JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Kritiska aspekter i bråkundervisningen

En studie om hur variationsmönster kan möjliggöra ett lärande i årskurs 2

KURS: *Examensarbete II för grundskollärare F-3, 15 hp*

PROGRAM: *Grundlärarprogrammet med inriktning mot arbete i grundskolan, årskurs F-3*

FÖRFATTARE: *Emma Abrahamsson, Rebecca Edlund*

EXAMINATOR: *Martin Hugo*

TERMIN: *VT24*

JÖNKÖPING UNIVERSITY

School of Education and Communication

Examensarbete II för grundskollärare F-3, 15hp
Grundlärarprogrammet med inriktning mot arbete i grundskolan, årkurs F-3
Termin: VT24

SAMMANFATTNING

Emma Abrahamsson, Rebecca Edlund

Kritiska aspekter i bråkundervisningen: en studie om hur variationsmönster kan möjliggöra ett lärande i årskurs 2.

Critical aspects in fraction education: a study on how patterns of variation enable learning in grade 2.

Antal sidor: 28

Elevers kunskap om tal i bråkform är central i relation till andra matematiska områden samt den fortsatta matematiska kunskapsutvecklingen. Forskning visar dock att tal i bråkform kan vara en utmaning för elever. Syftet med denna studie är att utifrån variationsteorin identifiera kritiska aspekter för tal i bråkform samt undersöka hur variationsmönster kan möjliggöra ett lärande. Studiens syfte besvaras med frågeställningarna: *Vilka kritiska aspekter kan identifieras för att förstå tal i bråkform? Vilka variationsmönster främjar elevernas möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna för lärandeobjektet?* För att besvara frågeställningarna har studiens genomförande inspirerats av processen i en Learning study. Studien genomfördes i två klasser i årskurs 2 där data samlades in med hjälp av förtest, observationsprotokoll och eftertest. Utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv har variationsmönster planerats för två lektioner. Förtestet resulterade i att tre kritiska aspekter identifierades. Utifrån observation av lektioner och analys av för- och eftertest visade resultatet att variationsmönstret för lektion 2 kan ha möjliggjort ett lärande. Studien visade att variationsmönstren kontrast och generalisering kan ha bidragit till att eleverna urskilt kritiska aspekter för lärandeobjektet.

Students' knowledge of fractions is fundamental in other mathematical areas and for the development of mathematical knowledge. Research, however, shows that fractions can be challenging for students. The purpose of this study is to, through variation theory, identify critical aspects of fractions and study how patterns of variety can enable learning. The purpose of this study is to answer the research questions: *What critical aspects can be identified in the understanding of fractions? What pattern of variation promotes students' possibility to discern the critical aspects of the object of learning?* To answer these questions, the method of the study was inspired by learning study. The study was conducted in two classes in grade 2. Data was collected through a pre-test, observation protocol and a post-test. Based on variation theory, patterns of variation were planned for two lessons. Results of the pre-test identified three critical aspects. Based on the observations of lessons and analysis of pre- and post-test, the pattern of variation for lesson 2 may have enabled learning. Patterns of variation, contrast and generalization may have contributed to students discerning the critical aspects of the object of learning.

Sökord: Variationsteorin, kritiska aspekter, variationsmönster, tal i bråkform, årskurs 2

Innehållsförteckning

1 Inledning 3

2 Syfte och frågeställningar 4

3 Bakgrund 5

3.1 Tal i bråkform 5

3.2 Styrdokument 6

3.3 Variationsteorin 6

3.3.1 Lärandeobjekt 7

3.3.2 Kritiska aspekter 7

3.3.3 Variationsmönster 8

3.4 Tidigare forskning 9

3.4.1 Elevers svårigheter och missuppfattningar om tal i bråkform 10

3.4.2 Kritiska aspekter från tidigare studie kopplat till variationsteorin 11

4 Metod 13

4.1 Val av metod 13

4.2 Urval 13

4.3 Genomförande 14

4.4 Etiska aspekter 15

5 Resultat 16

5.1 Kritiska aspekter som identifierats av förtestet 16

5. 1. 1 Urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora (KA1) 16

5.1.2 Urskilja att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen mellan del och helhet (KA2) 17

5.1.3 Urskilja att en diskret mängd delas in i lika antal objekt (KA3) 17

5.2 Variationsmönster under lektion 1 18

5.2.1 Kritiska aspekter som eleverna urskilt och inte urskilt 21

5.3 Revidering av lektion 1 22

5.4 Variationsmönster under lektion 2 23

5.4.1 Kritiska aspekter som eleverna urskilt och inte urskilt 25

6 Diskussion 27

6.1 Metoddiskussion 27

6.2 Resultatdiskussion 29

6.2.1 Kritiska aspekter 29

6.2.2 Jämförelse av för- och eftertest kopplat till variationsmönster 30

6.3 Vidare forskning 31

Referenslista 32

Bilagor .....

1 Inledning

Svenska elever i årskurs 4 presterar under genomsnittet inom taluppfattning och aritmetik i jämförelse med övriga nordiska länder, enligt den internationella undersökningen TIMSS 2019 (Skolverket, 2019). Området taluppfattning och aritmetik testar elevers förståelse och färdigheter kopplat till matematiska uttryck, hela tal, enkla samband och ekvationer samt bråk och decimaltal (Skolverket, 2019). Enligt Lindegren et al. (2012) är elevers förståelse för tal i bråkform väsentlig för fortsatt utveckling inom matematik samt förståelse för algebra. Svårigheter som elever har med tal i bråkform grundas ofta i missuppfattningar från tidigare skolår. McIntosh (2020) menar att det är viktigt att elever utvecklar förståelse för tal i bråkform, då det även är en grund för att förstå procentbegreppet samt decimaltal.

Utifrån didaktiska analyser av syftet och det centrala innehållet för matematik i grundskolan, menar Kilborn (2014) att tal i bråkform utgör en betydande del i undervisningen. I det centrala innehållet för årskurs F–3 i läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet (Skolverket, 2022a) står det att matematikundervisningen ska behandla tal i bråkform som del av antal och del av helhet, samt hur delarna uttrycks och benämns som bråk. Enligt Kilborn (2014) är det viktigt att lärare är medvetna om att förståelsen för och kunskapen om tal i bråkform är centralt i andra matematiska sammanhang, exempelvis inom formler, ekvationer och ekvationssystem. Lärare i grundskolan har därmed en viktig roll för elevers matematiska utveckling inom bråk, eftersom elever som inte utvecklat kunskap och förståelse för bråk i grundskolan riskerar att få bestående svårigheter inom matematik.

Syftet med studien är att identifiera kritiska aspekter för tal i bråkform, samt undersöka hur undervisningen kan möjliggöra ett lärande utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv. Vi anser att studien är relevant för vårt framtida yrke som lärare i matematik, då elevers första möte med bråk anses vara betydande för deras fortsatta matematiska utveckling. För att identifiera kritiska aspekter kommer studien inspireras av Learning study. Studien genomförs i två klasser i årskurs 2 med 26 elever. Data samlas in genom förtest, två lektioner, observationer och eftertest.

2 Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att, utifrån variationsteorin, identifiera kritiska aspekter för tal i bråkform samt att undersöka hur variationsmönster i undervisningen kan möjliggöra att eleverna urskiljer dessa.

Frågeställningar:

- Vilka kritiska aspekter kan identifieras för att förstå tal i bråkform?

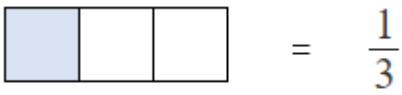
- Vilka variationsmönster främjar elevernas möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna för lärandeobjektet?

3 Bakgrund

I bakgrunden presenteras tal i bråkform (3.1), styrdokument (3.2), variationsteorin (3.3) och tidigare forskning (3.4).

