



JÖNKÖPING UNIVERSITY

*School of Education and
Communication*

Multiplikativt resonemang

En litteraturstudie om hur ett multiplikativt resonemang utvecklas av elever i tidiga skolår.

KURS	<i>Examensarbete 1 för grundlärare F-3, 15 hp</i>
PROGRAM	<i>Grundlärarprogrammet med inriktning mot arbete i förskoleklass och grundskolans årskurs 1-3</i>
FÖRFATTARE	<i>Elin Isaksson, Nora Öman</i>
EXAMINATOR	<i>Jesper Boesen</i>
TERMIN	VT 25

SAMMANFATTNING

Elin Isaksson, Nora Öman

Multiplikativt resonemang- En litteraturstudie om hur ett multiplikativt resonemang utvecklas av elever i tidiga skolår.

Multiplicative reasoning- A literature study on how a multiplicative reasoning is developed by students in early school years.

Antal sidor: 26

Utvecklingen av ett multiplikativt resonemang är grundläggande för fortsatt lärande inom mer avancerad matematik. Trots detta visar nationella proven att den här kunskapen har försämrats de tre senaste åren. Litteraturstudiens syfte är därför att undersöka hur elever i tidiga skolår närmar sig multiplikativa uppgifter. Syftet besvaras genom följande forskningsfrågor: vad kännetecknar ett multiplikativt resonemang och hur utvecklas ett multiplikativt tänkande? Studien innehåller artiklar från internationella forskare och har samlats in genom två databaser. Artiklarna har analyserats genom en översiktstabell och färgkodats. Resultatet påvisar hur viktigt det är att eleverna ska få utgå från sina egna kunskaper innan formell undervisning ges inom multiplikation. Resultatet visade också att om ett proportionellt samband ska kunna utvecklas måste eleverna ha en förtrogenhet för det additiva sambandet.

Nyckelord: Multiplikativt resonemang, additivt resonemang, multiplikativt tänkande, tidiga skolåren

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
2. Syfte och frågeställningar	2
3. Bakgrund.....	3
3.1 Teoretiskt perspektiv	3
3.2 Additivt tänkande	4
3.3 Multiplikativt tänkande	5
3.4 Sambandet mellan räknesätten	5
3.5 Matematiskt resonemang	6
4. Metod	7
4.1 Informationssökning	7
4.2 Urvalskriterier	8
4.2.1 Kriterier för inklusion	8
4.2.2 Kriterier för exklusion	9
4.3 Materialanalys	9
5. Resultat	12
5.1 Vad kännetecknar ett multiplikativt resonemang?.....	12
5.1.1 Lika stora grupper.....	12
5.1.2 Proportionellt samband	13
5.1.3 Använda räknelagar	14
5.2. Hur utvecklas ett multiplikativt tänkande?	15
5.2.1 Från additivt till multiplikativt.....	15
5.2.2 Elevers informella multiplikativa resonemang	17
6. Diskussion.....	18
6.1 Metoddiskussion	18
6.2 Resultatdiskussion.....	19
6.3 Vidare forskning	21

Referenslista	23
Bilagor	1

1. Inledning

Karlsson och Kilborn (2016, s. 20–23) belyser olika perspektiv på hur den matematiska operationen multiplikation kan uppfattas av elever. Forskarna ifrågasätter om det är viktigare att memorera multiplikationstabeller som en inövad färdighet snarare än att utveckla en djupare förståelse för operationens betydelse och dess praktiska användning i vardagen. Det diskuteras även att en automatiserad multiplikationstabell inte nödvändigtvis innebär en förståelse för multiplikationens grundstruktur.

Under de senaste tre åren har Sveriges resultat i årskurs tre försämrats på ett delprov i matematik från de nationella proven. Delprovet fokuserar på lösning av problem där eleverna får chansen att visa sin förståelse för begrepp, metoder, problemlösning och kommunikation (Severyd & Ingmarsdotter Lundmark, 2022; Severyd & Ingmarsdotter Lundmark, 2023; Severyd & Ingmarsdotter Lundmark, 2024). Kommentarmaterialet i matematik (Skolverket, 2022, s. 6) yrkar på att eleverna ska få se samband mellan olika begrepp och bli förtrogna till relationen mellan addition och multiplikation. I läroplanen i grundskolan (Skolverket, 2024, s. 7) framhävs det att alla elever ska få goda förberedelser till att leva och engagera sig i samhället. Det är därför av största vikt att studera hur elever i tidiga skolåldern närmar sig multiplikativa uppgifter. Ett multiplikativt tänkande är grunden till ett algebraiskt tänkande, vilket är fördelaktigt för att förstå och lösa mer komplexa problem i fortsatt matematikundervisning. Dessutom är det nödvändigt för problemlösning i vardagen (Xie & Cai, 2022, s. 1177).

Informationssökningen gjordes i databaserna PsycInfo och *Education Resource Information Center* (ERIC) som inriktar sig på utbildningslitteratur inom socialt arbete och pedagogik, vilket är relevant i denna litteraturstudie. Litteraturstudien har sammanställt totalt 11 artiklar från olika länder för att få ett objektiva perspektiv på matematikundervisning, med inriktning på multiplikation. Forskningen diskuterar vad som kännetecknar ett multiplikativt resonemang och hur ett multiplikativt tänkande utvecklas. Litteraturstudien skulle därför kunna bidra till en ökad förståelse för hur multiplikation uppfattas av elever i tidigare skolår.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att granska hur elever i tidigare skolår närmar sig multiplikativa uppgifter enligt matematikdidaktisk forskning. Det avser vi att uppfylla genom följande forskningsfrågor:

1. Vad kännetecknar ett multiplikativt resonemang?
2. Hur utvecklas ett multiplikativt tänkande?

3. Bakgrund

I följande avsnitt presenteras tidigare forskning om elevers schemabildning samt hur både formella och informella metoder påverkar elevernas inläring av matematik. Fortsättningsvis redogörs begreppen *additivt tänkande* och *multiplikativt tänkande* och hur räknesätten samspelar med varandra enligt rådande läroplan i grundskolan samt tidigare forskning.

3.1 Teoretiskt perspektiv

I tidigare forskning belyser Steffe (1994) att elever utvecklar metoder för att lösa matematiska problem. Metoderna är individuella och baseras på tidigare erfarenheter, däremot är de föränderliga eftersom eleverna ständigt utvecklas och får nya erfarenheter (s. 8). Mäniskor besitter något som kallas scheman. De beskrivs som centrala enheter i elevernas lärande samt förståelse för matematik och identifieras som mentala strukturer för att organisera, tolka och bearbeta information (Steffe, 1994, s. 9). Ett schema sägs ha tre delar. Den första delen är en utlösande situation, en specifik uppgift som kräver en matematisk lösning. Den andra delen är elevens handling som svar på den utlösande situationen. Det kan exempelvis involvera metoder som används i syfte att nå ett resultat. Den tredje delen resulterar i effekten av handlingarna på den utlösande situationen. Det är hur eleven uppfattar slutresultatet efter att ha genomfört aktiviteten (s. 7). Vidare menar Steffe (1994) att lärare bör kunna identifiera elevernas schema för att möjliggöra en undervisning inom den proximala utvecklingszonen. Det beskrivs som fördelaktigt eftersom elevernas intuitiva metoder ligger till grunden för en djupare matematisk förståelse (s. 32). Påståendet stärks av Steffe (1992) som menar att läraren begränsar elevernas lärande och beskriver undervisningstillfällen som observationsdata. Forskaren lärde sig av eleverna vilka scheman de kunde etablera och vilka begränsningar som fanns istället för att följa en förutbestämd metod (s. 262).

Steffe (1994) belyser att främja elevernas lärande inom formella matematiska metoder är väsentligt för elevernas utveckling. Det innebär att läraren bör ha förståelse för vilka metoder eleverna använder samt att kunna ge stöd i att se sambandet mellan elevernas informella resonemang och skolans formella undervisning. Det beskrivs som fördelaktigt för eleverna att synliggöra hur informella metoder kan bli begränsade i en lösningsprocess (s. 5). Fortsättningsvis beskriver Steffe (1994) att den huvudsakliga uppgiften initialt inte är att ge eleverna det "korrekta" sättet att lösa uppgifter på. Utan istället vägleda dem till att

utforska olika sätt för att nå målet i en lösningsprocess. Denna vägledning måste utgå från moment som eleven kan relatera till och för att identifiera dessa utgångspunkter är det essentiellt att få insikt i elevens begreppsstrukturer och metoder, oavsett hur ovanliga eller ineffektiva de kan framstå (s. 6). Steffe och Cobb (1998) menar dessutom att elever tolkar matematiska problem utifrån sina erfarenheter och applicerar tidigare kunskap för att försöka lösa dem (s. 49). Det primära fokuset för forskningen grundas på dessa överväganden och indikerar därför till att etablera en modell av elevens ursprungliga samt informella tillvägagångssätt för att multiplicera (Steffe, 1994, s. 6).

3.2 Additivt tänkande

För att utveckla en förståelse för sambandet mellan addition och uppräkningskrävs det att en elev genomgår flera olika stadier innan den är nådd (McIntosh, 2020, s. 61). Forskaren menar att de formella symbolerna bör introduceras efter att eleverna har fått laborera med olika typer av material. Fortsättningsvis beskrivs elevens olika stadier för att framgångsrikt beräkna operationen $3+7$. I det första stadiet behöver eleven räkna med exempelvis klossar. Det beskrivs att de tre första klossarna räknas, sedan resterande sju och därefter alla klossar tillsammans igen. Nästa steg innefattar att eleven nu har lärt sig att de tre första klossarna inte behöver räknas från början utan kan istället börja räkna vidare från tre. Slutligen kan eleven effektivisera räkningen genom att börja räkna från sju och lägga till tre (McIntosh, 2020, s. 61–62). Inom det additiva sambandet beskriver dessutom Kaufman (2018, s. 101) att enskilda enheter räknas separat. Forskaren tar upp exemplet: $5+5+5$, där det additiva tänkandet beskrivs som att varje femma är en enskild enhet och läggs till en i taget. Exempelvis: först har vi en 5:a, sedan adderar vi ytterligare en 5:a vilket ger 10. Sist adderar vi ännu en 5:a vilket resulterar i 15. Varje femma hanteras separat och grupperna ses inte som en helhet (s. 101). Däremot tillägger Larsson (2016) att elever kan ha förståelse för multiplikation, trots ett additivt skriftligt uttryck. Forskaren menar att elevens muntliga resonemang skulle kunna komplettera det eleven inte har förmåga att uttrycka i skrift (s. 84–85). Larsson (2015) betonar dessutom vikten av att hålla sig till samma storhet vid addition och nämner exemplet äpplen och kronor. Ett konkret exempel är ett köp av äpplen, där vi kan addera ett antal äpplen med andra äpplen eller kronor med kronor, men inte blanda olika storheter (s. 9).

