma egenskaper med stor betydelse: elever som använder någon av dessa strategier tillämpar den konsekvent på samtliga, eller nästan samtliga, uppgifter. Elever som använder sig av någon av dessa lösningar gör det på ett systematiskt sätt utan att ta hänsyn till talen i uppgiften, aritmetiska operatorer (räknesätt) och antal tal i uppgiften. Elever som använt

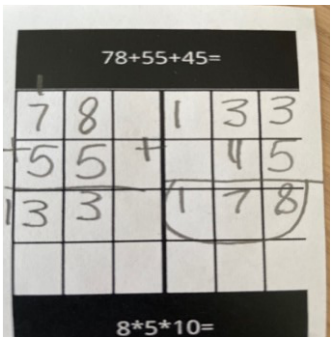
sig av storleksordning av tal och omgrupperar talen utför på vissa uppgifter en strategi baserad på kommutativitet men då dessa gör det på ett systematiskt sätt och oftast inte på ett sätt som förenklar beräkningen ingår det inte i rubrik 5.2.1 där eleverna använder det på ett sätt som förenklar beräkningen.

Hur eleverna använder sig av vänster-till-höger strategin varierar genom att räkna talen i en uppställning eller två tal för sig. Eleverna förlitar sig på en proceduriell kunskap där de vet att utför de beräkningen korrekt kommer även svaret bli det.

> Elev 3: Först tog jag ett tal för att se vad det blev för att sedan ta nästa tal och plussa ihop det och fick då fram svaret. Det blir liksom lättare att ta två tal i taget än alla samtidigt. Och så gjorde jag på nästa med. Så gjorde jag på de flesta additions uppgifterna.
> Intervjuaren: Hur gjorde du på multiplikationsuppgifterna?
> Elev 3: På gånger tog jag första talet och gångra det med det andra och tar svaret och gångrar med det sista talet och fick då fram ett svar.

Elev 3 har en förbestämd strategi att utföra sina beräkningar på. Denna elev använder samma strategi på samtliga uppgifter där hen adderar eller multiplicera den vänstra operationen för att sedan addera eller multiplicera med den sista. Hen beräknar alla uppgifter på arbetsbladet genom $(a + b) + c$ samt $(a \cdot b) \cdot c$ vilket kategoriseras som statisk syn på operationer. Eleven löser uppgift 3 $78 + 55 + 45$ genom vänster-till-höger strategin utan att se hur omgrupperingar kan förenkla en beräkning som på uppgift 3 där den högra operationen bildar ett hundratal och som gör beräkningen enklare (se figur 4).

Figur 4



Elevlösning på uppgift 3 av elev 3

Eleven beräknar först $78 + 55 = 133$ och addera därefter $133 + 45 = 178$. Det blir

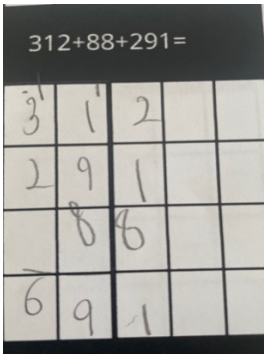
tydligt att eleven inte analysera talen, utan följer i stället ett givet tillvägagångsätt. Eleven använder sig av proceduriell kunskap då hen vet att vänster-till-höger strategin fungerar men använder sig inte av någon begreppslig förståelse då hen inte använder sig av vare sig kommutativitet eller associativitet i någon beräkning av uppgifterna. Eleven uppvisar ingen strategisk flexibilitet, eftersom samma strategi tillämpas konsekvent under hela arbetsbladet. Vidare framkommer ingen tydlig strategimedvetenhet, då eleven under det uppföljande samtalet inte reflekterar över varför vissa uppgifter upplevs som svårare än andra, vilket kan indikera på en mindre utvecklad strategimedvetenhet.

En annan av de vanligare sätten att lösa uppgifterna på arbetsbladet var genom uppställningar där samtliga tal ingick och det kunde både vara i storleksordning eller vänster-till-höger strategin. Det var också vanligt att elever som använde sig av uppställningar ofta använde de på samtliga uppgifter.

> Intervjuaren: Hur löste du denna?
> Elev 2: Jag satte ihop 257, 178 och 143 i en uppställning sen så löste jag den.
> Intervjuaren: Löser du ofta uppgifter i uppställningar?
> Elev 2: Ja jag gjorde det på alla uppgifterna
> Intervjuaren: Går det att lösa uppgifterna på något annat sätt?
> Elev 2: Ja du kan räkna 257 plus 143 och sen plussa 178

Elev 2 använde under arbetsbladet enbart uppställningar som strategi. Detta förtydligar att eleven använder sig av proceduriell kunskap i stället för att se på talen i uppgifterna och då använda sig av begreppslig förståelse för att beräkna uppgifterna med. Eleven visar lite strategieflexibilitet och strategimedvetenhet genom att inte se/ förklara andra sätt att beräkna uppgiften än på att använda sig av vänster-till-höger strategin. Ett annat exempel av att storleksordning tal genom en uppställning finns i figur 6 där elev 4 beräknar uppgift 4: $312 + 88 + 291$.