3.1 Tal i bråkform

Tal i bråkform är rationella tal som kan representera relationen mellan täljaren och nämnaren, del av en helhet och del av ett antal (Drageryd et al., 2012). Tal i bråkform är alla tal som kan uttryckas som $\frac{a}{b}$ där a och b är heltal (Heiberg Solem et al., 2011). Det finns grundläggande begrepp som är viktiga att behärska innan elever börjar att operera med tal i bråkform. Dessa begrepp innefattar bland annat täljaren och nämnarens relation och innebörd. Täljaren och nämnarens innebörd kan illustreras genom en areamodell, där nämnaren anger hur många delar helheten är indelad i medan täljaren beskriver hur många delar som avses (Löwing, 2017).

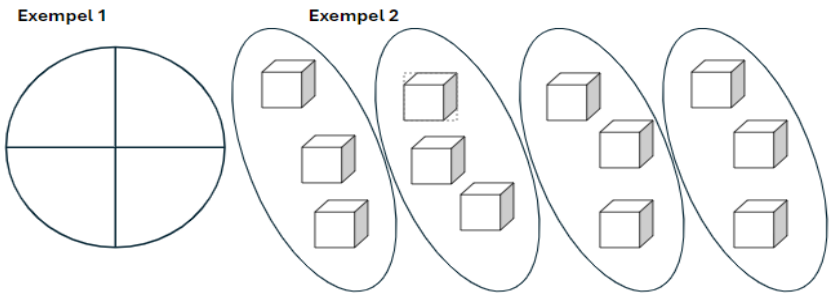


$= \frac{1}{3}$

Figur 1. *Areamodell som representerar en helhet.* $\frac{1}{3}$ *där 3:an beskriver hur många delar helheten är indelad i (nämnare) och 1:an beskriver hur många delar som avses (täljare). Figuren bygger på exempel från Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare (Löwing, 2017).*

3.1.1 Kontinuerlig och diskret mängd

Ur ett del-helhetsperspektiv kan tal i bråkform beskrivas utifrån två mängder: kontinuerlig mängd eller diskret mängd. Illustrationen av en kontinuerlig mängd kan exempelvis vara en cirkel som utgör helheten. Helheten delas därefter in i lika stora delar och dessa delar utgör bråkdelar. En diskret mängd innebär att helheten utgörs av ett antal objekt. Om objekten i den diskreta mängden ska delas in i bråkdelar är det antalet objekt i varje bråkdel som är det centrala. Sammanfattningsvist ska delarna i en kontinuerlig mängd, dvs bråkdelarna, vara lika stora och inom diskreta mängder ska det vara lika antal objekt i varje bråkdel (Lindegren et al., 2012).



Figur 2. *Exempel 1 visar en kontinuerlig mängd som är indelad i fjärdedelar. Exempel 2 visar en diskret mängd som är indelad i fjärdedelar.*

Enligt Drageryd et al. (2012) är det vanligt att använda areamodeller, exempelvis en cirkel, för att beskriva del av en kontinuerlig mängd. Delarna i areamodeller är inte skilda från varandra och därför anses de vara kontinuerliga. Kilborn (2014) förklarar att delarna av en kontinuerlig och diskret mängd benämns som bråk som andel istället för bråk som ett tal. Det kan förtydligas genom exemplet att om 4 barn delar på en chokladkaka får de inte en fjärdedel var, utan de får en fjärdedels chokladkaka var. Storleken av en fjärdedel beror alltså på hur stor chokladkakan är.

3.2 Styrdokument

Enligt läroplanens syftestext för matematik i grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet ska undervisningen ge eleverna möjlighet att utveckla förtrogenhet och förståelse för grundläggande matematiska metoder och begrepp samt deras användningsområden (Skolverket, 2022a). I kommentarmaterialet för matematik står det att elevers förståelse för tal i bråkform som del av antal och del av helhet är en förutsättning för utvecklingen av kunskaper inom algebra och procent. Undervisningen ska innefatta hur enkla tal i bråkform kan tillämpas i elevnära situationer, då elever ofta har erfarenheter från exempelvis recept eller när de har delat en frukt (Skolverket, 2022b).

3.3 Variationsteorin

Variationsteorin har sitt ursprung i en forskningsansats, fenomenografi, som startades av en forskargrupp vid Göteborgs universitet under 1970-talet. Utifrån fenomenografiska studier med syfte att undersöka människors olika sätt att erfara eller uppfatta ett fenomen utvecklades variationsteorin (Runesson, 2017). Variationsteorin är en teori där lärande

och erfarenhet är centralt. Teorin används för att studera lärandesituationer utifrån vad som görs möjligt att lära, vad elever lär sig samt hur lärandet kan förbättras och utvecklas (Runesson & Kullberg, 2010). Ur ett variationsteoretiskt perspektiv innebär variation i ett undervisningstillfälle hur de aspekter som hör till lektionsinnehållet varieras. Det centrala i en lärandesituation är hur innehållet behandlas, presenteras och bearbetas. Syftet med planeringen och genomförandet av lektionsinnehållet är att synliggöra de aspekter som eleverna måste få syn på för att utveckla sin förståelse (Holmqvist, 2021). Enligt Runesson (2017) innebär alltså lärande att urskilja kritiska aspekter inom det som ska läras. När människor lär sig något, är det alltid *något* vi lär oss, vilket innebär att lärandet har ett lärandeobjekt.

3.3.1 Lärandeobjekt

Ett lärandeobjekt avser det som ska läras och handlar om ett avgränsat innehåll som elever ska utveckla kunskap om. Lärandeobjektet kan utgå från det elever har svårigheter med eller från det lärare anser svårt att undervisa om (Bergqvist & Echevarría, 2011). Runesson (2017) menar att lärandeobjektet har en vad- och en hur-aspekt, vilket innebär att det är något (vad) som ska erfaras på något sätt (hur). Vad elever ska erfara benämns direkt lärandeobjekt och hur de ska erfara benämns indirekt lärandeobjekt. Ett lärandeobjekt kan inte endast bestå av ett ämnesinnehåll, utan behöver även bestå av hur innehållet ska erfaras och förstås.

Inom variationsteorin har lärandeobjekt olika betydelser, *det avsedda lärandeobjektet*, *det erfarna lärandeobjektet* och *det iscensatta lärandeobjektet*. Det avsedda lärandeobjektet innefattar det kunnande som eleverna ska utveckla. Det som eleverna sedan lär och erfar benämns som det erfarna lärandeobjektet. Det iscensatta lärandeobjektet innebär vad eleverna fått möjlighet att lära kopplat till en viss situation. (Runesson, 2017).

3.3.2 Kritiska aspekter

De kritiska aspekter inom ett lärandeobjekt innefattar de aspekter som är nödvändiga att urskilja för att möjliggöra ett lärande. Kritiska aspekter uppstår i relation till den som lär sig samt ett specifikt kunskapsinnehåll, vilket innebär att kritiska aspekter inte enbart beror på individen eller själva kunskapsinnehållet (Runesson, 2017). Kritiska aspekter

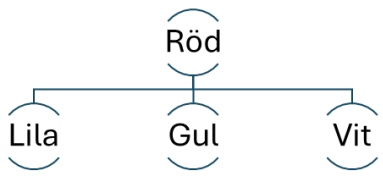
handlar om vad som skiljer en uppfattning från en annan (Magnusson & Maunula, 2011).

Enligt Marton (2015) kan kritiska aspekter vara svåra att upptäcka. Kritiska aspekter måste identifieras genom ett aktivt sökande och kan inte förbestämmas. För att elever ska kunna uppfatta och förstå helheten av ett lärandeobjekt måste de urskilja dess nödvändiga aspekter. De kritiska aspekterna är avgörande eftersom de är nödvändiga i relation till att förstå eller att inte förstå. Eftersom kritiska aspekter är relativa beroende på lärandeobjektet samt elever, kan de inte generaliseras utan måste anpassas efter specifikt innehåll och elevgrupp.