3.3 Multiplikativt tänkande

Utifrån ett multiplikativt tänkande beskriver Kaufman (2018) att ännu en enhet adderas till exemplet $5+5+5$. Forskaren nämner då att exemplet beskriver 3 elever som har 5 böcker var, där 3 representerar antalet grupper och 5 representerar antalet böcker varje elev har. De elever som behärskar ett multiplikativt tänkande ser relationen mellan elev och böcker som en enhet. Till skillnad från det additiva tänkandet där varje 5:a ses som separat (s. 101). Kaufman (2018) menar för att förstå multiplikation krävs det att se sambandet mellan två enheter. En så kallad en-till-många-korrespondens innebär enligt forskaren förståelsen för att 5 böcker läggs till på varje elev. Det är inte endast antalet elever som förändras utan också antalet böcker, vilket innebär att två olika enheter påverkas samtidigt (s. 101). Larsson (2015) tillägger och utvecklar sitt föregående exempel. Om vi köper 3 äpplen och varje äpple kostar 5 kr, blir den totala kostnaden 15 kr. Detta beräknas genom att multiplicera antalet äpplen (3) med priset per äpple (5 kr/äpple), vilket ger 15 kr. Multiplikation skiljer sig från addition eftersom den kan hantera flera olika storheter samtidigt (s. 9). Heiberg Solem et al. (2022) poängterar att elever bör få hjälp med att räkna i enheter. Författarna menar att det är framgångsrikt att inte behöva räkna varje enskilt objekt utan ha förmågan att se en grupp som en enhet (s. 176–177).

3.4 Sambandet mellan räknesätten

I kommentarmaterialet *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik – grundskolan* beskrivs förmågan att tillämpa och redogöra för matematiska begrepp samt deras samband, vilket innebär att eleven inte enbart ska kunna identifiera och använda matematiska begrepp utan även förklara hur de relaterar till varandra. Bedömningen fokuserar på hur väl eleven kan visa förståelse för begreppen och relationen mellan dem (Skolverket, 2022, s. 32).

Kopplingen mellan kommentarmaterialet, läroplanen och studiens syfte blir tydlig genom vikten av att förstå matematiska begrepp och deras samband. Multiplikation är ett av de fyra räknesätten, och enligt *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet* [Lgr22] (2024) ska eleverna utveckla förståelse för dess egenskaper och relation till övriga räknesätt. Kommentarmaterialet betonar att denna förståelse byggs upp genom progression, där eleverna först möter multiplikation i ett begränsat talområde och sedan utvidgar sina metoder (s. 13–14). Detta knyter an till studiens syfte, som är att undersöka hur elever

i den tidiga skolåldern närmar sig multiplikativa uppgifter, samt till forskningsfrågorna om multiplikativt resonemang och tänkande.

I enlighet med rådande läroplan (Skolverket, 2024) tillägger även Young-Loveridge (2005) att både multiplikation och addition har liknande egenskaper. Inte nog med att multiplikation också kan ses som upprepad addition, räknesätten är även kommutativa vilket betyder att ordningen på talen inte påverkar resultatet: $a+b = b+a$ och $a \times b = b \times a$ (s. 37). Dessutom följer de båda den associativa lagen: $a + (b+c) = (a+ b) + c$ och distributiva lagen: $a (b+c) = ab + ac$, vilket visar hur de två operationerna kan samverka för att förenkla beräkningar (s. 37). Xie och Cai (2022) tillägger att förståelsen för hur räknesätten samverkar är av största vikt för att få en djupare algebraisk förståelse eftersom addition används för att lösa en okänd variabel i en ekvation och multiplikation för att isolera variablerna. Båda räknesätten är då nödvändiga för att ha goda förutsättningar att utveckla sina kunskaper i kommande matematikundervisning (s. 1177).

3.5 Matematiskt resonemang

Enligt grundskolans läroplan (Skolverket, 2024) ska eleverna utveckla förmågan att följa samt föra matematiska resonemang (s. 55). Häggblom (2021) beskriver att elever som kan argumentera för eller beskriva sin lösningsprocess har en resonemangsförmåga. Det beskrivs fördelaktigt på flera sätt, dels får eleverna tillfälle att reflektera över sina tankar och lösningar, dels utvecklas deras matematiska språk (s. 198). När ett muntligt resonemang ges skapar det en god möjlighet för eleven att upptäcka eventuella fel och får då ett tillfälle att tänka om (s. 197). Dessutom betonar forskaren att läraren bör skapa goda förutsättningar för att få eleverna att resonera om matematik, exempelvis genom att ta del av olika typer av lösningar och jämföra dem med varandra (s. 197). Ball och Bass (2003) tillägger att ett matematiskt resonemang inte bara används för att redogöra för kunskap eleven redan besitter utan används också för att ta reda på ny kunskap. Forskarna menar att för att förstå något och kunna tillämpa det i olika sammanhang är resonemang nödvändigt (s. 29). Där emot poängterar Häggblom (2018) vikten av att också utveckla ett skriftligt matematiskt resonemang eftersom alla uppgifter inte kan redovisas muntligt. Det är visserligen viktigt att eleven kan uttrycka sig muntligt, men hen bör även kunna använda olika typer av representationsformer (s. 198).

4. Metod

Under följande rubriker beskrivs det hur informationssökningen har genomförts samt vilka databaser och sökord som har använts. Urvalsprocessen samt materialanalysen kommer även redogöras.

4.1 Informationssökning

Informationssökningen utfördes genom databaserna PsycInfo och Education Resource Information Center (ERIC). PsycInfo är en internationell databas där vetenskapliga tidskrifter, avhandlingar och rapporter finns att tillgå inom bland annat utbildning och socialt arbete. ERIC är en databas med fokus på utbildningslitteratur inom psykologi och pedagogik. Inledningsvis genomfördes olika sökningar på Jönköping University's söktjänst Primo för att uppmärksamma relevanta termer som stärker syftet med denna litteraturstudie. Genom testsökningarna noterades ett antal begrepp och fraser som senare användes i de systematiska sökningarna.

Den första sökningen gjordes i PsycInfo's avancerade sökfält och riktade sig mot studiens första forskningsfråga om vad som kännetecknar ett multiplikativt resonemang. Det första sökblocket innehöll fraserna: "*multiplicative reason**" OR "*multiplicative think**" OR "*multiplicative structur**" AND "*early childhood mathematic**" OR "*primary school*" OR "*early childhood*" OR "*early mathematic**" OR "*elementary school*". Booleska operationer och trunkeringar användes för att utöka sökningarna i PsycInfo, dessutom användes citationstecken för att visa samhörigheten mellan begreppen. I sökningen markerades *peer reviewed* eftersom endast vetenskapligt granskade artiklar var önskade i studien. Sökningen gav 30 träffar. Ingen avgränsning gjordes då samtliga artiklar var *scholarly journals*.

Den andra sökningen genomfördes i ERIC med samma sökord som ovan då vi behövde komplettera med fler artiklar. Sökningen gjordes i *advance search* och innehöll de exakta booleska operationerna och trunkeringar som innan. *Peer reviewed* var markerad och gav 95 träffar. En avgränsning med *scholarly journals* gjordes och gav 80 träffar.

Den tredje sökningen gjordes också genom databasen ERIC. Även där användes booleska operationer, trunkeringar och citationstecken. Under denna sökning användes termer som

ansågs vara relevanta för den andra forskningsfrågan som berör hur ett multiplikativt tänkande utvecklas. Det andra sökblocket innehöll följande termer: “*early childhood*” OR “*early childhood mathematic**” OR “*primary school*” AND “*repeated addition*” OR “*multiplicative*” vilket gav 54 träffar. Efter avgränsningen *peer reviewed* resulterade det i 41 träffar. Den sista avgränsningen gjordes genom att markera *scholarly journals*, vilket resulterade i 38 träffar.

I litteraturstudien har en kedjesökning gjorts på de valda referenserna för att hitta ytterligare forskning som handlar om vad som kännetecknar ett multiplikativt resonemang, vilket gav en artikel. Sökningarna resulterade i totalt 148 träffar (se Bilaga 2). Alla artiklar lades in i ett dokument för att få en överblick över det insamlade materialet. De artiklar som valdes ut till studien färgmarkeras i lila. Genom dokumentet synliggjordes även dubbletterna, de färgmarkerades i gult. Översikten säkerhetsställde att träffarna på varje sökning stämde överens med angiven beskrivning samt synliggjorde antalet dubbletter utan att utelämna någon. Efter exkluderingen av dubbletter var antalet artiklar 117 stycken, av dessa artiklar var det 26 styckna där titeln och abstract lästes (se Bilaga 2). Eftersom litteraturstudien endast innehåller befintlig forskning och inte innefattar en egen insamling av empirisk data, har inga forskningsetiska risker förekommit. Däremot har vi upprätthållit ett etiskt förhållningssätt under studien, exempelvis genom att vara transparenta gällande urval av forskning. Forskningen är relevansgranskad och är opartiskt presenterade i resultatet. Slutligen har Artificiell intelligens (AI) använts som ett översättningsverktyg där översättningarna kritiskt har granskats utifrån relevans och korrekthet.