Figur 5



Elevlösning på uppgift 4 av elev 5

Eleven väljer på uppgift 4 att storleksordna talen efter högst värde i fallandeordning i stället för att se på uppgiften och se att $312 + 88$ bildar ett jämt hundratal. Elev 5 beskriver i samtalet efter att hen inte har något särskilt sätt att ordna talen i uppställningen om det inte finns tal med hundratal och som sen ska bli tioövergångar.

> Intervjuaren: Brukar du göra uppställningar och på något speciellt sätt?
> Elev 5: Ja. På uppställning brukar jag inte tänka att något ska vara överst om det inte är 100 plus något jag ska göra tvåsiffrigt.

Detta indikerar en medvetenhet om vilka tal som ingår i uppgiften, men inte om hur talen kan relateras till varandra för att, genom en begreppsligförståelse, förenkla beräkningen. Det visar även en strategieflexibilitet att kunna omgruppera men inte en tillräcklig strategimedvetenhet för att kunna göra beräkningen enklare.

Sammanfattningsvis så använder elever i denna kategori förbestämda strategier för att beräkna uppgifter med. Eleverna använder vänster-till-höger strategin, uppställning och storleksordning av tal. Eleverna visar på en proceduriell kunskap och enbart en strategieflexibilitet till liknande strategier. Använder en elev vänster-till-höger strategin vet hen att även uppgiften skulle kunna lösas med uppställning till exempel. Eleven använder eller besitter inte begreppslig förståelse för att förenkla beräkningarna och visar liten strategimedvetenhet.

5.2.3 Identifiering av nya strategier i samband med arbetsbladet och det uppföljande samtalet

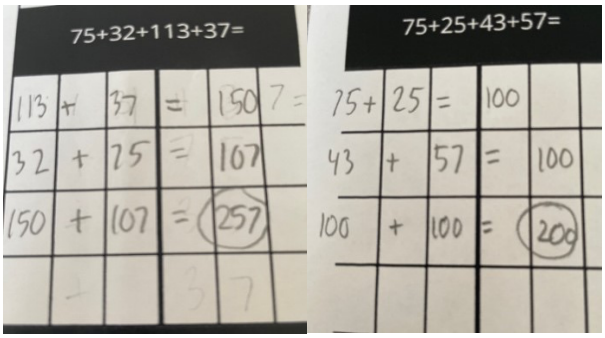
Något som framkom under enkäten är elever som började upptäcka att uppgifterna var manipulerade på ett sådant sätt att det skulle bli enklare beräkningar ifall eleven började med den högra operationen.

> Elev 6: Jag såg att dom två är tio kompisar (3 och 7) och då blir det lätt att addera dom men dom var inte det men då blir det lättare att addera ihop allt. Så gjorde jag på den med, den med och tyckte det var lite obvious 3 och 7 och 5 och 5.

Elev 6 beräknade uppgift 9: $75 + 32 + 113 + 37$ genom att hitta tio kompisar mellan 3+7 för att göra en enklare beräkning. Denna strategi använder Elev 6 på uppgift 10:

$75 + 25 + 43 + 57$ där eleven hittar tio kompisar på både vänstra och högra operationen (se figur 3)

Figur 6



Elevlösning på uppgift 9 och 10 av elev 6

Elev 6 använder på dessa två uppgifter associativitet som strategi men något som framkommer under intervjun är att eleven inte är medveten om det. Eleven är medveten om att den vänstra eller högra operationen kan utföras först, vilket visas genom att eleven systematiskt varierar ordningen under arbetsbladet. Detta indikerar både en strategimedvetenhet och en strategisk flexibilitet. Eleven kan däremot inte förklara varför omgruppering av talen är möjligt, vilket kan tyda på att hen besitter en proceduriell kunskap snarare än begreppslig förståelse. Eleven nämner dock aldrig varför hen får omgruppera talen för vilket tyder på att eleven besitter en proceduriell kunskap och inte begreppslig förståelse.

Elev 7 som använde sig av vänster-till-höger strategin nästan alltid fick under uppgift 7: $12 \cdot 4 \cdot 25$ problem med att beräkna $48 \cdot 25$ vilket ledde till att eleven började med trial and error strategi för att kunna lösa den.

> Intervjuaren: Hur gjorde du här?
>
> Elev 7: Först tog jag 12*4 och det blev 48 och 48*25 kunde jag inte räkna ut. Då tog jag i stället 4*25 och det är 100 och 100 * 12 vilket blev 1200.

Elev 7 visar då på att en strategieflexibilitet när hen inte klarade av att beräkna $48 \cdot 25$ genom att med andra strategier få fram ett rätt svar. Det uppvisar ingen strategimedvetenhet då det kräver att eleven aktivt väljer strategi utifrån kontext. Eleven uppvisar heller ingen begreppslig förståelse utan en proceduriell kunskap.

Eleverna blev frågade ifall de kunde identifiera fler sätt att lösa uppgifterna på. Elev 9 uppvisade stor strategisk flexibilitet på uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$.