3.3.3 Variationsmönster

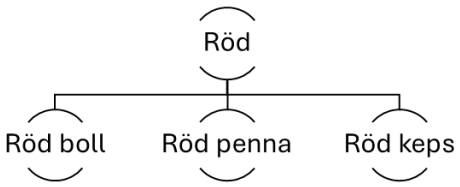
Variationsmönster innebär att lektionens innehåll varieras på olika sätt. Med hjälp av variationsmönster kan det som är kritiskt för elevers förståelse synliggöras (Magnusson & Maunula, 2011). Synliggörandet av aspekterna i undervisningen handlar om hur fokuset riktas mot vissa aspekter samtidigt som andra aspekter hamnar i bakgrunden. Variationsmönster innefattar bland annat kontrast, generalisering och fusion (Holmqvist, 2021).

Variationsmönstret *kontrast* innebär att synliggöra vad något är genom att visa vad det inte är (Bergqvist & Echevarría, 2011). Att synliggöra aspekter av ett bestämt innehåll genom kontrast innebär att en dimension av variation görs tillgänglig (Holmqvist (2021). Dimensionen av variation möjliggör att eleverna kan göra avgränsningar av det som ska läras, exempelvis om eleverna ska förstå att ett objekt är litet måste eleverna få erfara något som är stort. Om syftet med undervisningen är att eleverna ska erfara vad färgen röd är måste eleven få erfara andra färger som inte är röda. Genom variationsmönstret (se figur 3) för färgen röd, där röd kontrasteras mot andra färger, får eleverna möjlighet att erfara vad färgen röd är.



Figur 3. *Hur variationsmönstret kontrast urskiljer färgen röd genom jämförelse med andra färger. Figuren är bearbetad från Teorier för undervisning och lärande (Holmqvist, 2021, s. 38).*

I variationsmönstret varierar färgerna mot en bakgrund där objekten är konstanta. Holmqvist (2021) menar att om en elev ska utveckla förståelse för vad en färg är genom kontrast, är det viktigt att representationsformerna är identiska, exempelvis bollar i olika färger. För att eleven ska få en bredare förståelse för färgen röd måste hen erfara att röd inte enbart innefattar ett specifikt objekt. Genom variationsmönstret *generalisering* får eleven möjlighet att utvidga det hen urskilt genom att erfara att andra föremål eller objekt också kan vara röda.



Figur 4. *Variationsmönstret generalisering. Figuren är bearbetad från Teorier för undervisning och lärande (Holmqvist, 2021, s. 38).*

Variationsmönstret *fusion* är lämpligt när eleven har utvecklat sitt kunnande, eftersom alla aspekter varierar samtidigt. Mönstret tillämpas när eleven har urskilt innehållet samt kan generalisera begrepp. I figur 5 synliggörs variationsmönstren och de aspekter som varierar eller hålls konstanta (invarianta) (Holmqvist, 2021)

Kontrast	Färger varieras	Föremålet invariant (t.ex. lika stora bollar)
Generalisering	Färgen invariant	Föremålen varierar
Fusion	Färger varieras	Föremålen varierar

Figur 5. *Exempel på variationsmönster för undervisning om färg. Figuren är en bearbetning från en tabell i Teorier för undervisning och lärande av Holmqvist (2021, s. 38).*

3.4 Tidigare forskning

I detta avsnitt redovisas tidigare forskning om elevers svårigheter och missuppfattningar om tal i bråkform (3.3.1) samt tidigare studie kopplat till variationsteorin (3.3.2).

3.4.1 Elevers svårigheter och missuppfattningar om tal i bråkform

Tidigare forskning visar att elevers svårigheter och missuppfattningar för tal i bråkform kan bero på natural number bias. Detta fenomen innebär att elevers förståelse för rationella tal påverkas av deras tidigare erfarenheter av naturliga tal (Schumacher et al. 2017 & Gabriel et al., 2013). Elevers tidigare erfarenheter av de naturliga talen kan leda till att elever har svårt att utveckla förståelse för konceptet bråk, vilket exempelvis blir synligt i missuppfattningen att täljaren och nämnaren är två enskilda heltal (Schumacher et al., 2017)

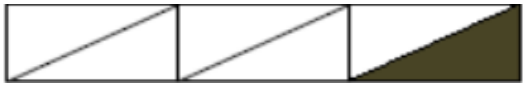
Ni och Zhou (2005) menar att tal i bråkform kan vara mer komplexa att förstå än naturliga tal. Elevers svårigheter att förstå tal i bråkform kan bero på elevers tidigare erfarenheter av naturliga tal, natural number bias, samt bristande förståelse för konceptet bråk. I en studie där elever intervjuades under en aktivitet förklarade eleverna att de inte kunde identifiera $\frac{1}{5}$ av 10 objekt. Istället delade eleverna upp de 10 objekten i 2 samlingar om 5 och betecknade 1 objekt i en av samlingarna som $\frac{1}{5}$. Författarna menar att elevernas resonemang och uppdelning av mängden 10 kan grundas i deras tidigare erfarenheter av naturliga tal. Talet $\frac{1}{5}$, som är ett rationellt tal, tolkas istället som de naturliga talen 1 och 5, vilket innebär att eleverna tolkar uppdelningen som 1 av 5 objekt. Liknande resultat visade Empson (1999) i sin studie. I studien framkom det att elevernas resonemang kunde kopplas till en bristande förståelse för täljaren och nämnarens betydelse. Eleverna hade svårigheter med att förstå vad $\frac{1}{3}$ av mängden 12 innebar och ansåg att $\frac{1}{3}$ av 12 godisar var 3. Författaren menar att elevernas resonemang kan kopplas till att $\frac{1}{3}$, som benämns "en tredjedel", kan tolkas som det naturliga talet 3.

Alkhateeb (2019) synliggör i sin studie att en missuppfattning hos eleverna var att delarna inte behövde vara lika stora när de skulle dela in en figur i bråkdelar. I en studie av Gould et al. (2006) beskrivs också elevers missuppfattningar angående att dela in en figur i bråkdelar. Eleverna i studien visade svårigheter att dela in en cirkel i tredjedelar.

Bild borttagen av upphovsrättsliga skäl.

När eleverna skuggade $\frac{1}{3}$ delade några elever in cirkeln i tre vertikala streck och skuggade en av delarna. De använde samma strategi när de skuggade $\frac{1}{6}$. Det visade sig även i studien att flertalet elever representerade $\frac{1}{3}$ som $\frac{1}{4}$ när de skulle skugga en tredjedel av en cirkel. Författarna menar att eleverna kan tagit hänsyn till antalet delar och inte på att delarna måste vara lika stora (Gould et al., 2006).

I studien av Alkhateeb (2019) framkom ytterligare en missuppfattning, där eleverna inte tog hänsyn till helheten när de skulle ange en skuggad del av en figur. När eleverna skulle delge vilken del av en figur som var skuggad svarade flera elever $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ eller $\frac{1}{5}$. Eleverna i studien uppfattade inte den skuggade delen som en del av hela figuren (se figur 6), utan menade att den skuggade delen var en del av en annan figur.



Figur 6. *Bild tagen från Alkhateeb (2019, s. 409).*

De elever som ansåg att $\frac{1}{2}$ av figuren var skuggad tog endast hänsyn till den sista rektangeln, som är indelad i två delar. Eleverna som menade att $\frac{1}{3}$ var skuggad uppfattade att den skuggade delen var en del av tre trianglar. De elever som ansåg att $\frac{1}{5}$ var skuggad menade att 1 del var skuggade och 5 delar var inte det.

3.4.2 Kritiska aspekter från tidigare studie kopplat till variationsteorin

I en studie av Kullberg och Runesson (2013), som utgått från variationsteorin, undersöktes elevers förståelse för stambråk och icke-stambråk i relation till diskreta mängder. Förtestet visade att flera elever hade svårare att beräkna uppgifter med icke-stambråk än med stambråk. På förtestet kunde nästan hälften av eleverna beräkna vad $\frac{1}{3}$ av 9 var. Det var däremot svårare att beräkna uppgifter likt $\frac{2}{3}$ av 6. Det mest förekommande svaret på $\frac{2}{3}$ av 6 var 3, några elever svarade även 2 eller 5. Författarna beskriver att en möjlig faktor till att eleverna hade svårt att dela in en diskret mängd kunde bero på elevernas bristande förståelse för täljaren och nämnaren. De kritiska

aspekterna som användes i studien var: att eleverna behövde bli medvetna om hur många objekt som utgör en helhet och att de behövde förstå innebörden av täljaren och nämnaren i bråktalet. Efter analys av lektionerna synliggjordes olika sätt som eleverna uppfattade tal i bråkform. Några elever tog hänsyn till nämnaren när de skulle dela in en mängd. När eleverna skulle ringa in $\frac{1}{3}$ och $\frac{2}{3}$ av 12 jordgubbar svarade eleverna att det var 3 jordgubbar. Det fanns även de elever som tog hänsyn till täljaren, då eleverna tänkte att $\frac{2}{4}$ av 12 var 2 (Kullberg & Runesson, 2013).