4.2 Urvalskriterier

I följande avsnitt presenteras litteraturstudiens kriterier för inklusion och exklusion. Kriterierna skapades för att garantera att sökningarna var relevanta utifrån litteraturstudiens syfte.

4.2.1 Kriterier för inklusion

Materialet granskades med utvalda kriterier för inklusivitet. Artiklarna skulle handla om skolans tidigare åldrar vilket är i enlighet med vårt syfte. De skulle dessutom redogöra för hur eleverna närmar sig multiplikativa uppgifter samt vad som kännetecknar ett multiplikativt resonemang och tänkande. Endast granskade artiklar var relevanta i litteraturstudien och därför var kravet för inklusion att de skulle vara *peer reviewed*.

4.2.2 Kriterier för exklusion

Materialet granskades i enlighet med utvalda kriterier för exklusion. De artiklar som inte inkluderade tidiga skolår sorterades bort eftersom syftet med studien riktar sig mot detta. Artiklar som dessutom fokuserade utifrån ett undervisningsperspektiv inom multiplikation valdes bort då litteraturstudiens fokus riktar sig mot ett elevperspektiv. Vidare exkluderades artiklar som inte var skrivna på engelska. I tabellen nedan finns en sammanställning av alla vetenskapliga artiklar (se Tabell 1).

4.3 Materialanalys

I denna litteraturstudie har vi granskat och analyserat vetenskapliga artiklar för att identifiera och kategorisera relevant forskning inom ämnet multiplikativt resonemang och tänkande. Analysen har genomförts systematiskt enligt etablerade metoder för litteraturgranskning, där vi utgått från våra frågeställningar för att säkerställa att artiklarna bidrog till studiens syfte. De utvalda artiklarna har analyserats utifrån deras relevans i relation till forskningsfrågorna. Vid granskningen fördes anteckningar för att dokumentera centrala tankar och varje artikel analyserades för att säkerställa att den besvarade någon av forskningsfrågorna. Därefter jämfördes och diskuterades artiklarna för att hitta likheter och skillnader för att kunna kategorisera dem utefter teman, vilket är i enlighet med Nilholms resonemang om att skapa tydlighet över den forskning som valts ut (2017, s. 78).

Tabell 1 innehåller en sammanställning av alla vetenskapliga artiklar som använts i resultatdelen. För att strukturera materialet sammanställdes en översiktstabell (se Bilaga 3), där artiklarnas syfte, datainsamlingsmetoder, författare, resultat och koppling till våra forskningsfrågor dokumenterades. Utifrån denna tabell kunde fem huvudsakliga teman urskiljas. För att säkerställa att analysen var enhetlig och systematisk användes både översiktstabellen (se Bilaga 3) och färgkodning i ett kompletterande dokument där artiklarna jämfördes. Artiklarna jämfördes för att hitta likheter eller skillnader och kategoriserades utefter teman. De genomgående ämnen som uppstod färgkodades i dokumentet för att enkelt kunna få en överblick över potentiella teman i resultatet. Jämförelsen utfördes utifrån följande rubriker: syfte, där vi undersökte artikelns huvudsakliga forskningsmål; multiplikation, där vi analyserade hur detta begrepp definieras och beskrivs; samband mellan additiva och multiplikativa tänkande, där vi undersökte vilka kopplingar som gjordes mellan dessa matematiska begrepp; samt resultat, där vi granskade vilka huvudsakliga resultat som

presenterades i studien. Sammanställningen och analysen av artiklarna har gett en tydlig överblick över forskningen inom området.

Tabell 1

Tabellen visar vilka vetenskapliga artiklar som har använts i litteraturstudien

Författare	Titel	Årtal	Land
Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W.	<i>Beyond additive and multiplicative reasoning abilities: how preference enters the picture</i>	2018	Belgien
Tobias, J.M., & Andreasen, J.B.	<i>Developing Multiplicative Thinking from Additive Reasoning</i>	2013	USA
Bakker, M., van de Heuvel-Pan- huizen, M., & Robitzch, A.	<i>First-graders knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain</i>	2014	Nederländerna
Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaf- fel, L.	<i>From Addition to Multication ... and Back: The Development of Students` Additive and Multiplicative Reasoning Skills</i>	2010	Spanien
Clark, F. B., & Kamii, C.	<i>Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5</i>	1996	USA
Cartwright, K.	<i>Interpreting young childrens multiplicative strategies through their drawn representations.</i>	2023	Australien
Cheeseman, J., et al.	<i>Investigating young students` multiplicative thinking: The 12 little ducks problem.</i>	2020	Australien
Cheeseman, J., et al	<i>Meeting multiplicative thinking through thought-provoking tasks</i>	2022	Australien
Askew, M., et al	<i>Multiplicative reasoning: an intervention`s impact on Foundation Phase learners` understanding</i>	2019	Sydafrika
Kaufman, O-T.	<i>Students Reasoning on Multiplication in the Context of Primary School Classroom.</i>	2019	Norge
Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W.	<i>The role of relational preference in early proportional reasoning</i>	2022	Belgien

5. Resultat

I följande avsnitt presenteras resultatet utifrån litteraturstudiens syfte och forskningsfrågor. Resultaten är uppdelat i två delar där den första delen, utifrån matematikdidaktisk forskning, beskriver vad som kännetecknar ett multiplikativt resonemang. Den andra delen i resultatet beskriver hur ett multiplikativt tänkande utvecklas enligt forskning.

5.1 Vad kännetecknar ett multiplikativt resonemang?

Forskning visar att multiplikativt resonemang innebär att förstå lika grupper, proportionella samband och användning av räknelagar (Askew et al., 2019; Cartwright, 2022; Cheeseman et al., 2020; Cheeseman et al., 2022; Kaufman, 2019).

5.1.1 Lika stora grupper

Det som kännetecknar ett multiplikativt resonemang enligt flera studier (Cartwright, 2022, s. 373; Cheeseman et al., 2020, s. 13; Cheeseman et al., 2022, s. 805) är förmågan att bilda lika stora grupper. Forskarna beskriver att elevernas taluppfattning ligger till grunden för skapandet av lika stora grupper.

I en australiensk studie (Cheeseman et al., 2022, s. 801–803) beskrivs en aktivitet där eleverna tillsammans skulle bilda lika stora grupper av ett angivet tal som läraren bestämmer. Anges talet 4 ska då eleverna bilda fyra lika stora grupper, blir det rest går de berörda fram till läraren och får bestämma ett nytt tal. En elev förstod då att alla tal inte kunde delas in i lika stora grupper och gav förslaget att dela in sina 20 klasskamrater i 7 grupper. Eleven hade räknat ut att 7 inte är en multipel till 20 och visste därmed att det skulle bli rest. Aktiviteten främjade möjligheten att se grundstrukturen för multiplikation då fokuset var att se lika stora grupper som en enhet och inte de enskilda personerna i gruppen (Cheeseman et al., 2022, s. 801–803). Liknande resultat återfinns i Cartwright's studie (2022) där eleverna genom sina teckningar visar att de räknar med multiplar. Denna metod gör det möjligt för eleverna att organisera sina tankar och visualisera problem som involverar multiplikation. När eleverna skapar ritningar med tydliga markeringar för hur många enheter som finns i varje grupp, visar det på deras förståelse av struktur och organisation i multiplikativa uppgifter (s. 384). Vidare belyser en av studierna (Cheeseman et al., 2022) att förståelsen för lika stora grupper grundar sig i att ha en grundläggande taluppfattning eftersom det ger goda förutsättningar till att se sambandet mellan tal och grupperingar. Det

beror på att en god taluppfattning kan hjälpa eleverna att uppfatta sambandet mellan individuella tal och hur de kan organiseras i grupper (s. 809).

Elevernas hantering av lika stora grupper beskrivs vidare av ytterligare två australiensiska studier (Cartwright, 2022, s. 383; Cheeseman et al., 2020, s. 5–7) där resultaten visar att det finns elever som kan dela in objekt i lika stora grupper, men upplevs ha svårighet för att se och förstå sambandet mellan grupperna. Cheeseman et al. (2020) undersökte detta genom en uppgift där elever i åldern 5–6 år fick rita lika stora grupper av 12 ankor på så många sätt som möjligt. Resultatet visade att vissa elever kunde dela upp ankorna korrekt men hade svårt att identifiera och ange antalet grupper. Istället för att se mönstret av exempelvis fyra grupper med tre ankor i varje, föredrog de att räkna enskilda ankor, vilket pekar på en till viss del utvecklad förståelse för gruppindelning (s. 5–7). En liknande problematik framkom i Cartwright's (2022) studie, där elever ombads avgöra hur många djur som befann sig på ett fält utifrån att bonden hade sett 16 ben. Syftet var att undersöka om elevernas multiplikativa resonemang kunde identifieras genom teckningar. Resultaten visade att vissa elever räknade benen på ett djur tills de nådde rätt antal totalt, snarare än att se sambandet mellan grupper av djur (s. 838). Fortsättningsvis beskriver studierna (Cartwright, 2022, s. 387; Cheeseman et al., 2020, s. 14) att ett abstrakt tänkande kan synliggöras i en teckning, vilket är nödvändigt för att lösa multiplikativa problem.

5.1.2 Proportionellt samband

Enligt flera studier (Askew et al., 2019; Clark & Kamii, 1996; Van Doreen et al., 2010;) är proportionella samband en del av vad som kännetecknar ett multiplikativt resonemang. Vidare poängterar en sydafrikansk studie (Askew et al., 2019) vikten av att stärka elevernas förståelse av proportionella samband eftersom det är avgörande för att senare ha förmågan att förstå en mer komplex matematikundervisning. Forskarna menar att det är av största vikt att hjälpa elever utveckla förmågan att identifiera proportionella samband (s. 2). Askew et al. (2019) beskriver att genom tabeller (se Figur 1) uppmuntras eleven till att se relationen mellan variabler i ett tvådimensionellt format. Det beskrivs fördelaktigt eftersom eleven har möjligheten att upptäcka och identifiera relationer mellan tal. I tabellen synliggörs det att multiplikation inte handlar om upprepad addition, utan om förståelsen mellan två variabler och hur de förändras i proportion till varandra (s. 2–3). Resultatet från Van Doreen et al.'s studie (2010) tillägger att talen i en uppgift är avgörande för hur eleven kan välja att lösa problemet. När en uppgift innehåller heltal är det mer troligt att eleven

kan se det proportionella sambandet i uppgiften (s. 369). Exempelvis: en påse innehåller 4 äpplen och det finns 3 påsar, hur många äpplen finns det sammanlagt? Däremot visade resultatet att om ett rationellt tal används upplevdes det svårare för eleverna att se det proportionella sambandet och de tenderade att försöka använda andra metoder för att lösa uppgiften (s. 369). Exempelvis om heltalet 4 byts ut mot det rationella talet 4,5.