> Intervjuaren: Hur gjorde du på denna uppgift?
> Elev 9: 6*2 är 12 och då gjorde jag uppställning på 12*50 (förklarade uppställningen och hur hen räknade).
> Intervjuaren: Hade du kunnat lösa den på ett annat sätt?
> Elev 9: Om jag tar bort 0 på 50 så tar jag 6*2*5 och sen lägger till en 0: a.
> Intervjuaren: Det var ett sätt jag inte tänkt på. Hade du kunnat lösa den på ett till sätt?
> Elev 9: Då hade jag tagit 2*50 och sen 100*6.

Elev 9 uppvisar, som framgår i citatet ovan, stor strategisk flexibilitet genom att kunna tillämpa tre olika strategier för att beräkna uppgiften. Detta visar dock på att strategimedvetenheten inte är fullt utvecklad, eftersom eleven valde på arbetsbladet en mindre effektiv lösningsstrategi än de som kunde presenteras under samtalet. Eleven uppvisar proceduriell kunskap, utan att det framkommer något som tyder på begreppslig förståelse.

Sammanfattningsvis kunde elever i denna kategori uppvisa strategieflexibilitet genom samtal, try and error eller upptäcka hur uppgifterna var konstruerade använda strategier som var mer gynnsamma än vänster-till-höger strategin. Elever visar då på att de kan anpassa sina strategier för att klara av uppgiften eller se flera sätt att beräkna den på. Eleverna i denna kategori, som inte upptäckte hur uppgifterna var konstruerade, visar inte tillräckligt utvecklad strategimedvetenhet för att systematiskt utnyttja sin strategiska flexibilitet för att underlätta beräkningarna. Eleverna i denna kategori besitter proceduriell kunskap och uppvisar inte att de har begreppslig förståelse.

6 Diskussion

I detta avsnitt diskuteras resultatet från studien i relation till tidigare forskning och teoretiska perspektiv på elevers strategianvändning, strategimedvetenhet och begreppsliga respektive proceduriell kunskap.

6.1 Statisk syn på operationer

Warren (2003) manar att elever kan ha en statisk syn på operationer vilket innebär att de tenderar att fastna i en och samma strategi. I denna studie visar elever som använder vänster-till-höger strategin eller uppställning ofta tecken på en sådan statisk syn, eftersom de har svårt att identifiera andra sätt att lösa uppgifterna på och använder samma stratgi på om inte samtliga så nästan samtliga uppgifter. Warren (2003) menar att detta kan bero på att det elever får för lite undervisning för hur olika operationer relaterar tillvarandra och elevernas möjligheter till att få utforska detta. Warren (2003) betonar att det behöver ske mer omfattande undervisning om operationers egenskaper för att elever inte ska ha en statisk syn på operationer. Resultatet visar att det finns en statisk syn på hur eleverna utför sina uppgifter, då många elever utför sina operationer utefter strategier de vet fungerar men som kan göra beräkningen svårare. Att låta elever diskutera, jämföra och upptäcka för- och nackdelar är också ett sätt att främja förståelsen för associativitet (Eaves et al., 2022; Dubé & Robinsson, 2010; Robinsson & Dubé, 2012; Schifter, 1999).

Genom mer undervisning om hur räknesättens egenskaper och tals förhållande/ samband till varandra kan enligt forskning elever välja strategier utefter uppgifters kontext och konstruktion (Eaves et al., 2022; Dubé & Robinsson, 2010; Robinsson & Dubé, 2012). När elever inte utvecklar förståelse för koncept som associativitet inom matematik så kan det finnas risk att eleverna måste förlita sig på strategier som vänster-till-höger strategin vilket Elev 5 från resultatet motvisar men som andra elever från samma kategori besannade (Robinson & Dubé, 2008). Lärande om associativitet handlar inte om att utföra uppställningar utan att skapa en förståelse för djupare matematiskt tänkande och problemlösning (Robinson & Dubé, 2012; Schifter, 1999).

Elever med statisk syn har svårt att se uppgiften i sin helhet och upptäcka att det kan vara enklare att utföra den högra operationen först. De har även svårt att identifiera alternativa lösningssätt under intervjun, även när de får betänketid, och tenderar därför att hålla sig till de strategier de är bekanta med. Utbildningspraktiker borde fokusera på att undervisa

effektiva och flexibla strategier för aritmetisk problemlösning, där eleverna utvecklar beräkningsförmåga och arbetsminne för att identifiera lösningsmetoder som är effektiva (Eaves, Attridge, Gilmore, 2022; Robinson & Dubé, 2013). Elever som väljer vänstertill-höger strategi eller uppställning detta för att de föredrar en strategi de är bekant med, eller för att slutföra uppgiften så snabbt som möjligt.

De elever som medverkade under samtal och kunde visa på flexibla sätt att lösa uppgifterna på var elever som använde sig av strategier baserade på associativitet eller kommutativitet. Eleverna valde dessa strategier för att kunna göra enklare beräkningar. Elev 1 väljer att lösa uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$ genom associativitet då den erbjuder en enklare beräkning. Elev 1 väljer på uppgift 5 att utför den vänstra operation först så hen får ett hundratal som sedan ska multipliceras med 6. Andra elever som också letade efter enklare beräkningar kunde använda sig av kommutativitet där elev 6 väljer att dubblera den första operationen i uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$ där hen beräknar $6 \cdot 50$ först.