4 Metod

I följande avsnitt beskrivs val av metod (4.1), urval (4.2), genomförande (4.3) samt etiska aspekter (4.4).

4.1 Val av metod

Studien genomfördes ur ett variationsteoretiskt perspektiv med inspiration från Learning Study. Studien utgick från en cyklisk process som innefattade planering av lektioner, genomförande, observation, analys samt revidering, vilket kännetecknar Learning study (Carlgren et al., 2017). Något som skiljer våran studie från en Learning study är att vi inte filmade lektionerna, vilket annars är vanligt förekommande. Studien är även en förkortad version, då den cykliska processen ofta fortsätter med nya cykler i en Learning study (Carlgren et al., 2017).

Insamling av data gjordes kvalitativt genom förtest (se bilaga 1), observation av lektioner samt ett eftertest (se bilaga 2). Då syftet med studien var att utveckla elevernas förståelse för lärandeobjektet ansågs en kvalitativ metod passande. För att analysera lektionerna användes strukturerade observationer, vilket enligt Segolsson (2021) innebär att forskare utgår från något specifikt som ska studeras. För att dokumentera lektionerna och elevernas svar användes ett strukturerat observationsprotokoll (se bilaga 3). Vi utformade detta protokoll med utgångspunkt i förutbestämda situationer att observera, i enlighet med Segolsson (2021).

4.2 Urval

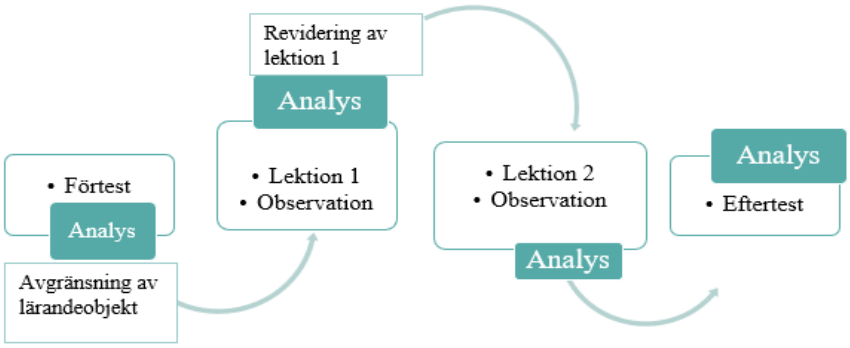
Studien genomfördes i två klasser i årskurs 2. Vi har utgått från ett bekvämlighetsurval, vilket enligt Bryman (2018) innebär att de personer som deltar i studien finns tillgängliga för forskarna. Vi har haft verksamhetsförlagd utbildning (VFU) i klasserna som studien genomförts i, samt att en av oss genomförde sin VFU precis innan studien påbörjades. Sammanlagt deltog 33 elever vid något tillfälle under studien, men då det blev en del bortfall analyserades endast de 26 elever som deltagit under alla moment.

Vid skapandet av förtestet gjordes ett urval av uppgifter som grundades i tidigare

forskning och kursplanen för matematik i årskurs F-3 (Skolverket, 2022a). Genom förtestet ville vi få en överblick av elevernas förkunskaper om tal i bråkform samt tänkbara kritiska aspekter, därav varierade uppgifterna i svårighetsgrad. Förtestet var även omfattande eftersom vi ville få med olika delar om tal i bråkform, vilket kan kopplas till Bergqvist och Echevarria (2013). Författarna menar att förtestet kan vara omfattande trots att lärandeobjektet ska vara avgränsat. För att utforma förtestet tog vi inspiration samt använde bilder från Diamantdiagnoserna "Del av en hel" och "Flera delar av en hel" (Nationellt centrum för matematikutbildning, u.å.).

4.3 Genomförande

Nedan beskrivs genomförandets process kortfattat med hjälp av en modell som sedan följs av beskrivningar av de olika momenten.



Figur 7. *Övergripande beskrivning av genomförandet.*

Vi började med att formulera ett övergripande lärandeobjekt som handlade om att utveckla förståelse för tal i bråkform med fokus på täljaren och nämnarens betydelse. Vi tog del av forskning och litteratur om området samt om elevers svårigheter och missuppfattningar. Utifrån forskning och litteratur konstruerades ett förtest som behandlade kontinuerlig och diskret mängd samt täljaren och nämnarens betydelse. Testet genomfördes i två klasser där 30 av 33 elever deltog. När eleverna utförde testet antecknades elevernas resonemang. Efter genomförandet analyserades testen kvantitativt för att göra en sammanställning av vilka uppgifter som eleverna hade svårt för. Därefter analyserades testet kvalitativt för att identifiera kritiska aspekter. Analysen var även underlag för planering av lektion 1 och omformulering av lärandeobjektet. Lektion 1 genomfördes i klass A där 16 elever deltog. Innehållet som behandlades var kontinuerlig och diskret mängd. En av oss höll i lektionen medan den andre observerade utifrån ett observationsprotokoll där iakttagelser och elevsvar antecknades. Efter lektionen

analyserades observationsprotokollet samt elevernas arbetsblad kvalitativt. Utifrån analysen gjordes en revidering inför lektion 2. Lektion 2 genomfördes i klass B där 14 elever deltog. Innehållet i lektionen var detsamma som behandlades under lektion 1 med revideringar i variationsmönster. Under lektion 2 bytte vi roller, vilket innebar att den som höll i lektion 1 observerade lektion 2. Lektionen observerades med hjälp av ett observationsprotokoll. Efter lektion 2 analyserades observationsprotokollet och elevernas arbetsblad kvalitativt. När lektion 1 och 2 genomförts fick eleverna i båda klasserna genomföra ett eftertest. Syftet med testet var att få syn på om variationsmönstren i undervisningen möjliggjorde att eleverna urskilde de kritiska aspekterna. Eftertestet var nästan identiskt med förtestet, endast ett fåtal ändringar gjordes i form av att vi bytte ut bråktal samt figurer (se bilaga 2). Den kvalitativa analysen innebar att vi jämförde varje elevs för- och eftertest för att få syn på om eleven urskilt de kritiska aspekterna. I jämförelsen markerades de uppgifter där eleven visade att hen urskilt aspekterna.

4.4 Etiska aspekter

När forskning ska bedrivas finns det fyra allmänna huvudkrav som ska följas, vilket är informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 2002). Denna studie har tagit hänsyn till dessa fyra huvudkrav. Informationskravet innebär att de personer som deltar i studien ska bli informerade om studiens moment samt syfte. Deltagarna ska även informeras om att det är frivilligt att delta samt att det är möjligt att avsluta sin medverkan under studiens gång. Innan studien påbörjades fick vårdnadshavare samt elever information om studien genom en samtyckesblankett (se bilaga 4), där syftet med studien beskrevs samt hur den skulle genomföras. Vidare innebär samtyckeskravet att alla deltagare i studien själva bestämmer om de vill delta. Vi tog hänsyn till detta krav genom att vårdnadshavare fick skriva under samtyckesblanketten om de ville att deras barn skulle delta eller inte. Konfidentialitetskravet innefattar att inga uppgifter ska kunna spåras till studiens deltagare. Vi informerade deltagarna om att deras namn, skola och kommun kommer avidentifieras samt att allt material som samlats in förstörs efter studiens genomförande. Nyttjandekravet innebär att den data som samlades in från studien endast får användas i forskningsändamål, vilket vi beskrev i samtyckesblanketten.