Något som forskarna (Clark & Kamii, 1996; Van Doreen et al., 2010;) däremot inte är eniga om är när ett proportionellt samband utvecklas. Clark och Kamii (1996) anser att förståelsen för ett proportionellt samband utvecklas när eleverna är mellan 7–8 år (s. 50). Vilket är intressant eftersom Van Doreen et al.'s (2010) resultat menar på att mer än hälften av deltagarna i studien, i åldern 8–9, fortfarande försöker använda sig av additiva metoder för att lösa proportionella problem (s. 370).

Figur 1: *Figur som synliggör ett proportionellt samband utifrån Askew's studie*

<u>Antalet påsar</u>	<u>Antalet äpplen</u>
1	4
3	?

5.1.3 Använda räknelagar

Forskarna menar på att elever utvecklar ett multiplikativt tänkande genom att upptäcka och förklara att multiplikation är kommutativt. Studierna visar för att utveckla ett multiplikativa resonemang behövs förståelse för att multiplikation är kommutativt (Askew, et al., 2019, s. 4; Cheeseman, et al., 2022, s. 811; Kaufman, 2019, s. 16).

Kaufman (2019) beskriver en undervisningssituation när en elev i åldern 8–9 år upptäcker att multiplikation är kommutativt. Läraren bad om en förklaring till varför blyertspenna-exemplet kunde uttryckas som 4×2 . En elev avbröt och förklarade talens betydelse i multiplikation. Samtidigt skrev läraren 2×4 på tavlan och eleven påpekade att svaret var det samma oavsett ordning, vilket visade den kommutativa lagen. Blyertspennorna användes för att illustrera vidare medan eleven klargjorde skillnaden mellan addition och multiplikation samt beskrev den kommutativa lagen med egna ord (s. 16). Det är även något som Askew et al. (2019) beskrev i sin studie, introduktionen till att multiplikation är

kommutativt är något som anses nödvändigt, men hur det introducerats kan se olika ut. Förslagen som uppkommer är att exempelvis att använda sig av olika modeller som visar egenskaperna inom kommutativitet, att ordningen på talen i en beräkning inte påverkar resultatet (s. 4). I en studie från Australien (Cheeseman et al., 2022) nämns ett annat tillfälle när elever upptäcker att multiplikation är kommutativt. Under lektionen *The 12 little ducks* noterar läraren att en elev först ritade tre grupper med fyra och sedan fyra grupper med tre. När han beskrev sin teckning upptäckte han ett mönster i siffrorna och uttryckte glatt om sin upptäckt. Eleven hade uppmärksammat en multiplikativ struktur och börjar förstå att multiplikation är kommutativt. Även om det kan ta tid innan denna insikt omvandlas till formell kunskap, var det tydligt att eleven var fascinerad av sin upptäckt (Cheeseman et al., 2022, s. 811).

5.2. Hur utvecklas ett multiplikativt tänkande?

För att utveckla ett multiplikativt tänkande menar forskning att eleverna kan gå från det additiva till det multiplikativa. Det utvecklas också genom elevernas informella multiplikativa resonemang (Askew et al., 2019; Bakker et al., 2013; Cheeseman et al., 2022; Clark & Kamii, 1996; Degrande et al., 2018; Kaufman, 2019; Tobias & Andreasen, 2013; Van Doreen et al., 2010; Vanluydt et al., 2022).

5.2.1 Från additivt till multiplikativt

Flera studier (Degrande et al., 2018, s. 565; Kaufman, 2019, s. 14; Tobias & Andreasen, 2013, s. 108) menar att en ingång till multiplikation är upprepad addition. Elever behöver först inse att multiplikation är en upprepad form av addition. Kaufman (2019, s. 14) beskriver hur lärare på ett tydligt sätt kan visa övergången från upprepad addition till multiplikation. Genom att skriva upp uttrycket $2 \times 2 = 2 + 2$ och $3 \times 2 = 2 + 2 + 2$ på tavlan, kan eleverna se hur multiplikation bygger på upprepad addition. För att ytterligare förstärka kunskapen och förståelsen kan läraren använda visuella och fysiska representationer, exempelvis genom att hålla upp fyra pennor i varje hand för att illustrera 2×4 . Vidare beskriver Kaufman (2019) en diskussion huruvida fyra blyertspennor i varje hand kan uttryckas som 4×4 . Eleverna var osäkra på sambandet mellan upprepad addition och multiplikation, och vissa trodde att 4×4 var detsamma som $4 + 4$ (s. 16).

Flera studier (Clark & Kamii, 1996, s. 41, 45–47, 48–50; Degrenade et al., 2018, s. 565; Tobias & Andreasen, 2013, s. 107–108; Van Doreen et al., 2010, s. 370, 375) visar att yngre elever tenderar att använda additiva metoder vid olika lösningar, medan äldre elever i större utsträckning tillämpar multiplikativa lösningar. Forskarna är eniga om att övergången från ett additivt till multiplikativt resonemang sker långsamt med åldern. Trots att förståelsen för multiplikativa samband utvecklas stegvis, fortsätter många elever att använda ett additivt tänkande även i högre årskurser innan de helt tar sig an multiplikativa lösningar.

I Clark och Kamii's (1996) studie var syftet att undersöka progressionen från ett additivt till ett multiplikativt resonemang (s. 41). Eleverna introducerades för ett problem som handlade om tre fiskar. De var 5, 10 och 15 cm långa. Instruktionen var att fisk *B* äter två gånger så mycket som fisk *A*, medan fisk *C* äter tre gånger så mycket som fisk *A*. Eleverna fick utefter den angivna informationen räkna ut hur mycket mat respektive fisk får om exempelvis fisk *B* får 8 matbitar (s. 45). Trots att det finns elever som beskriver och förstår det proportionella sambandet i uppgiften, visar resultatet från studien att additiva resonemang används som lösningsmetod i årskurs 1. De multiplikativa resonemangen ökade i årskurs 2 och 3 men preferensen för additiva lösningar var fortsatt hög (s. 47–48). Clark och Kamii (1996) framhåller avslutningsvis att även om multiplikation kan introduceras tidigt, sker utvecklingen av ett multiplikativt resonemang successivt och över en längre tid (s. 50). Påståendet stärks även av Van Doreen et al.'s (2010) resultat, där förståelsen för ett proportionellt samband utvecklades långsamtgående mellan tredje klass och sjätte klass (s. 375).

Tobias och Andreasen (2013) understryker att additiva metoder kan bli problematiska när talen blir så stora att de inte längre är effektivt att använda addition. Här spelar multiplikation en viktig roll, eftersom det blir lättare att göra en uträkning (s. 107). Clark och Kamii (1996) beskriver denna process som en passage mellan additivt och multiplikativt resonemang, där elever ofta fastnar i additiva lösningar men försöker resonera kring multiplikation (s. 46). Yngre elever tenderar att använda ett additivt tänkande vid problemlösning, vilket kan ses som en naturlig utgångspunkt för att utveckla ett multiplikativt tankesätt. Genom att successivt introducera multiplikation kan eleverna få hjälp att göra övergången från att enbart förlita sig på addition till att förstå mer komplexa operationer. Forskning visar också att äldre elever i högre grad använder multiplikativa lösningar, medan yngre

elever i större utsträckning förlitar sig på addition (Degrande et al., 2018, s. 565; Tobias & Andreasen, 2013, s. 107–108)

5.2.2 Elevers informella multiplikativa resonemang

Tre studier undersöker hur elever mellan åldrarna 5–8 år resonerar och löser multiplikativa problem utan formell undervisning (Bakker et al., 2013, s. 70; Cheeseman et al., 2022, s. 816; Tobias & Andreasen, 2013, s. 107–108). I två av studierna (Bakker et al., 2013, s. 70; Cheeseman et al., 2022, s. 815) konstaterades det att eleverna hade förmågan att lösa multiplikativa problem utan att ha blivit introducerade för det innan. Forskarna menar att eleverna med fördel tar hjälp av visuella hjälpmedel med räknebara objekt för att lösa problem. I den ena studien (Cheeseman et al., 2022) skulle eleverna bilda lika stora grupper med hjälp av en tärning som bestämmer gruppstorleken. Resultatet i övningen blev att eleverna använder enskilda enheter till att bilda en ny sammansatt enhet, vilket visade att eleverna uttryckte sig med ett multiplikativt resonemang (s. 804). Cheeseman et al. (2022) tar upp ett annat exempel när eleverna fick lösa ett problem med antalet sköldpaddsben. Elevernas svar gav resultatet att de kunde resonera och tänka multiplikativt (s. 814). Dessutom nämner Tobias och Andreasen (2013) att eleverna bör få bemöta uppgifter på ett sätt som är inom deras utvecklingszon. Forskarna menar genom att låta eleverna använda sig av egna informella resonemang och bemöta ett problem på ett sätt som känns överkomligt, kan lärare därefter se vilken taluppfattning eleven har för att skapa så goda förutsättningar som möjligt. Forskarna konstaterar att det är gynnsamt för elever att resonera om matematik eftersom det utvecklar elevernas abstrakta tänkande och stärker förståelsen för framtida formell undervisning (s. 107–108). Påståendet styrks av Vanluydt et al. 's studie (2022) där forskarna anser att elever ska få lösa multiplikationsproblem på sitt eget vis (s. 9).

6. Diskussion

I följande avsnitt presenteras metodvalet och resultatdiskussion samt vidare forskning.