6.1.2 Upptäcka associativitet

Elever med missuppfattad eller begränsad förståelse för associativitet kan ha svårt att se eller upptäcka och identifiera strategier kopplade till associativitet (Eaves, Attridge, Gilmore, 2022; Eaves, Gilmore, Attridge, 2021; Robinson, Dubé, Beatch, 2016; Schifter, 1999). Genom att låta elever diskutera olika strategier där elever får jämföra och upptäcka fördelar och nackdelar med olika strategier kan främja en djupare förståelse för associativitet (Robinson, Dubé, Beatch, 2016). Det kan även bidra till att elever blir mer medvetna om vilka alternativ som finns för operationer utan att påverka resultatet (Eaves, Attridge, Gilmore, 2022; Dubé & Robinsson, 2010; Robinson & Dubé, 2012; Schifter, 1999). Genom arbetsbladet och/ eller de uppföljande samtalen kunde elever börja använda sig av associativitet genom att antingen eleven började se mönster i uppgifterna eller att beräkningen blev för svår när hen skulle utföra vänster-till-höger strategin. För Elev 7 så blev uppgift 7: $12 \cdot 4 \cdot 25$ för svårt att genomföra med vänster-till-höger strategin där eleven inte kunde beräkna $48 \cdot 25$. Eleven upptäckte genom att beräkningen blev för svår strategi en strategi baserad på associativitet där $(a \cdot (b \cdot c)$ blev enklare att beräkna uppgiften. ”Elev 7: Först tog jag 12*4 och det blev 48 och 48*25 kunde jag inte räkna ut. Då tog jag i stället 4*25 och det är 100 och 100 * 12 vilket blev 1200.” Elev 6

började se mönster i att den högra operationen bildade tio-tal eller hundra-tal på vissa uppgifter och därför kunde välja associativ strategi på dessa uppgifter. ”Elev 6: Jag såg att dom två är tio kompisar (3 och 7) och då blir det lätt att addera dom men dom var inte det men då blir det lättare att addera ihop allt. Så gjorde jag på den med, den med och tyckte det var lite obvious 3 och 7 och 5 och 5.”

Förståelse för den associativitet lagen är en grundläggande förutsättning för att elever ska våga omgruppera termer. När denna förståelse saknas tenderar elever att använda mer traditionella och välbekanta strategier (Dubé & Robinson, 2018; Dubé & Robinson, 2010; Robinson, Ninowski, Gray, 2006). Många elever är medvetna om att tal kan omgrupperas i beräkningar, vilket framgår tydligt både hos de elever som tillämpar strategier baserade på associativitet eller kommutativitet och hos dem som ordnar talet efter värde i sina beräkningar. En faktor till varför så få elever använder sig av associativitet när de gör beräkningar kan vara att de har fått begränsad undervisning om räknesättens relationer och egenskaper. Genom att undervisning riktas särskilt mot associativitet och hur strategier baserade på associativitet kan implementeras i aritmetiska problem ökar både användningen och dess legitimitet, då osäkerhet och missuppfattningar kan hämma användningen av strategin (Dubé & Robinson, 2010; Eaves, Gilmore, Attridge, 2021; Robinson & Dubé, 2012; Robinson, Price, Demyen, 2017). Genom ökad undervisning om när den associativa lagen gäller (vid addition och multiplikation) och hur den kan tillämpas, är min uppfattning efter denna studie att användningen av associativa strategier kommer att öka, liksom elevernas förståelse för operationerna. Dubé & Robinson (2010) skriver att undervisning bör inkludera strategier som stärker elevernas förståelse för den associativa lagen, exempelvis genom problem där läraren kan hjälpa eleverna att se relationerna mellan operationerna. Detta skulle kunna vara en faktor till varför Elev 9 valde vänster-till-höger strategin i ställer för att välja en av de andra strategierna hen redovisade för i samtalet. Strategierna som är baserade på kommutativitet och associativitet har inte fullt ut fått legitimitet och att det finns en osäkerhet kring strategierna. Citaten nedan handlar om uppgift 5: $6 \cdot 2 \cdot 50$.

> Intervjuaren: Hur gjorde du på denna uppgift?
> Elev 9: 6*2 är 12 och då gjorde jag uppställning på 12*50 (förklarade uppställningen och hur hen räknade).
> Intervjuaren: Hade du kunnat lösa den på ett annat sätt?
> Elev 9: Om jag tar bort 0 på 50 så tar jag 6*2*5 och sen lägger till en 0: a.
> Intervjuaren: Det var ett sätt jag inte tänkt på. Hade du kunnat lösa den på ett till sätt?
> Elev 9: Då hade jag tagit 2*50 och sen 100*6.

Studiens resultat visar att i denna elevgrupp använder elever sig av mer traditionella och bekräftade strategier så som vänster-till-höger strategin och uppställningar än strategier som är baserade på associativitet och kommutativitet. Användning av vänster-till-höger strategin används av mer än hälften av alla deltagarna på samtliga uppgifter. Det är även tydligt att de elever som medverkade på de uppföljande samtalen och som använder sig av vänster-till-höger strategin och uppställningar har en svårighet att upptäcka strategier baserade på associativitet eller kommutativitet. Där av blir det tydligt att det finns en statisk syn på matematik.