5 Resultat

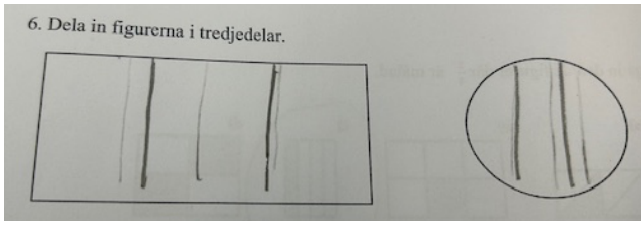
I detta avsnitt kommer resultatet presenteras utifrån frågeställningarna:
Vilka kritiska aspekter kan identifieras för att förstå tal i bråkform?
Vilka variationsmönster främjar elevernas möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna för lärandeobjektet?

5.1 Kritiska aspekter som identifierats av förtestet

Utifrån analys av förtestet identifierades tre kritiska aspekter som kommer presenteras i följande avsnitt.

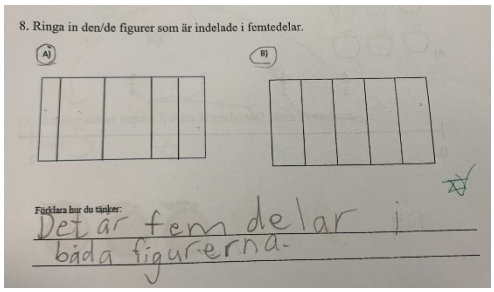
5. 1. 1 Urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora (KA1)

Analysen av förtestet visade att majoriteten av eleverna inte urskilt att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora. I uppgift 6 (se figur 8) kunde KA1 identifieras genom att eleverna skulle dela in en rektangel och en cirkel i tredjedelar.



Figur 8. *Elevexempel, uppgift 6.*

Flera elever visade svårigheten med uppgiften, speciellt att dela in cirkeln i lika stora delar. Även i uppgift 8 (se figur 9) synliggjordes KA1 när eleverna skulle ringa in en av två figurer som var indelad i femtedelar, vilket resulterade i blandade elevsvar.

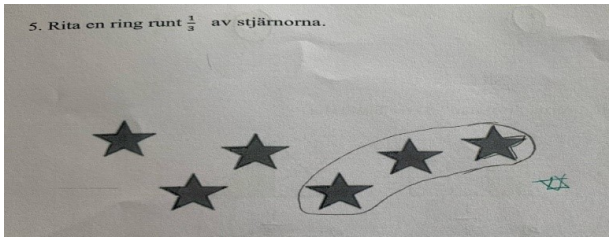


Figur 9. *Elevexempel, uppgift 8.*

Flertalet elever svarade att båda figurerna var indelade i femtedelar. I elevexemplet synliggjordes detta, då eleven motiverar sitt val genom att beskriva att båda rektanglarna var indelade i fem delar.

5.1.2 Urskilja att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen mellan del och helhet (KA2)

När eleverna skulle dela in en diskret mängd i bråkdelar visade flera elever på svårigheter. I uppgift 5 (se figur 10) skulle eleverna ringa in $\frac{1}{3}$ av 6 stjärnor. Det mest förekommande svaret var att eleverna ringade in 3 stjärnor.

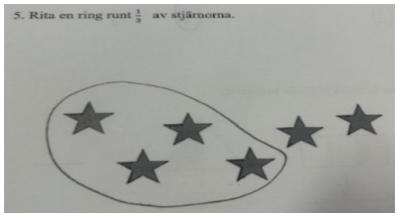


Figur 10. *Elevexempel, uppgift 5.*

I samtal med elever som ringade in 3 stjärnor motiverade de svaret med att det stod en trea i bråktalet. Detta resonemang kan bero på att eleverna inte urskilt att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen mellan del och helhet. Eleverna tolkade $\frac{1}{3}$ som 1 grupp med 3 i varje. Några elever valde även att ringa in 1 stjärna. Utifrån analysen av elevsvaren framkom det att de tolkade täljaren och nämnaren som två enskilda heltal.

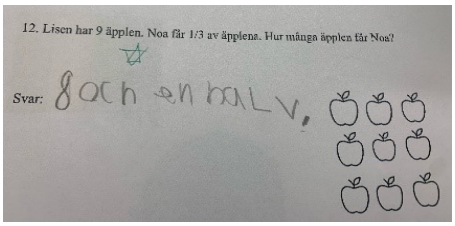
5.1.3 Urskilja att en diskret mängd delas in i lika antal objekt (KA3)

I förtestet visade ett antal elever svårigheter med att dela in en mängd i lika antal objekt. I uppgift 5 (se figur 11) skulle eleverna ringa in $\frac{1}{3}$ av 6 stjärnor. Ett vanligt förekommande svar var att eleverna ringade in 4 stjärnor.



Figur 11. *Elevexempel, uppgift 5.*

En elev som ringade in 4 stjärnor beskrev att hen adderade 1 och 3 i bråkuttrycket $\frac{1}{3}$. KA3 blev även synlig i uppgift 12 (se figur 12), då flera elever inte delade in mängden i lika antal objekt.



Figur 12. *Elevexempel, uppgift 12.*

Tillämpning av subtraktion synliggjordes av en elev i uppgift 12. Eleven uppfattade $\frac{1}{3}$ som en halv och beskrev att hen subtraherade en halv från 9 äpplen.

5.2 Variationsmönster under lektion 1

I detta avsnitt presenteras variationsmönster för lektion 1. Under rubrik 5.2.1 redovisas vilka kritiska aspekter eleverna under lektion 1 urskilt samt inte urskilt. För att tydliggöra vilka variationsmönster samt kritiska aspekter som använts till vilken sekvens under lektionen har en tabell konstruerats.

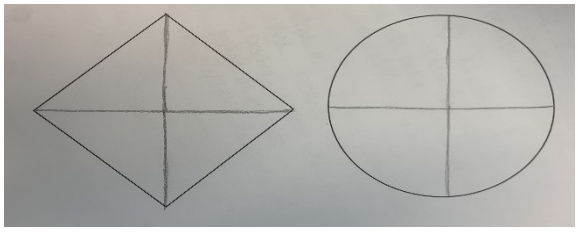
Tabell 1: *Variationsmönster och kritiska aspekter under lektion 1.*

Klass A. Sekvenser	Variationsmönster	Kritisk aspekt
Sekvens 1: Helklassdiskussion kring två rektanglar som är indelade på olika sätt. Arbetsblad, dela in figurer i fjärdedelar.	**Kontrast:** Varierar: delarnas yta Konstant: antalet delar & figurer Arbetsblad: **Generalisering:** Cirkel och romb Varierar: Figurer Konstant: bråkdelar, antalet delar	KA1: Urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora.
Sekvens 2: dela in en mängd i bråkdelar. 1.Dela in mängden 6 i tredjedelar. 2.Dela in mängden 9 i tredjedelar	**Kontrast:** Varierar: mängden Konstant: bråkdelar - tredjedelar	KA2: Urskilja att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen mellan del och helhet. KA3: Urskilja att en diskret mängd delas in i lika antal objekt.

Lektionen började med sekvens 1 där eleverna skulle få möjlighet att urskilja den kritiska aspekten: *urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora (KA1).* I sekvens 1 visades ett variationsmönster som innehöll kontrast där delarnas yta varierade medan antalet delar och figurer var konstanta (se figur 13). I variationsmönstret var figuren och antalet delar konstanta för att synliggöra delarnas yta som varierade. Kontrast synliggjordes genom att jämföra två figurer som var indelade på olika sätt.