6.1 Metoddiskussion

Metoden för litteraturstudien har både styrkor och begränsningar. Användningen av databaserna PsycInfo och ERIC säkerställer att relevant forskning inom psykologi och pedagogik upptäcktes. Dessa databaser innehåller en stor mängd vetenskapligt granskade artiklar, vilket bidrar till studiens trovärdighet. Dock kan urvalet av databaser ha begränsat sökningen, då exempelvis databasen Scopus kunde ha utökat underlaget ytterligare.

Sökstrategin genomfördes systematiskt med välvalda sökord, booleska operatorer och trunckeringar för att säkerställa att relevanta artiklar identifierades. Att inleda med testsökningar i Jönköping University's söktjänst Primo var en fördel, då detta möjliggjorde en justering av sökord för att optimera träffsäkerheten. Samtidigt finns det en risk att vissa relevanta studier har missats, exempelvis sådana med andra sökord eller de som publicerats i andra språk än engelska. Begränsningen till enbart engelskspråkiga artiklar kan ha påverkat resultatet i form av att studier på andra språk kan ha tillfört ytterligare perspektiv.

En styrka i urvalet är att artiklarna är hämtade från flera olika länder, såsom Belgien, USA, Australien, Sydafrika och Nederländerna. Detta gör att studien inkluderar internationella perspektiv på multiplikativt resonemang, vilket kan bidra till en bredare förståelse av ämnet. Skillnader i utbildningsupplägg och pedagogiska traditioner kan påverka resultaten och bör tas i åtanke vid tolkningen. Dessutom inkluderar studien forskning från olika årtal, där både nyare och äldre studier analyserats. Detta ger en möjlighet att se utvecklingen inom forskningsfältet över tid, men det innebär också att vissa äldre studier kanske inte helt speglar dagens undervisningsmetoder eller syn på multiplikativt resonemang.

Vid analysen av materialet har en strävan efter objektivitet funnits. Alla artiklar har granskats utifrån förutbestämda kriterier och gjort en systematisk kodning av teman för att minimera risken för subjektiva tolkningar. För att ytterligare säkerställa objektivitet har en jämförelse av resultaten från flera studier gjorts, med fokus på olika perspektiv av multiplikativt resonemang. Samtidigt är det viktigt att poängtera att fullständig objektivitet inte är möjlig eftersom vi som skribenter har tolkat och kategoriserat materialet finns det en risk för egen tolkning.

6.2 Resultatdiskussion

Den här litteraturstudien har undersökt hur elever i tidigare skolår närmar sig multiplikativa uppgifter enligt tidigare matematikdidaktisk forskning. Syftet har undersökts genom forskningsfrågorna *vad kännetecknar ett multiplikativt resonemang* och *hur utvecklas ett multiplikativt tänkande?* Resultatet av litteraturstudien visar att utvecklingen av multiplikativa resonemang gynnas av att ta vara på elevernas tidigare kunskaper och erfarenheter. Utvecklingen av ett multiplikativt tänkande beskrivs genom flera studier baserat på elevernas förkunskaper inom addition.

I kommentarmaterialet framhålls det att elever ska identifiera likheter och skillnader mellan begrepp samt upptäcka samband mellan dem, exempelvis relationen mellan addition och multiplikation (Skolverket, 2022, s. 6). Forskare har haft delade åsikter kring just detta samband. I resultatet av studien framkommer det att forskarna (Degrande et al., 2018; Kaufman 2019; Tobias & Andreasen, 2013) anser att upprepad addition är fördelaktigt som en introduktion till multiplikation. De argumenterar för att bygga vidare på elevernas tidigare erfarenheter av addition för att successivt bekanta sig med multiplikationens struktur. Något som Steffe & Cobb (1998) också argumenterar för och menar att elever bör få lösa uppgifter utefter deras egen förmåga (s. 49). Det finner vi intressant eftersom Askew et al. (2019) motsätter sig detta, och menar snarare att om eleverna blir introducerade för multiplikation genom upprepad addition blir de begränsade i fortsatt matematikundervisning. Forskarna menar att om fokuset hamnar på upprepad addition kan det medföra att eleverna fastnar i att använda additiva metoder och riskerar att missuppfatta multiplikationens grundstruktur, vilket kan leda till att de inte utvecklar förståelsen proportionella samband (s. 4). Utifrån ett samhällsperspektiv och det faktum att läroplanen (Skolverket, 2024, s. 7) yrkar på att eleverna ska få goda förberedelser till att leva och engagera sig i samhället, kan det då bli problematiskt om förståelsen för det proportionella sambandet inte utvecklas. Detta eftersom proportionalitet genomsyrar praktiska tillämpningar i vardagen (Xie & Cai, 2022, s. 1177), som exempelvis förståelsen för kilopriser samt beräkning för hastighet och sträckor. Trots att forskarna (Clark & Kamii, 1996; Van Doreen et al., 2010) är oense när förståelsen för det proportionella sambandet utvecklas anser vi därför att det är fördelaktigt att synliggöra hur två variabler kan förändras proportionellt genom visuella representationer i tidig matematikundervisning.

Vid framställning av resultaten i litteraturstudien reflekterade vi över att multiplikation ofta introduceras när eleverna är runt 8-9 år då det anses vara komplext för yngre elever att förstå. Däremot visar forskning (Bakker et al., 2013; Cheeseman et al., 2022; Tobias & Andreasen, 2013) att eleverna har förmågan att utveckla ett multiplikativt resonemang redan innan formell undervisning och vi anser därför att det är av största vikt att inkludera undervisning som främjar ett multiplikativt tänkande när eleverna är yngre. Utvecklingen av matematiskt resonemang innebär att elever först använder informella metoder för att lösa problem och sedan gradvis övergår till mer formella metoder (Steffe, 1994; Tobias & Andreasen, 2013; Vanluydt et al., 2022). Vidare beskriver Steffe (1994) sin syn på elevernas utveckling och menar att elever bör få använda sina egna informella resonemang innan de introduceras till formell undervisning (s. 6). Från ett skolperspektiv kan detta ses som en viktig insikt om hur den matematiska utvecklingen bör stödjas. Genom att ge elever möjlighet att först utveckla sina egna informella resonemang innan de introduceras för formella metoder, skapas goda förutsättningar till en djupare matematisk förståelse och en mer tillgänglig användning av matematiska begrepp. Det är dessutom i enlighet med Steffes (1994) resonemang om att elevernas scheman ständigt är i progression i samband med deras utveckling (s. 9).

I kommentarmaterialet står det att elever ska utveckla sin förmåga att föra matematiska resonemang genom att använda både informella metoder och, med ökad ålder, mer strukturerade och formella argument (Skolverket, 2022, s. 7). Förutom förståelsen för ett proportionellt samband visar forskning (Cartwright, 2022; Cheeseman et al., 2020; Cheeseman et al., 2022) att förståelsen för lika stora grupper också kännetecknar ett multiplikativt resonemang. Resultatet av litteraturstudien visar att elever har förmågan att dela in objekt i lika stora grupper men att det kan finnas svårigheter att räkna grupper istället för de enskilda objekten i grupperna. Något som Heiberg Solem et al. (2022) också nämner, då de anser att elever bör få hjälp med att se grupper som räknebara enheter istället för objekten i dem (s. 176–177). Eftersom svårigheten upplevs vara att räkna enskilda objekt istället för att effektivisera räknemetoden till att räkna grupper, anser vi att det är viktigt att låta eleverna laborera med exempelvis konkret material eller visuella representationer. Genom laborationer och utforskande aktiviteter kan eleverna få syn på hur exempelvis 3 grupper av 4 ser ut och dessutom få syn på att multiplikation är kommutativt. Vad skiljer 3 grupper av 4 och 4 grupper av 3? Larsson (2015, s. 10) poängterar att den kommutativa

lagen bör synliggöras genom olika representationsformer för att eleverna enklare ska förstå dess innebörd.

Resultatet av litteraturstudien visar att elever ofta förlitar sig på additiva metoder i hög utsträckning när de bemöter olika typer av problem (Clark & Kamii, 1996; Degrenade et al., 2018; Tobias & Andreasen, 2013; Van Doreen et al., 2010). Addition är tillsammans med subtraktion de första räknestrategierna eleverna blir introducerade för och kan därför vara mer automatiserad än multiplikation. Trots att multiplikation är en mer effektiv metod när talområdet blir större, kräver den en än mer kognitiv belastning. Vilket kan medföra att eleverna anser att det upplevs vara enklare att addera, fast det är tidskrävande. Young-Loveridge (2005) tillägger däremot att om elever ska kunna behärska ett multiplikativt tänkande måste de först behärska det additiva sambandet. Forskaren menar att utan förståelsen för det additiva tänkandet riskerar elever att inte utveckla förståelsen för funktionella samband och gå miste om proportionellt tänkande (s. 34). Efter att ha tagit del av forskningsresultaten anser vi att om eleverna inte har blivit tillräckligt introducerade för multiplikation och inte ser sambandet mellan räknesätten, kanske de inte ser multiplikation som en naturlig lösning. Därför bör övergången från additiva samband till multiplikation innehålla visuella representationer som tabeller eller area-modeller där antalet rader och kolumner representerar faktorerna.

6.3 Vidare forskning

Utifrån resultat och diskussion som framkommit i vår studie anser vi att framtida forskning med fördel kan riktas mot multiplikativt resonemang i undervisningen. Det vore intressant att undersöka lärarens inställning till upprepad addition och elevernas informella resonemang samt hur stor påverkan läraren har på elevernas utveckling utifrån dessa punkter. När vi har tagit del av vissa studier framkommer det att introduktionen till multiplikation och vad undervisningen bör innehålla kan skilja sig från land till land. Det hade därför varit intressant att studera hur de olika riktlinjerna påverkar elevernas lärande och om det finns för- eller nackdelar med de olika riktlinjerna om introduktionen till multiplikation. Ett annat relevant forskningsområde är hur lärare använder och förhåller sig till läromedel vid introduktionen av multiplikation, samt i vilken utsträckning dessa resurser formar elevernas förståelse av begreppet.