Forskning har sett att ålder kan ha en påverkan på användningen av associativitet då osäkerhet, inte våga eller rädslan för att göra fel påverkar vilken strategi eleverna använder och att det då gör att elever till större del använder sig av mer traditionella och bekräftade strategier (Robinson & Dubé, 2013; Robinson et al., 2016; Robinson et al., 2017; Eaves et al., 2021). Detta skulle också kunna vara en faktor till att få elever valt att använda sig av strategier baserade på associativitet.

6.1.3 Strategivalsteori

Eleverna visar stor belägenhet att använda sig av proceduriell kunskap det vill säga hur en uppställning fungerar och används men kanske inte varför det fungerar. Den här studien har inga djupare svar på ifall det är ren proceduriell kunskap eleverna visar eller ifall de besitter djupare kunskap. Att mer parten använder vänster-till-höger strategin och uppställning pekar mot att eleverna besitter proceduriell kunskap och inte begreppslig förståelse.

Strategimedvetenhet, som handlar om elevers förmåga mellan olika strategier, tyder även på att många elever främst besitter proceduriell kunskap. Detta framgår av att eleverna som ofta använder sig av vänster-till-höger strategin eller uppställning i samtalet endast beskriver dessa metoder som möjliga sätt att genomföra beräkningarna, utan att reflektera över andra strategier.

Elever som väljer strategier baserade på kommutativitet eller associativitet identifierar generellt flera sätt att beräkna en uppgift jämfört med elever som använder sig av traditionella och välbekanta strategier. Dessa elever uppvisar även en större förmåga att

vara flexibel genom att byta strategier, varpå elever som förlitar sig på proceduriell kunskap tenderar att visa en begränsad strategisk flexibilitet. Detta skulle kunna bero på flera saker, Sigler (1988) menar att elever ofta använder bekanta och inövade strategier även om mer effektiva finns. Brist på feedback och svag metakognitiv förmåga kan vara en orsak till att de inte märker att det finns andra strategier som är bättre (Sigler, 1988). En stark begreppslig förståelse gör att elever är mer benägna att byta strategi vid behov. Det finns däremot en svag koppling mellan begreppslig förståelse och proceduriell kunskap (Rittle-Johnson et al, 2001) Bristen på strategimedvetenhet gör att elever inte reflekterar över valet av strategi (Threlfall, 2002). Threlfall (2002) menar att klassrumspraktiker tenderar att belöna rätt svar snarare än effektiv strategi, vilket kan göra elever passiva i sitt val av strategi.

6.2. Metoddiskussion

Urvalet genomfördes som ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2008), vilket har både för- och nackdelar. En fördel för studien var att det blev praktiskt genomförbart då det var ett tidspressat schema och att tillgången till elever som var villiga att delta säkerställdes. Nackdelen med litet urval på 27 elever är att resultatet endast speglar denna grupps strategival, resonemang och uppfattningar, vilket därför inte kan generaliseras. En annan fördel är att eleverna kunde genomföra arbetsbladet och därefter delta i ett uppföljande samtal kring uppgifterna och sina strategival med samma person, vilket hade varit praktiskt svårare med ett större urval.

Den begränsade tid studien hade på skolan under arbetsbladet och samtalen kan ha en påverkan att eleverna i varje kategori inte fullt ut representerar hela kategorin, eftersom andra elever inom samma kategori kan ha haft andra resonemang bakom sina strategival. Detta kan in sin tur påverkat studiens resultat.

Reliabilitet handlar om studies pålitlighet, kunde resultaten blivit liknande om undersökningen genomförts vid ett annat tillfälle eller av annan forskare (Bryman, 2008). För att öka reliabiliteten dokumenterades samtliga intervjuer genom ljudinspelningar,

Triangulering av data, alltså kombinationen av både enkäter och intervjuer som metod stärker validiteten och reliabiliteten. Genom att analysera både elevsvar från arbetsblad och svar från uppföljande samtal får studien en insyn till varför eleverna valt den strategi

som de gjort vilket enbart uppföljande samtal eller arbetsblad inte kunnat erbjuda. Arbetsblad och uppföljande samtal erbjöd det bästa alternativet för att motsvara studiens syfte ” Syftet med studien är att undersöka vilka strategier elever i årskurs 6 använder sig av när uppgifter med tre eller fler tals uttryck där associativitet är användbart för att förenkla beräkningen.” då både tillvägagångsätt och varför de valt det var av intresse.

Då deltagarantalet var litet så kommer resultatet inte kunna ge en generaliserande bild för hur elever i årskurs 6 i Sverige eller regionen där studien är utförd använder olika räknelagar för att förenkla beräkningen vid aritmetiska uttryck. Resultatet bör ses som en fördjupad inblick i hur några elever tänker kring strategier och varför de använder sig av dessa i ett visst sammanhang.

6.2.2 Arbetsbladet

Enkäten innehöll rutmönster för att ge eleverna att indikation var uträkning och svar skulle skrivas. Eleverna från denna skola utför beräkningar på rutade papper vilket också var en del i varför rutor i arbetsbladet användes för att skapa igenkänning hos eleverna.