Figur 13. *Figurerna är konstanta medan delarnas yta varierar.*

Syftet med kontrast var att synliggöra att en figur som är indelad i bråkdelar har lika stora delar genom att jämföra en figur som inte är indelad i lika stora delar. Eftersom delarnas yta varierade mot en konstant bakgrund synliggjordes kontrast. Detta möjliggjorde att majoriteten av eleverna kunde identifiera skillnaderna och några elever kunde motivera varför figuren till vänster var indelad i fjärdedelar. Eleverna påpekade även att figuren till höger inte hade lika stora delar och därför var figuren inte indelad i fjärdedelar. I samband med sekvens 1 fick eleverna ett arbetsblad (se figur 14). Variationsmönstret i arbetsbladet bestod av generalisering där två figurer, en romb och en cirkel, varierade medan antalet delar eleverna skulle dela in figurerna i, fjärdedelar, var konstanta.

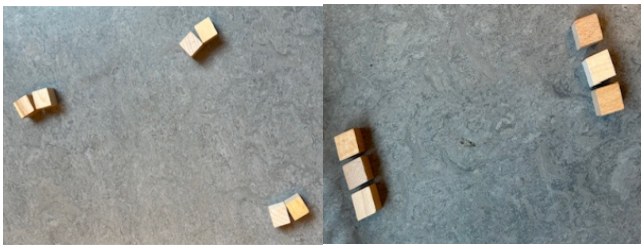


Figur 14. *Elevexempel på hur eleven delat in figurerna.*

Syftet med generalisering i arbetsbladet var att eleverna skulle generalisera sin kunskap genom att dela in andra figurer i bråkdelar. Analys av arbetsblad och observation visade att eleverna kunde dela in figurerna i bråkdelar. Dessvärre upptäckte vi att valet av figurer resulterade i att eleverna kunde delade in figurerna på samma sätt.

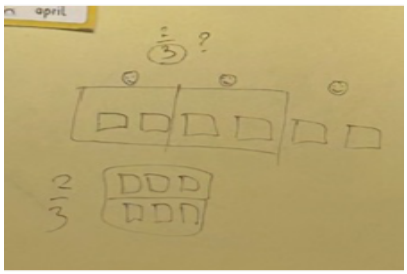
Variationsmönstret i sekvens 2 skulle möjliggöra att eleverna urskilde de kritiska aspekterna KA2: *urskilja att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen*

mellan del och helhet samt KA3: *urskilja att en diskret mängd delas in i lika antal objekt.* Variationsmönstret innefattade att mängden (kuber) varierade medan bråkdelarna (tredjedelar), var konstanta. Eftersom bråkdelen ($\frac{1}{3}$) var konstant kunde variationsmönstret synliggöra hur en tredjedel förhåller sig till olika mängder (6 och 9). Mängderna 6 och 9 synliggjorde att $\frac{1}{3}$ varierade i antal beroende på mängden. Variationsmönstret möjliggjorde att eleverna fick erfara hur $\frac{1}{3}$ förhåller sig till olika mängder genom laborering. Under lektionen skapades en slags kontrast utifrån elevernas olika delningar av mängden 6. Flera elever delade in mängden 6 i 2 högar med 3 kuber i varje med resonemanget att en tredjedel innefattar 3 kuber (se figur 15), på grund av att de tolkade $\frac{1}{3}$ som 1 hög med 3. Det var även några elever som valde att dela in mängden 6 i 3 högar med 2 kuber i varje.



Figur 15. *Elevexempel där eleven ansåg att $\frac{1}{3}$ av 6 kuber är 2 samt ett elevexempel där eleven ansåg att $\frac{1}{3}$ av 6 är 3.*

Kontrasten mellan delningarna synliggjorde KA3 ytterligare. Resonemangen bakom de olika delningarna lyftes och ritades på tavlan för att synliggöra kontrasten. En av eleverna som hade delat upp mängden i tredjedelar kopplade delningen till en elevnära situation: 3 kompisar delar på 6 godisar och varje kompis får 2 godisar var. För att synliggöra KA2 och KA3 ytterligare kopplades elevexemplet till att lyfta innebörden av varje bråkdel av mängden som illustrerades på tavlan (se figur 16).

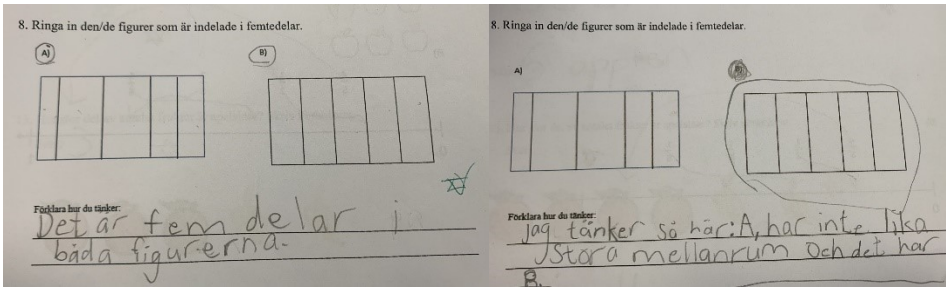


Figur 16. *Kontrast genom att lyfta två olika delningar i relation till elevexemplet*

Utifrån elevexemplet samt diskussion varierade också bråkdelarna i form av antal bråkdelar. Eleverna hade liknande resonemang vid laborering av 9 kuber, då eleverna ansåg att en tredjedel av 9 innefattade 3 kuber. Variationen av mängden 6 och 9 i samband med bråkdelarna som var konstanta möjliggjorde en jämförelse av antalet bråkdelar i relation till mängden. Detta synliggjorde att en tredjedel av 6 kuber resulterade i 3 högar om 2 och en tredjedel av 9 resulterade i tre högar om 3, vilket blev en kontrast som skulle synliggöra nämnarens betydelse.

5.2.1 Kritiska aspekter som eleverna urskilt och inte urskilt

Analys av lektion 1 samt jämförelse mellan för- och eftertest i klass A visade att eleverna urskilt några av de kritiska aspekterna. I eftertestet kunde vi se att flera elever urskilt KA1, *urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora.* Detta synliggjordes i uppgift 8 (se figur 17). I eftertestet kunde eleverna ringa in vilken av figurerna som var indelad i femtedelar samt motivera för att alternativ b var indelad i femtedelar.

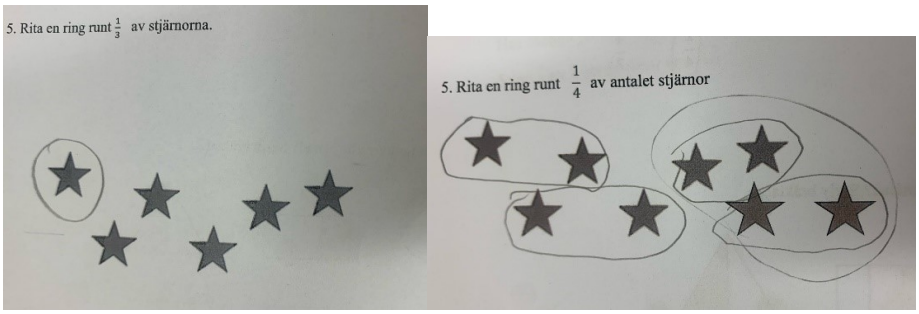


Figur 17. *Uppgift 8. Jämförelse mellan för- och eftertest som visar att eleven urskilt KA1.*

I förtestet ansåg flera elever att båda figurerna var indelad i femtedelar medan analysen av eftertestet visade att eleverna nu urskilt aspekten. I eftertestet förklarade eleverna att alla delar måste vara lika stora och att figuren till höger är indelad i femtedelar. Det som möjliggjorde att flera elever urskilde den kritiska aspekten kan bero på variationsmönstret under sekvens 1. Genom variationsmönstret kontrast kunde KA1 synliggöras genom att visa en figur som är indelad i bråkdelar i jämförelse med en figur som inte är det.

Det var ett fåtal elever som urskilde de kritiska aspekterna *Urskilja att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen mellan del och helhet (KA2)* samt *urskilja att en*

diskret mängd delas in i lika antal objekt (KA3). Detta synliggjordes i analysen som visade att majoriteten av eleverna hade svårigheter med att dela in en mängd samt förstå att ett tal i bråkform representerar *ett* tal. Ett fåtal elever visade att de urskilt aspekterna genom att dela in en diskret mängd i lika antal objekt (se figur 18).