Något vi själva har reflekterat över under litteraturstudien är hur lärare försäkras om att eleverna förstår skillnaden på upprepad addition och multiplikation. Det hade varit

intressant att ta del av forskning som berör övergången från ett additivt tänkande till ett multiplikativt tänkande samt redogöra för om alla elever faktiskt gör det över tid.

Referenslista

- Aske, M., Venkat, H., Mathews, C., Ramsingh, V., & Takane, T. (2019). Multiplicative Reasoning: An Intervention's Impact on Foundation Phase Learners' Understanding. *South African Journal of Childhood Education*, 9(1), 2-4. [ERIC - EJ1214427 - Multiplicative Reasoning: An Intervention's Impact on Foundation Phase Learners' Understanding, South African Journal of Childhood Education, 2019](#)
- Bakker, M., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Robitzsch, A. (2014). First-graders' knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain. *Contemporary educational psychology*, 39(1), 70. [First-graders' knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain](#)
- Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. I J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter, (Red.), *A research companion to the principles and standards for school mathematics* (s. 29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cartwright, K. (2023). Interpreting young children's multiplicative strategies through their drawn representations. *Mathematics Education Research Journal*, 36, 373-387. [Interpreting young children's multiplicative strategies through their drawn representations | Mathematics Education Research Journal](#)
- Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A., & Ferg, S. (2020). Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem. *The Journal of Mathematical Behavior*, 60, 5-14. [Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem](#)
- Cheeseman, J., Downton, A., Ferguson, S., & Roche, A. (2022). Meeting multiplicative thinking through thought-provoking tasks. *Mathematics Education Research Journal*, 35(4), 805-838. [Meeting multiplicative thinking through thought-provoking tasks - ProQuest](#)
- Clark, F-B., & Kamii, C. (1996). Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5. *Journal for research in mathematics education*, 27(1), 41-50. [Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5](#)

- Degrande, T., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Beyond Additive and Multiplicative Reasoning Abilities: How Preference Enters the Picture. *European Journal of Psychology of Education*, 33(4), 565. [Beyond additive and multiplicative reasoning abilities: how preference enters the picture | European Journal of Psychology of Education](#)
- Heiberg Solem, I., Alseth, B., & Nordberg, G. (2022). *Tal och tanke- matematikundervisning för förskoleklass till årskurs 3*. Studentlitteratur.
- Karlsson, N., & Kilborn, W. (2016). Att konkretisera och förstå multiplikationstabellen. *Nämnamnaren: tidskrift för matematikundervisning*, 198(2) 20-23. <https://sh.diva-portal.org/smash/get/diva2:922205/FULLTEXT01.pdf>
- Kaufman, O. T. (2018). The Problem of Distinguishing Multiplicative from Additive Reasoning in Primary School Classroom Context. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 6(3), 84-101. <https://eric.ed.gov/?id=EJ1183986>
- Kaufman, O.T. (2019). Students reasoning on multiplication in the context of primary school classroom. *Journal of research in mathematics education*, 8 (1), 14-16. [Plantilla Revistas](#)
- Larsson, K. (2015). Multiplikationsundervisning. *Nationellt centrum för matematikutbildning*, 9-10. [0913_larsson.indd](#)
- Larsson, K. (2016). Finding Erik and Alva: uncovering students who reason additively when multiplying. *Nordisk Matematikdidaktik*, 21(2), 85-86. <https://su.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A944475&dswid=9360>
- Löwing, M., & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle*. Studentlitteratur.
- Nilholm, C. (2017). *SMART: Ett sätt att genomföra forskningsöversikter*. Studentlitteratur.
- Severyd, V., & Ingmarsdotter Lundmark, J. (2022) *Nationella provet i matematik årskurs 3, 2022* (2022:6). Stockholms universitet. [Rapport Matematik årskurs 3 2022.pdf](#)

- Severyd, V., & Ingmarsdotter Lundmark, J. (2023) *Nationella provet i matematik årskurs 3, 2023*(2023:5). Stockholms universitet. [Rapport - Matematik årskurs 3 2023.pdf](#)
- Severyd, V., & Ingmarsdotter Lundmark, J. (2024) *Nationella provet i matematik årskurs 3, 2024* (2024:5). Stockholms universitet. [Rapport - Matematik årskurs 3 2024.pdf](#)
- Skolverket. (2022). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik – grundskolan*. <https://www.skolverket.se/getFile?file=9790>
- Skolverket. (2024). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: Lgr22* (2. rev. uppl.). <https://www.skolverket.se/getFile?file=13074>
- Steffe, L.P. (1992). Schemes of action and operation involving composite units. *Learning and Individual Differences*, 4(3), 262. [PII: 1041-6080\(92\)90005-Y](#)
- Steffe, L.P. (1994). Children's multiplying schemes. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (s. 5-32). Albany, NY: University of New York Press.
- Steffe, L.P., & Cobb, P. (1998). Multiplicative and Divisional Schemes. *Focus on learning problems in mathematics*, 20(1), 49.
- Tobias, J.M., & Andreasen, J.B. (2013). Developing Multiplicative Thinking from Additive Reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 20(2), 107-108. [Developing Multiplicative Thinking from Additive Reasoning](#)
- Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2010). From Addition to Multiplication ... and Back: The Development of Students' Additive and Multiplicative Reasoning Skills. *Cognition an Instruction*, 28(3), 370-375. [From Addition to Multiplication ... and Back: The Development of Students' Additive and Multiplicative Reasoning Skills](#)
- Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2022). The role of relational preference in early proportional reasoning. *Learning and Individual Differences*, 93, 9. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2021.102108>

Xie, S., & Cai, J. (2022). Fifth graders' learning to solve equations: the impact of early arithmetic strategies. *ZDM- Mathematics Education*, 54(6), 1170-1177. https://www.proquest.com/docview/2918759012?pq-origsite=primo_ra&sourcetype=Scholarly%20Journals

Young-Loveridge, J. (2005). Fostering Multiplicative Thinking Using Array-Based Materials. *Australian Mathematics Teacher*, 61(3), 34. <https://eric.ed.gov/?id=EJ743571>

Bilagor

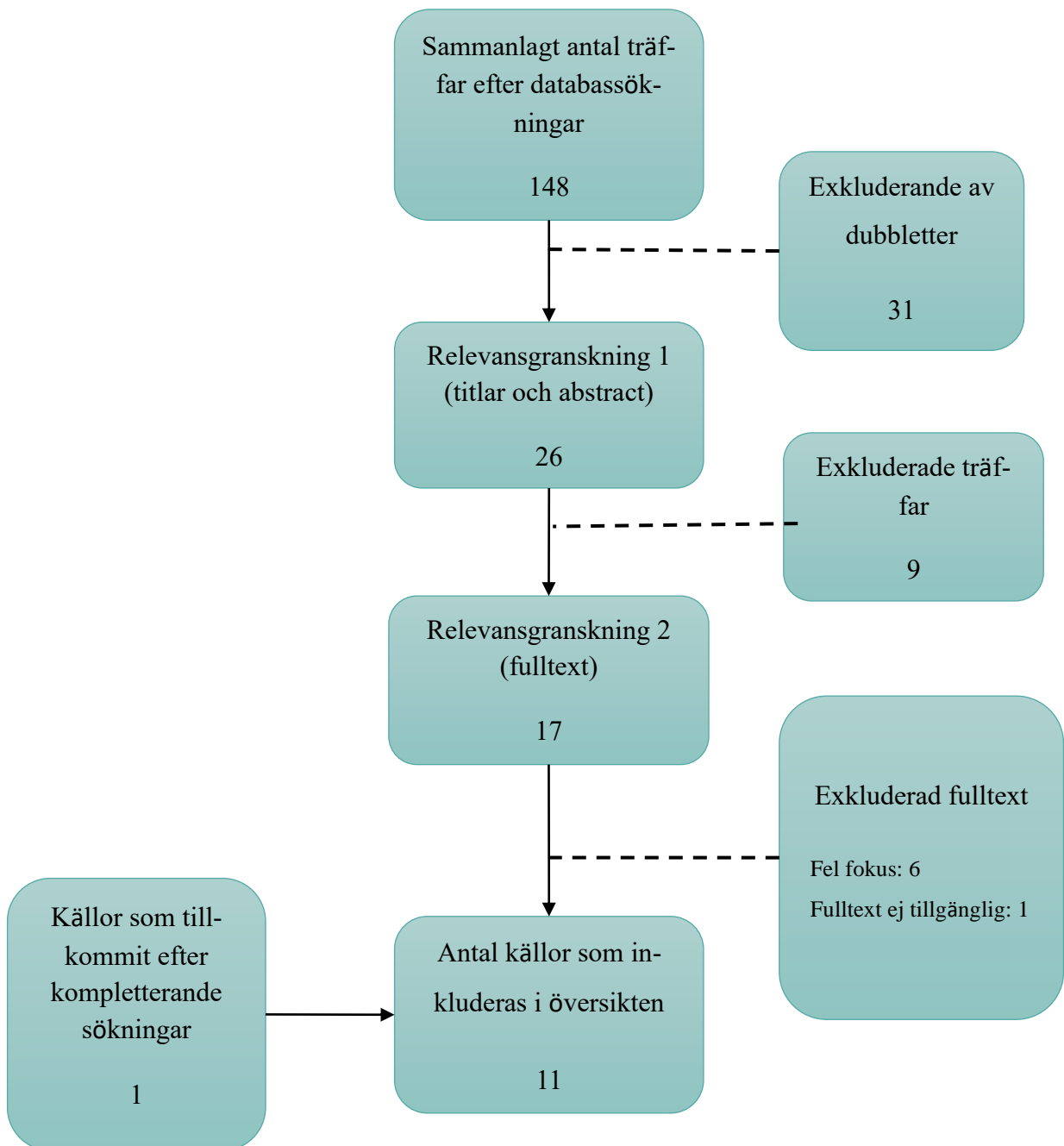
Bilaga 1: Söktabell

Tabellen presenterar de sökord och avgränsningar som har använts för varje sökning