Ett utmanande moment vid konstruktionen av uppgifterna var att säkerställa en lämplig svårighetsgrad. Det fanns en medveten risk att en del uppgifter skulle upplevas enkla för vissa elever, medan andra skulle uppleva dem svåra. Ett aktivt didaktiskt val var därför att utforma uppgifterna så att de inte var så komplexa att eleverna inte kunde lösa dem. Syftet med uppgifterna var inte i första hand att pröva elevernas förmåga att få fram ett korrekt svar, utan möjliggöra ett undersökande av det resonemang som låg bakom deras strategival. Det centrala var således att förstå varför eleverna valde en viss strategi framför en annan.

Ett ytterligare metodologiskt övervägande gällde konstruktionen av taluppsättningarna i uppgifterna. Det fanns en risk att vissa uttryck, såsom $a + b$, inte utgjorde en tillräckligt stor utmaning för att eleverna skulle behöva överväga alternativa strategier, eller att andra, såsom $b + c$, inte kunde vara tillräckligt gynnsamma för att synliggöra en medveten strategianvändning.

Eftersom uppgifterna enbart innehöll de räknesätt där associativa lagen är giltig – det vill säga addition och multiplikation – finne det en metodologisk begränsning i att kunna

fastslå huruvida eleverna faktiskt har en djupare förståelse för begreppet associativitet. Elever som valde att omstrukturera talen enligt strategi baserat på associativitet kan ha gjort det utifrån en proceduriell kunskap snarare än en begreppslig förståelse för när lagen är tillämpbar.

Ifall uppgifterna inkluderat operationer där associativitet inte gäller, såsom subtraktion, skulle det i en högre grad ha varit möjligt att urskilja om eleverna kan avgöra när det är matematiskt korrekt att tillämpa lagen. Till exempel ger uttrycket $10 - 4 - 2$ olika värden ifall du beräknar den på olika sätt, $10 - (4 - 2) = 8$ och det korrekta sättet $(10 - 4) - 2 = 4$ vilket tydligt visar att associativitet inte är tillämpbart på subtraktion och på sådant sätt prövar elevernas förståelse av associativitet. Uppgifterna kan med det inte synliggöra elevernas förståelse utan bekräfta användandet av strategin.

6.2.3 Uppföljande samtal

En begränsning i denna studie är att de individuella uppföljande samtalen med eleverna var förhållandevis korta, cirka 3–5 minuter per elev. Den begränsade samtalstiden berodde främst på det övergripande tidsschemat för datainsamlingen, där både arbetsblad och samtal skulle genomföras under en lektion. Den korta tiden samtalen fick kan ha påverkat resultatets djup, då möjligheten till följdfrågor, fördjupning och utforskning av resonemang minskade. Valet som togs var att i stället för att få 3 längre intervjuer, alltså en från varje kategori, kunde fler elever från varje kategori få möjlighet att bli representerade.

Syftet med samtalen var att belysa elevernas egna resonemang kring hur de genomförde sina beräkningar, om de vanligtvis använder en viss strategi samt om de kunde identifiera alternativa strategier för att lösa uppgifterna. Även om varje elev genomförde tolv uppgifter, vilket i sig inte krävde en längre tid, visade det sig att eleverna ofta använde samma strategi genom hela arbetsbladet och sällan bytte strategier anpassade efter uppgiften. Detta innebar att samtalen ibland blev repetitiva snarare än fördjupande och att eleverna inte hade något riktigt svar på varför de använde samma strategi än att det var så de brukade lösa uppgifter.

Ur ett metodologiskt perspektiv bör det övervägas att flera eller längre samtal hade kunnat genomföras för att öka studiens reliabilitet. Genom att intervjua eleverna vid fler

än ett tillfälle, eller genom att i större utsträckning möjliggöra utforskande samtal, hade resultatet potentiellt kunnat bli mer nyanserat. Detta sätt hade också gett ett rikare underlag att analysera elevernas strategimedvetenhet och förståelse för olika sätt att ta sig an uppgifterna på.

En vidare diskussion kring metodvalet är därför relevant. Även om samtalen i kombination med arbetsbladen möjliggjorde en viss triangulering av data, innebar den korta samtalstiden att fördjupad förståelse delvis uteblev. För framtida studier med likande syfte skulle ett alternativ kunna vara att prioritera längre eller upprepande samtal med färre elever, för att på så vis kunna införskaffa mer omfattade och tillförlitliga data. Ett annat

6.3 Framtida forskning

För framtida studier med liknande syfte skulle ett alternativ kunna vara att prioritera längre eller upprepade samtal med färre elever, för att på så vis erhålla mer omfattade och tillförlitliga data.

Ett annat sätt att få mer data hade varit genom en bredare insamling av data där fler årskurser skulle inkluderas för att se ifall det sker en utveckling mellan årskurserna på användandet av strategier och resonemang. Detta skulle kunna ge en översikt på hur utveckling kan ske mellan årskurser på en skola eller elever från ett område.