Figur 18. *Jämförelse mellan för- och eftertest.*

Elevens resonemang som illustreras i figur 18 antecknades i observationsprotokollet. Eleven förklarade att $\frac{1}{4}$ av 8 stjärnor blir 2 eftersom man delar in stjärnorna i fyra lika stora delar. En möjlig orsak till att de flesta elever inte urskilt KA3 kan kopplas till variationsmönstret under sekvens 2, då vi inte synliggjorde aspekten tillräckligt. Under sekvens 2 var bråkdelarna konstanta medan mängden varierade. Eleverna fick inte möjlighet att laborera med varierade bråkdelar för att synliggöra att en mängd delas in i lika antal objekt.

Sammanfattningsvis visade analysen av lektion 1 samt kvalitativ analys av resultatet från för-och eftertest att majoriteten av eleverna inte fått möjlighet att urskilja alla kritiska aspekter. De exempel som visade att eleverna urskilt aspekter representerar endast ett fåtal av eleverna, bortsett från KA1. Majoriteten av eleverna hade däremot urskilt KA1, då de delade in figurer i lika stora delar samt argumentera för vilka figurer som var indelade i bråkdelar. Utifrån observationsprotokollet, där elevsvar antecknades från lektionen, kunde vi se att vissa elever var på god väg att urskilja KA2 och KA3. Detta blev däremot inte synligt i eftertestet.

5.3 Revidering av lektion 1

Utifrån analys av variationsmönstret för sekvens 1 reviderades variationsmönstret till lektion 2, för att eleverna skulle få möjlighet att urskilja KA1. Inför lektion 2 utökades variationsmönstret genom generalisering av figurer samt hur figurerna kan delas in på olika sätt. Analys av sekvens 2 visade att variationsmönstret inte möjliggjorde att

eleverna urskilde KA2 och KA3. Vi reviderade därför variationsmönstret för sekvens 2 under lektion 2, genom att hålla mängden konstant medan bråkdelarna varierade. Vi utökade även variationsmönstret med kontrast.

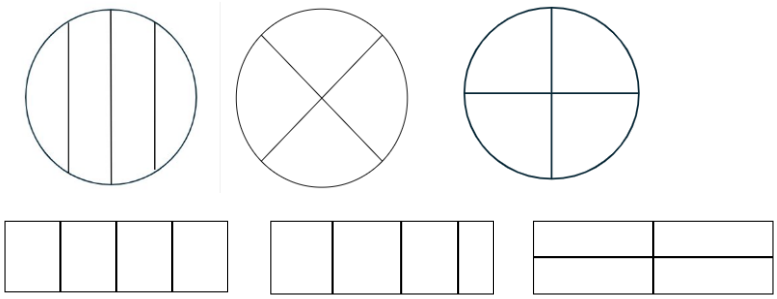
5.4 Variationsmönster under lektion 2

I avsnittet kommer variationsmönster för lektion 2 presenteras. Under rubrik 5.4.1 redogörs för vilka kritiska aspekter eleverna under lektion 2 urskilt samt inte urskilt. Nedan redovisas en tabell som tydliggör vilka variationsmönster samt kritiska aspekter som använts till sekvenserna under lektionen.

Tabell 2: *Variationsmönster och kritiska aspekter under lektion 2*.

Klass B Sekvens	Variationsmönster	Kritisk aspekt
Sekvens 1: Helklassdiskussion kring figurer där vissa var indelade i fjärdedelar och vissa i fyra delar. Rektanglar och cirklar. Arbetsblad, dela in cirkel och rektangel i tredjedelar.	**Kontrast** **Generalisering** Varierar: Figurer & delarnas yta Konstant: Antalet delar Arbetsblad: Varierar: Figurer Konstant: delarna	KA1: Urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora.
Sekvens 2: Eleverna skulle dela in en mängd i bråkdelar. 1.Eleverna diskuterade och funderade kring två olika delningar av mängden 12. 2.Delade in mängden 12 i tredjedelar. 3.Delade in mängden 12 i fjärdedelar	**Kontrast**. Varierar: Delarna - bråkdelar. (Tredjedelar och fjärdedelar) Konstant: Helheten - mängd	KA2: Urskilja att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen mellan del och helhet KA3: Urskilja att en diskret mängd delas in i lika antal objekt.

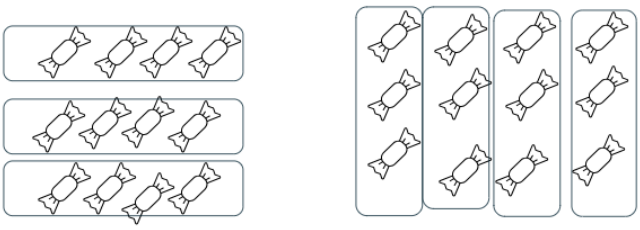
Syftet med variationsmönstret i sekvens 1 var att eleverna skulle utskilja KA1: *Urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora.* Lektionen började med sekvens 1 där variationsmönstret innefattade generalisering och kontrast. Generalisering synliggjordes genom att visa exempel på hur två olika figurer kan delas på olika sätt. Kontrast synliggjordes då en av varje figur inte var indelad i bråkdelar. I variationsmönstret varierade ytornas storlek samt delning medan figurerna var konstanta.



Figur 19. *Variationsmönster för sekvens 1.*

I variationsmönstret visades först 3 cirklar, 2 cirklar var indelade i fjärdedelar och 1 cirkel var indelad i fyra delar. Sedan visades en bild på 3 rektanglar, 2 rektanglar var indelade i fjärdedelar och 1 rektangel var indelad i fyra delar. Syftet med generaliseringen av figurerna var att eleverna skulle få möjlighet att urskilja KA1 samt generalisera kunskapen genom att erfara flera delningar på två olika figurer. Eleverna fick även möjlighet att erfara hur samma figur kan delas på olika sätt. Kontrasten synliggjordes genom att visa vad en bråkdel är genom att visa vad det inte är. I samband med sekvens 1 fick eleverna ett arbetsblad där de skulle dela in figurerna i tredjedelar. Syftet med att eleverna fick dela in figurerna i tredjedelar var för att få syn på om eleverna urskilt KA1.

Variationsmönstret i sekvens 2 skulle ge eleverna möjlighet att urskilja KA2 och KA3. Kontrast synliggjordes genom att visa två olika delningar av mängden 12 (se figur 20). I variationsmönstret varierade bråkdelar, i form av tredjedelar och fjärdedelar, medan mängden hölls konstant. Eleverna fick diskutera uppgiften som löd: “Ella köpte 12 godisar. Hon ska dela in mängden godisar i fjärdedelar. Hur många godisar är $\frac{1}{4}$ av 12 godisar?” I samband med frågeställningen visades två exempel (se figur 20).



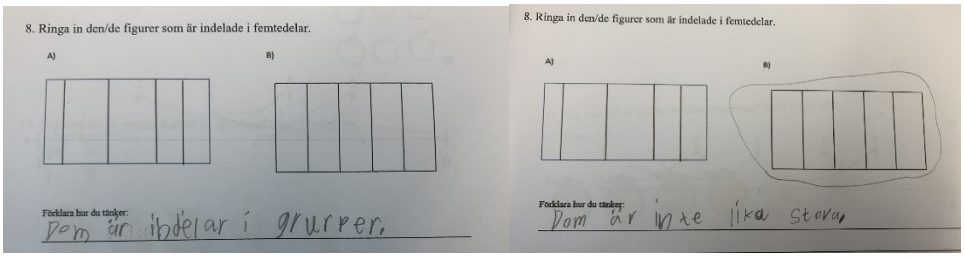
Figur 20. *Två exempel på hur Ella delat in sitt godis.*

Här användes variationsmönstret kontrast för att eleverna skulle få möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna KA2 och KA3. Eleverna fick sedan laborera med 12 kuber för att testa de två exemplen. Kontrasten i samband med laboreringen resulterade i diskussioner

om elevernas olika delningar. Majoriteten av eleverna delade upp de 12 kuberna i 3 högar med 4 kuber i varje hög, medan två elever delade upp i 4 högar med 3 i varje. Liknande som i lektion 1 blev elevernas olika delningar en oplanerad kontrastering. Bråkdelarna som varierade mot den konstanta mängden möjliggjorde att KA2 och KA3 synliggjordes. Eftersom bråkdelarna, tredjedelar och fjärdedelar, varierade fick eleverna möjlighet att urskilja KA3 genom att jämföra hur bråkdelarna varierade i relation till den konstanta mängden. Detta gjorde att eleverna fick syn på att när de delade in kuberna i fjärdedelar delades mängden in i 4 högar och när de delade mängden i tredjedelar blev det 3 högar.