Databas och datum	Sökord	Eventuella avgränsningar	Träffar	Antal valda artiklar
PsycInfo 2025-2-3	noft("multiplicative reason*" OR "multiplicative think*" OR "multiplicative structur*") AND noft("early childhood mathematic*" OR "primary school" OR "early childhood" OR "early mathematic*" OR "elementary school")	Peer reviewed	30	4
ERIC 2025-2-5	noft("multiplicative reason*" OR "multiplicative think*" OR "multiplicative structur*") AND noft("early childhood mathematic*" OR "primary school" OR "early childhood" OR "early mathematic*" OR "elementary school")	Peer reviewed Scholar Journals	80	4
ERIC 2025-2-12	noft("early childhood" OR "early childhood mathematics" OR "primary school") AND noft("repeated addition" OR "multiplicative")	Peer reviewed Scholar Journals	38	2

Bilaga 2: Diagram över urvalsprocessen

Figur visar en sammanställning från alla sökningar



Bilaga 3: Översikt över analyserat material

<p>1.Författare: Tobias, J.M., & Andreasen, J.B.</p> <p>Titel: Developing Multiplicative Thinking from Additive Reasoning</p> <p>Tidsskrift: The National Council of Teachers of Mathematics</p> <p>Publiceringsår: 2013</p>	<p>Syfte:</p> <p>Syftet med studien är att undersöka hur eleverna kan få hjälp av läraren för att övergå från additivt till multiplikativt tänkande.</p>	<p>Datinsamling:</p> <p>Litteratur</p> <p>Land: USA</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln?</p> <p>Multiplikativt resonemang innebär att elever har förståelse och kan se samband mellan enskilda enheter och grupper. Även förmågan att förstå och använda relationer mellan tal genom upprepade addition eller proportioner. Elever kan tillämpa strategier, såsom att identifiera 1/5 av en helhet, samt använda sammansatta enheter, exempelvis</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln?</p> <p>I artikeln beskrivs det att eleverna bör börja med additiva metoder för att sedan bli inriktade på multiplikativa strukturer, vilket kan hjälpa eleverna att förstå sambandet mellan tal. Även att låta eleverna använda informella metoder som sedan kan utvecklas och bli formella.</p>	<p>Resultat: Eleverna behöver ha kunskap om att multiplikation är upprepade addition och division är upprepade subtraktion. Vidare kunskaper från additiv förståelse till multiplikativt tänkande. Att använda additiva strategier blir besvärligt vid högre tal och är inte hållbart. Därför behöver eleverna först introduceras till additiva metoder för att sedan upptäcka de multiplikativa. Eleverna bör också få använda sig av informella metoder för att sedan med hjälp av läraren få mer formella</p>
--	---	---	---	---	---

			2/10, för att lösa problem.		metoder. Eleverna föredrar även att använda additiva metoder i problem som kräver ett multiplikativt resonemang.
<p>2.Författare: Bakker, M., van de Heuvel-Panhuizen, M., & Roitzch, A.</p> <p>Titel: First-graders knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain</p> <p>Tidsskrift: Contemporary Educational Psychology</p> <p>Publiceringsår: 2014</p>	<p>Syfte: Syftet med studien är att undersöka elevers förkunskaper inom multiplikativa resonemang innan formell undervisning har introducerats.</p>	<p>Urval: 1225 elever från första klass.</p> <p>Datainsamling: Ett onlinetest med 28 uppgifter där eleverna arbetade utan hjälp av någon vuxen.</p> <p>Land: Nederländerna</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln? Elevernas förkunskaper inom addition appliceras på uppgifterna som en lösningsstrategi. Hälften av eleverna visade dessutom en större förmåga att lösa problem när symbolen * byttes ut mot ordet <i>gånger</i>. Trots att det fanns elever som löste de multiplikativa problemen</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln? Vissa uppgifter som berörde problemlösning eller fördubbling kunde innehålla visuella objekt för eleverna att räkna. Forskarna kunde då se att det fanns en signifikant skillnad i att lösa problemet om det innehöll räkningsbara objekt</p>	<p>Resultat: Studien visar på att elever har mycket förkunskaper inom multiplikation och vikten av att ta vara på förkunskaperna inför en formell undervisning. Analysen visade att eleverna presterade bättre på problemlösning och dubblingsproblem (båda med ett genomsnitt på 63%) jämfört med rena multiplikationsproblem</p>

			<p>behöver det däremot inte finnas en förståelse för proportionella samband eller gruppstruktur.</p>	<p>eller inte eftersom de får då en nära koppling till addition.</p>	<p>(52%) och grupperingsproblem (47%).</p> <p>Studien visade att barnen svarade rätt på mer än hälften av testfrågorna (58%) innan de fått undervisning inom multiplikativa problem.</p>
<p>3.Författare: Askew, M., Venkat, H., & Matthews, C., et al.</p> <p>Titel: Multiplicative reasoning: an intervention's impact on Foundation Phase learners' understanding</p> <p>Tidsskrift: South African Journal of Childhood Education.</p>	<p>Syfte:</p> <p>Syftet med forskningen är att stärka elevernas förmåga att förstå och tillämpa multiplikativt resonemang vid lösning av matematiskt problem i elevnära sammanhang.</p>	<p>Urval: 233 elever i årskurserna 1-3.</p> <p>Datainsamling: En fyra veckors undervisningsprocess där eleverna genomförde förtest, eftertest och ett försenat eftertest för att mäta kunskapsutvecklingen. Testerna behandlade två additiva</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln?</p> <p>Det presenteras som en färdighet för att kunna lösa problem som involverar bland annat förhållanden mellan tal.</p> <p>Studien belyser även förståelsen för sammansatta grupper som</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln?</p> <p>Sydafrikas läroplan använder sig av upprepad addition som introduktion till multiplikation. Det finns begränsade instruktioner för hur undervisningen bör gå till för att förstå</p>	<p>Resultat:</p> <p>Många elever använder sig av addition för att förstå sig på den multiplikativa strukturen.</p> <p>Däremot blev det problematiskt när talområdet var större eftersom flera elever använder sig av enstegräkning.</p>

<p>Publikationsår: 2019</p>		<p>uppgifter och åtta multiplikativa. Land: Sydafrika</p>	<p>en del av ett multiplikativt resonemang.</p>	<p>multiplikativa relationer.</p>	
<p>4.Författare: Cheeseman, J., et al. Titel: Meeting multiplicative thinking through thought-provoking tasks Tidsskrift: Mathematics education research journal Publikationsår: 2022</p>	<p>Syfte: Syftet med studien är att ta reda på hur elever tänker och förstår multiplikation och division med inriktning på hur de förstår lika grupper.</p>	<p>Urval: 21 barn i åldrarna 5–6 år som går första året i skolan. Datainsamling: Fem lektioner som hölls av klassläraren. Land: Australien.</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln? Multiplikativt resonemang innebär att eleverna kan se samband mellan enheter som bildar grupper, att det innebär kunskap om att multiplikation är att sammanfoga flera lika stora grupper. Elever som har utvecklat ett multiplikativt resonemang har börjat få en förståelse för att</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln? Lärare kan hjälpa elever att förstå sambandet mellan addition och multiplikation genom att visa hur multiplikation förenklar upprepade additioner. Till exempel kan man räkna det totala antalet ben på flera stolar genom att multiplicera</p>	<p>Resultat: Resultatet visade att barnen i åldern 5-6 år har förmågan att tänka på och visualisera multiplikativa situationer med lika grupper, även utan formell undervisning. Exempel tas upp under en lek där en elevgrupp på 20 skulle försöka att bilda lika stor grupper utifrån ett nummer. Då kommer eleven med förslaget 7 vilket hen sedan berättar att det inte går.</p>

			multiplikation är kommutativt vilket innebär att 3×4 är samma som 4×3 .	antalet stolar med antalet ben per stol, istället för att addera varje enskilt ben	Forskningen antyder då på att eleven ser multiplar. Under lektionen twelve little ducks, löste eleverna uppgiften bra trots att de fått det beskrivet till sig med ett nytt ord lika grupper. Några av eleverna märkte då att multiplikation är kommutativt.
<p>5.Författare: Clark, F-B., & Kamii., C.</p> <p>Titel: Identification of Multiplicative Thinking in Children in Grades 1-5</p> <p>Tidsskrift: Journal for research in</p>	<p>Syfte: Syftet är att undersöka progressionen från ett additivt resonemang till ett multiplikativt.</p>	<p>Urval: 336 elever i årskurs 1–5 på en skola i Birmingham, Alabama.</p> <p>Datinsamling: Varje barn intervjuades med videoinspelning för att kunna granska elevernas resonemang.</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln? Elevernas resonemang under uppgiften kan synliggöra svårigheter för den multiplikativa strukturen. Det beskrivs även att elever som har förmågan att</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln? Det är viktigt att inte framställa multiplikation som en snabbare variant av addition eftersom det</p>	<p>Resultat: Vissa elever har ett additivt tänkande och räknar enstegsräkning eller med 2-3-stegshopp. En del elever tänkte multiplikativt och delade in fiskmaten i lika delar men blandade in additiva resonemang i</p>