Referenser

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(3), 179–202. https://doi.org/10.2307/748348

Dubé, A. K. (2014). Adolescents' understanding of inversion and associativity. Learning and Individual Differences, 36, 49–59. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2014.09.002

Dubé, A. K; Robinson, Katherine M. (2018). British journal of developmental psychology, 2018- 06, Vol.36 (2), p.206–219. https://doi.org/10.1111/bjdp.12217

Dubé, A. K., & Robinson, K. M. (2010). The relationship between adults' conceptual understanding of inversion and associativity. Canadian Journal of Experimental Psychology, 64(1), 60–66. https://doi.org/10.1037/a0017756

Eaves, J., Attridge, N., & Gilmore, C. (2019). Increasing the use of conceptually-derived strategies in arithmetic: using inversion problems to promote the use of associativity shortcuts. Learning and Instruction, 61, 84–98. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.01.004

Eaves, J., Attridge, N., & Gilmore, C. (2022). The role of domain-general and domainspecific skills in the identification of arithmetic strategies. Journal of Numerical Cognition, 8(3), 335– 350. https://doi.org/10.5964/jnc.7459

Eaves, J., Gilmore, C., & Attridge, N. (2021). Conceptual knowledge of the associativity principle: A review of literature and an agenda for future research. Trends in Neurosciece and Education, 23, 100152. https://doi.org/10.1016/j.tine.2021.100152

Kiselman, C.O. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. (1. uppl.) Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. Educational Studies in Mathemathics, 40, 173-196.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology*, *93*(2), 346–362. https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.346
Robinson, K. M., Price, J. A. B., & Demyen, B. (2018). Understanding arithmetic

concepts: Does operation matter? Journal of Experimental Child Psychology, 166, 421–436. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2017.09.003

Robinson, K. M., Dubé, A. K., & Beatch, J.-A. (2017). Children's understanding of additive concepts. Journal of Experimental Child Psychology, 156, 16–28. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.11.009

Robinson, Katherine M., Dubé, Adam K., Beatch, Jacqueline-Ann (2017). Understandning arithmetic concepts: Does operation matter? Journal of experimental child psychology, 2017-04, Vol.156, p.16-28 https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.11.009

Robinson, K. M., Dubé, A. K., & Beatch, J.-A. (2016). Children's multiplication and division shortcuts: Increasing shortcut use depends on how the shortcuts are evaluated. Learning and Individual Differences, 49, 297–304. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.06.014

Robinson, K. M., Dubé, Adam K. (2012). Children's use of Arithmetic Shortcuts: The Role of attitudes in strategy choice. Child development research, 2012-10, Vol.2012, p.1-10 https://doi.org/10.1155/2012/459385

Robinson, K. M., & Dubé, A. K. (2013). Children's additive concepts: Promoting understanding and the role of inhibition. Learning and Individual Differences, 23(1), 101–107. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2012.07.016

Robinson, K. M., Ninowski, J. E., & Gray, M. L. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. Journal of Experimental Child Psychology, 94(4), 349–362. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2006.03.004

Schifter, D. (1999). Reasoning about Operations: Early Algebraic Thinking in Grades K6. I L.V. Stiff., & F.R. Curcio (Red.), Developing Mathematical Reasoning in Grades K12 (s. 62-81). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Siegler, R. S. (1988). Individual differences in strategy choices: Good students, not-sogood students, and perfectionists. In R. Siegler (Ed.), *Children's thinking: What develops?* (pp. 277–304). Lawrence Erlbaum Associates.

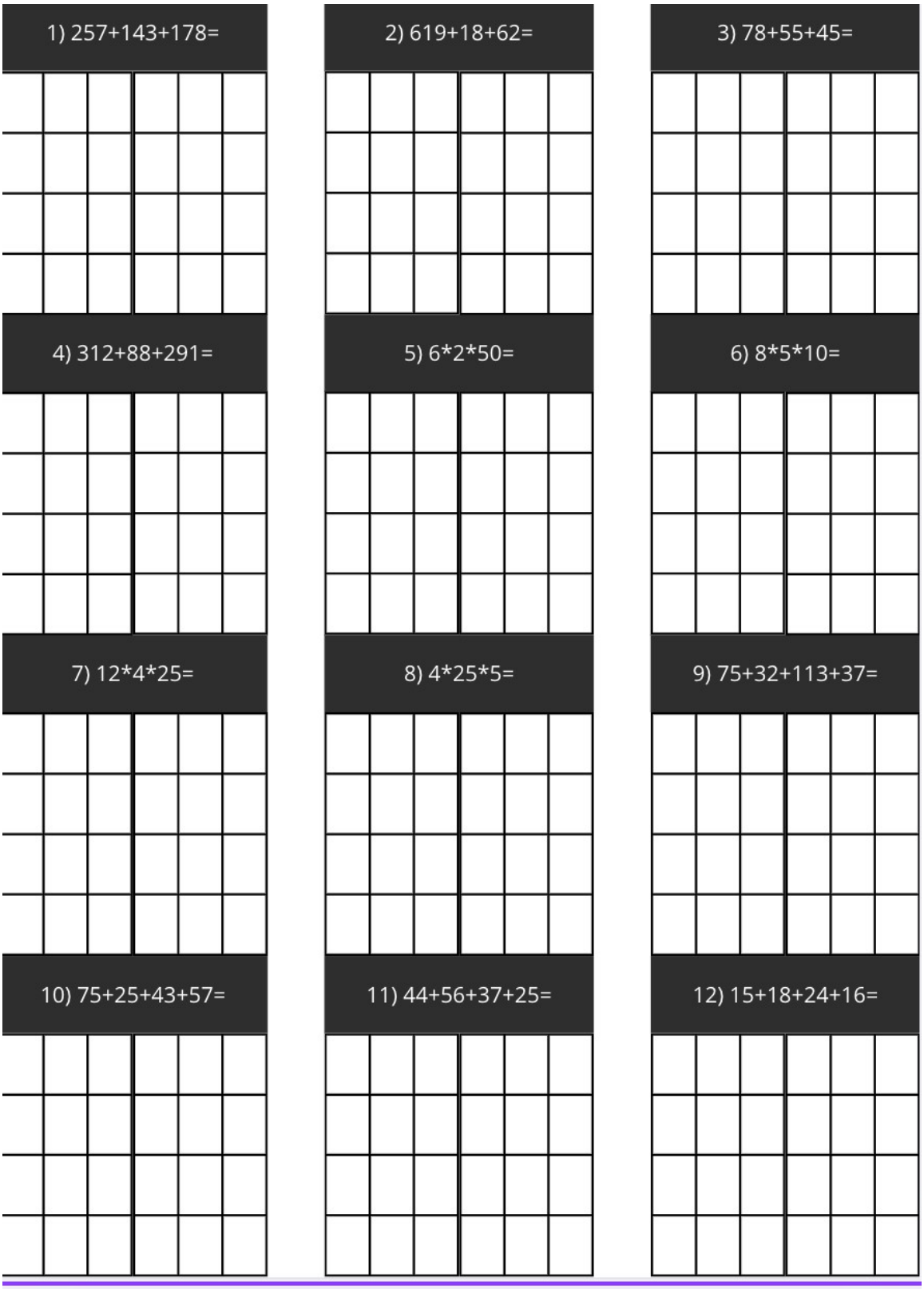
Tent, M. W. (2006). Understanding the Properties of Arithmetic: A Prerequisite for Success in Algebra. Mathematics Teaching in the Middle School, 12(1), 22–25. http://www.jstor.org/stable/41164018

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), 29–47. https://doi.org/10.1023/A:1020522201217

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. Mathematics Education Research Journal, 15(2), 122–137. https://doi.org/10.1007/BF03217374

Bilagor

Bilaga 1 arbetsbladet deltagarna genomförde



Bilaga 2 Samtyckesblankett

Hej!

Jag studerar till grundlärare för mellanstadiet och ska nu skriva mitt examensarbete. Temat för mitt examensarbete är att utforska elevers tillvägagångsätt att göra aritmetiska uppgifter.
Jag önskar att bjuda in ditt barn att delta i min studie som en del av mitt examensarbete. Inom ramen för studien kommer deltagande elever att genomföra ett arbetsblad, vilket sedan kommer att samlas in för vidare analys. Ett urval av elever kommer att intervjuas utifrån hur de svarat på arbetsbladet. Intervjun kommer spelas in för att säkerställa att elevens svar tolkas rätt. Samtliga arbetsblad och intervjuer kommer att anonymiseras och, om de inkluderas i mitt examensarbete, kommer inga personuppgifter eller identifierbara uppgifter om deltagarna att framgå. Dessutom kommer namnet på skolan inte att nämnas i studien. Syftet med denna anonymisering är att säkerställa deltagarnas konfidentialitet och integritet.
Allt material kommer att hanteras konfidentiellt. Materialet kommer bara att användas i examensarbetet vid godkännande av fråga 1 nedan. Vid godkännande av fråga 2 nedan kan materialet därutöver komma att användas i forskningssyfte.

Deltagandet är frivilligt och du/ni har rätt att avbryta ditt/ert barns deltagande när som helst, utan att ange någon anledning och utan att det leder till några konsekvenser för ditt barn. Om du/ni har frågor om studien, hör gärna av dig/er till mig.

Hälsningar

Pontus Meijer

Kontaktuppgifter

Mail: Mepo20gq@student.ju.se

Genom att skriva under här nedanför intygar du att du tagit del av informationen ovan.

1. *Godkänner du att ditt barn deltar i studien?*

☐ *Ja, jag godkänner att mitt barn deltar i studien för examensarbetet och att mitt barns personuppgifter behandlas för utbildningsändamål i examensarbetet. Nej, jag vill inte att mitt barn deltar i studien för examensarbetet.*

2. *Om ditt barn får delta i studien, godkänner du att ditt barns personuppgifter behandlas för eventuella forskningsändamål?*

☐ *Ja, jag godkänner att mitt barns personuppgifter även får behandlas för forskningsändamål.*

☐ *Nej, jag vill inte att mitt barns personuppgifter behandlas för forskningsändamål.*

Barnets namn:

_____

Vårdnadshavares namnteckning: Namnförtydligande:

_____ _____

Bilaga 3 Frågor till de uppföljande samtalen:

Kan du förklara hur du löste denna uppgift. (i olika varianter)

Följdfrågor:

Skulle du kunna lösa uppgiften på ett annat sätt?

Brukar du lösa uppgifter på det här sättet?

Kan du förklara vad du menar med … (och vad som då var otydligt eller behövde fördjupas av elevens utsaga)