<p>mathematics education</p> <p>Publikationsår: 1996</p>		<p>Under intervjun skulle eleven lösa en uppgift och samtala om sina tankar.</p> <p>3 fiskar i trä, 5, 10 och 15 cm långa. 100 st plastchips.</p> <p>Land: Usa</p>	<p>jämföra olika lösningar och reflektera över sina strategier är ett steg närmre ett abstrakt tänkande.</p>	<p>proportionella sambandet inte synliggörs.</p> <p>Många elever har svårt att övergå till ett multiplikativt resonemang och stannar kvar i additiva strategier.</p>	<p>förklaringen av lösningen. Andra elever hade ett multiplikativt resonemang och delade in i lika grupper.</p>
<p>6.Författare: Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L.</p> <p>Titel: From Addition to Multiplication ... and Back: The Development of Students' Additive and Multiplicative Reasoning Skills</p>	<p>Syfte: Syftet med studien är att undersöka hur elever löser additiva och multiplikativa problem, samt att identifiera förändringar i deras användning av dessa strategier över åldern.</p> <p>Forskningen syftar också till att förstå mönster av felaktig tillämpning av metoder och hur dessa</p>	<p>Urval: 88 stycken tredjeklassare. 78 stycken fjärdeklassare. 81 stycken femteklassare. 78 stycken sjätteklassare.</p> <p>Datainsamling: Arbetsblad</p> <p>Land: Spanien</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln?</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln?</p> <p>Forskarna identifierade att många elever i årskurs 3 konsekvent använde additiva metoder, även på proportionella uppgifter.</p> <p>Denna tendens avtog dock i högre årskurser (4, 5 och 6), där</p>	<p>Resultat:</p> <p>Studien visade att eleverna utvecklade sin förmåga att resonera proportionellt i långsamtakt, de låg på ungefär samma nivå mellan åk 3-6. De växlade mellan additiva och multiplikativa metoder på ett experimentellt. Resultatet blev att eleverna antingen förlitade sig helt på additiva strategier för</p>

<p>Tidsskrift: Cognition and Instruction.</p> <p>Publicationsår: 2010</p>	<p>resonemang utvecklas under grundskolan</p>			<p>eleverna istället började tillämpa proportionella metoder på samtliga uppgifter.</p> <p>I studien undersöktes övergången från additivt till multiplikativt resonemang och fann att läroplanen inte tydligt kopplar samman de olika räknesätten.</p> <p>Istället behandlas additiva strukturer och multiplikativa strukturer som separata områden, vilket leder till att metoderna övergeneraliseras och ofta används felaktigt.</p>	<p>att lösa de olika problemen eller helt förlitade sig på multiplikativa metoder för att lösa problemen. Däremot används de felaktigt och metoderna övergeneraliseras.</p>
---	---	--	--	--	---

<p>7.Författare: T. Degrande, et al</p> <p>Titel: Beyond additive and multiplicative reasoning abilities: how preference enters the picture</p> <p>Tidsskrift: European Journal of Psychology of Education</p> <p>Publicationsår: 2018</p>	<p>Syfte: Syftet med texten är att undersöka och belysa barns preferenser för additivt och multiplikativt resonemang i matematiska problem, samt att analysera hur dessa preferenser utvecklas över tid i grundskolan.</p>	<p>Urval: 325 barn (88 tredje klass, 78 fjärde klass, 81 femte klass och 78 sjätte klass). Barnen kom från olika grundskolor med varierande socioekonomiska bakgrunder i Flandern, Beligen.</p> <p>Datainsamling: Konstruerad svarsform och flervalsformat.</p> <p>Land: Belgien</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln?</p> <p>Multiplikativt resonemang definieras som en typ av matematiskt tänkande där barn känner igen och tillämpar multiplikativa relationer för att lösa olika problem. Forskarna observerade att barn i de högre årskurserna, särskilt de i femte och sjätte klass, visade en tydlig preferens för multiplikativa relationer, vilket tyder på en progression i deras matematiska tänkande över tid.</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln?</p> <p>Artikeln berör inte sambandet</p>	<p>Resultat:</p> <p>Studien visar att barn tydligt föredrar antingen additivt eller multiplikativt resonemang när de angriper matematiska problem. Det framkom att svaren varierar mellan dessa två resonemang, där preferensen för multiplikativt tänkande ökar med åldern, särskilt bland elever i femte och sjätte klass. Enligt resultatet så var det störst andel som valde att använda sig av addition minskade från tredje klass till sjätte klass. Men den största skillnaden när det gäller procent var användandet av multiplikation som</p>
--	---	---	--	---	---

					ökade från 5,1% till i tredje klass till 66,0% i sjätte klass.
<p>8.Författare: Kaufman, O-T.</p> <p>Titel: Students reasoning on multiplication in the context of primary school classroom</p> <p>Tidsskrift: Journal of research in mathematics education</p> <p>Publicationsår: 2019</p>	<p>Syfte: Studiens bidrag ligger i analysen av interaktioner mellan elever i ett klassrum under deras inläring av multiplikation i tredje klass. Specifikt undersöktes elevernas resonemangsprocesser.</p>	<p>Urval: Åtta klassrum med 7 lärare från 5 skolor.</p> <p>Datainsamling: Inspelning av 24 lektioner 3 i varje klassrum i 8 klassrum.</p> <p>Land: Norge</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln? Att utveckla ett matematiskt resonemang sker i interaktion med andra. Eleverna måste få reflektera och jämföra svar med varandra för att sedan kunna sätta ord på sitt eget lärande.</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln? Eleverna använder ofta av upprepade addition som en strategi vid multiplikativa problem. Det beskrivs som en naturlig övergång från addition till multiplikation när eleverna kopplar sina tidigare erfarenheter av addition till multiplikation. Däremot användes varierade gruppstorlekar vilket</p>	<p>Resultat: Genom samtal utvecklade eleverna ett multiplikativt resonemang och fördjupade sin förståelse för skillnader och likheter mellan addition och multiplikation, att när tal ska multipliceras kan de inte bara adderas. Vissa insåg att multiplikation är kommutativ och kunde förklara det med egna ord. Analysen visade att elever använde varierande gruppstorlekar, medan läraren fokuserade på upprepade addition.</p>

				visar på att eleverna inte förstår multiplikationens struktur.	Deras strategi kan försvåra förståelsen av multiplikation men känns meningsfull för dem med erfarenhet av addition. Detta kan hindra förståelsen av multiplikation, då den bygger på lika grupper.
<p>9.Författare: Cartwright, K</p> <p>Titel: Interpreting young children's multiplicative strategies through their drawn representations.</p> <p>Tidsskrift: Mathematics Education Research Journal,</p>	<p>Syfte: Studien undersöker hur yngre barn använder ritningar för att uttrycka sitt matematiska tänkande kring multiplikativa strukturer. Syftet är att analysera deras strategier och förstå ritningars roll i tidig matematikundervisning</p>	<p>Urval: 72 barn 5–8 år</p> <p>Datainsamling: Ritningar med svar från problem som inkluderade multiplikation</p> <p>Land: Australien</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln?</p> <p>Ett multiplikativt resonemang innebär ett abstrakt tänkande där elever med olika typer av representationer kan lösa ett problem (tal, ritningar, diagram)</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln?</p>	<p>Resultat:</p> <p>Eleverna använde sig av både additiva och multiplikativa metoder för att lösa olika uppgifter. Eleverna ritade upp djur i sammansatta grupper/lika grupper? De elever med additiva metoder räknade med enstegsräkning medan de elever med</p>

<p>Publikationsår: 2023</p>			<p>Däremot nämns det att eleven kan ha förmågan att muntligt resonera om matematik men ha svårt att representera dem grafiskt.</p>		<p>multiplikativa metoder räknade genom grupper (ett djur=4 ben osv) eller genom att dubblera.</p>
<p>10.Författare: Vanluydt, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W.</p> <p>Titel: The role of relational preference in early proportional reasoning</p> <p>Tidsskrift: Learning and individual differences</p> <p>Publikationsår: 2022</p>	<p>Syfte: Syftet med studien är att undersöka om barn mellan 5–8 år visar preferens för additivt eller multiplikativt resonemang i uppgifter där båda är möjliga. De undersöker också om preferensen utvecklas över tid.</p>	<p>Urval: 410 elever i åldern 5–8 år från 17 olika skolor i olika regioner i Flanders, Belgien.</p> <p>Datainsamling: Frågeformulär med uppgifter som går att lösa additivt och multiplikativt.</p> <p>Test i proportionalitet i åk 3</p> <p>Land: Belgien.</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln?</p> <p>Om eleven utifrån uppgiften svarar relationellt där det går att svara additivt.</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln?</p>	<p>Resultat:</p> <p>Forskningen visade att barn som gav fler multiplikativa svar i årskurs 3 presterade bättre på det proportionella resonemangstestet. Även additiva svar i årskurs 1 och 2 var kopplade till bättre resultat i årskurs 3, vilket tyder på att additivt tänkande kan vara en del av utvecklingen men blir mindre relevant för proportionellt resonemang med tiden.</p>

					<p>Den additiva svarspreferensen ökade mellan 1-3. I årskurs 1 var det få elever som svarade icke relationellt men ökade gradvis i 3:e klass.</p> <p>47 elever hade kvar en additiv preferens under årskurs 1-3 och endast 10 elever övergick till en multiplikativ svarspreferens i årskurs 3. 32 elever som kategoriserades med additiv preferens i årskurs 1-2 kategoriserades som en mix av additiv och multiplikativt svarspreferens i årskurs</p>
--	--	--	--	--	---

<p>11.Författare: Cheeseman, J., Downton, A., Roche, A., & Ferg, S.</p> <p>Titel: Investigating young students' multiplicative thinking: The 12 little ducks problem.</p> <p>Tidsskrift: Journal of Mathematical Behavior</p> <p>Publicationsår: 2020</p>	<p>Syfte: Undersöka barns förmåga att åskådliggöra och konstruera lika stora grupper.</p>	<p>Urval: En förstaklass mellan åldrarna 5–6 år i Australien.</p> <p>Datainsamling: Barnens teckningar och samtal.</p> <p>Land: Australien</p>	<p>Hur beskrivs ett multiplikativt resonemang enligt artikeln?</p> <p>Teckningarna tillsammans med elevens tankar ligger till grunden för det multiplikativa resonemangen.</p> <p>De barn som har förmågan att dela in ankorna i lika stora grupper.</p>	<p>Hur beskrivs sambandet mellan additiva strukturer och multiplikativa strukturer enligt artikeln?</p> <p>Eleverna använder sig av dubblering och tvåhoppsräkning vilket kan antydvas vara en bro mellan addition och multiplikation.</p>	<p>Resultat: Eleverna hade en förståelse om sammansatta grupper och lika grupperingar innan en formell undervisning. Teckningarna och de muntliga redogörelserna representerar ett abstrakt tänkande och argumenterar för en tidig introduktion av multiplikativa strukturer i skolan.</p>
---	--	---	---	---	---