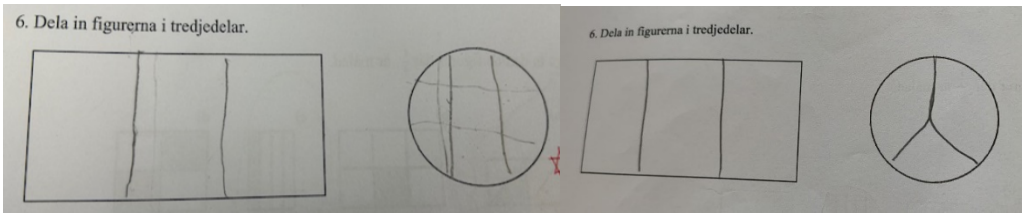
5.4.1 Kritiska aspekter som eleverna urskilt och inte urskilt

Analys och jämförelse av för- och eftertest visade att majoriteten av eleverna i grupp B hade urskilt KA1. På fråga 8 (se figur 21) kunde de flesta elever motivera vilken av de två rektanglarna som var indelad i femtedelar.



Figur 21. *Elevexempel, fråga 8.*

De elever som ansåg att alternativ b var rätt motiverade att figuren var indelad i lika stora delar. Analysen av uppgift 6 (se figur 22) visade också att eleverna urskilt KA1. I förtestet delade flera elever in cirkeln och rektangel på samma sätt och i eftertestet delade eleverna in figurerna på olika sätt.

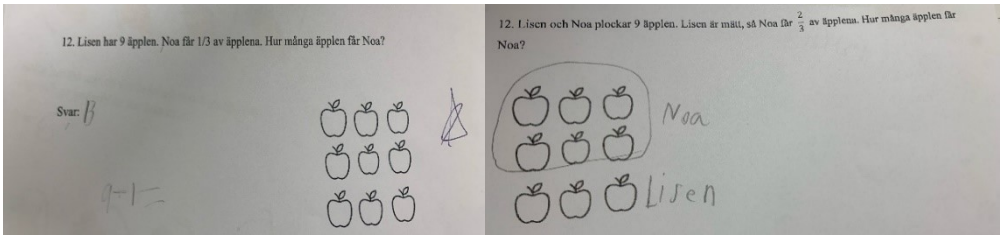


Figur 22. *Elevexempel, uppgift 6. Jämförelse mellan för- och eftertest.*

Eleven visar att hen urskilt KA1 eftersom eleven visar en utveckling i hur hen delar in figurerna. I förtestet delar eleven in båda figurerna vertikalt och tar därför inte hänsyn till delarnas yta. I eftertestet visar eleven att hen kan dela in figurerna i lika stora delar

genom att anpassa ytorna efter figuren. Resultatet som visade att eleverna urskilt KA1 kan bero på variationsmönstret i sekvens 1. Under sekvensen fick eleverna erfara kontrast och generalisering där figurers indelningar jämfördes för att visa på skillnaden mellan bråkdel och del.

Analys och jämförelse av uppgift 12 (se figur 23) i för- och eftertest visade att ett fåtal elever urskilt KA2 och KA3.



Figur 23. *Elevexempel som visar att eleven urskilt KA2 och KA3.*

I förtestet tog eleverna endast hänsyn till täljaren eller nämnaren när de svarade att $\frac{1}{3}$ av 9 äpplen är 1 eller 3. I eftertestet visade eleverna att de tog hänsyn till hela mängden äpplen när de skulle svara på vad $\frac{2}{3}$ av 9 äpplen var. Anledningen till att eleverna urskilt KA2 och KA3 kan bero på variationsmönstret i sekvens 2. I sekvens 2 fick eleverna laborera med en konstant mängd medan bråkdelarna varierade, vilket kan ha synliggjort KA2 och KA3.

Sammanfattningsvis visade analysen av lektionen samt resultat av för-och eftertest att majoriteten av eleverna urskilt KA1. Eleverna delade in figurer i lika stora delar samt redogjorde för vilken figur som var indelade i bråkdelar. I förtestet delade flertalet elever in två olika figurer på samma sätt, medan eftertestet visade att majoriteten av eleverna dela in figurerna på olika sätt och i bråkdelar. Under lektionen fick eleverna möjlighet att erfara generalisering där figurer och indelningar varierade för att synliggöra KA1. Resultatet visade även att några elever urskilt KA2 och KA3. Under sekvens 2 fick eleverna erfara kontrast koppat till diskret mängd för att synliggöra de kritiska aspekterna. I variationsmönstret varierade bråkdelarna mot en konstant mängd.

6 Diskussion

I detta avsnitt presenteras metoddiskussion (6.1), resultatdiskussion (6.2) samt vidare forskning (6.3).

6.1 Metoddiskussion

Studiens genomförande och metod har inspirerats av processen i en Learning study. Den cykliska processen för genomförandet har varit fördelaktig för att svara på frågeställningarna. Data har samlats in genom observation av två lektioner samt för- och eftertest. I skapandet av det avsedda lärandeobjektet utgick vi från tidigare forskning (se exempelvis Alkhateeb, 2019; Gould, 2006; Ni & Zhou, 2005; Empson, 1999) samt läroplanen (Skolverket, 2022), då vi inte var verksamma lärare i klasserna som studerades. Vi upplevde det svårt att skapa ett avgränsat lärandeobjekt eftersom vi inte hade en fullständig överblick av elevernas förkunskaper, vilket resulterade i att det avsedda lärandeobjektet till en början var övergripande.

För att besvara den första frågeställningen samlades data in i form av ett förtest, vilket bidrog till att identifiera kritiska aspekter. Förtestet var omfattande för att behandla flera aspekter för tal i bråkform, vilket exempelvis innefattade att storleksordna bråk på en tallinje. Efter förtestet planerades lektioner med fokus på variationsmönster som behandlade det iscensatta lärandeobjektet, vilket innefattade det som eleverna skulle få möjlighet att lära (Runesson, 2017). Det iscensatta lärandeobjektet behandlade kontinuerligt och diskret mängd. I efterhand anser vi att det hade varit fördelaktigt att avgränsa lärandeobjektet ytterligare till att endast fokusera på diskret mängd, då omfattningen kan ha påverkat elevernas erfarande av lärandeobjektet. Anledningen till att lärandeobjektet behandlade både diskret och kontinuerlig mängd grundades i resultatet av förtestet. Resultatet visade att flertalet elever hade svårt att dela in en figur (kontinuerlig mängd) i bråkdelar samtidigt som majoriteten kunde dra streck mellan ett bråktal och en figur (se bilaga 1, uppgift 7). Figurerna som redan var indelade i bråkdelar på förtestet var svåra att bedöma eftersom de inte visade elevernas förståelse, vilket även Gould et al. (2006) diskuterar i sin studie. I studien menar Gould (2006) att enbart använda figurer som är indelade inte är tillräckligt i bedömningssyfte. På grund av svårigheter att bedöma

elevernas förståelse för kontinuerlig mängd valde vi att behandla området i undervisningen. Däremot valde vi att främst fokusera på diskret mängd, vilket resulterade i att kontinuerlig mängd behandlades under en kort sekvens.

För att besvara den andra frågeställningen planerades, genomfördes och observerades 2 lektioner utifrån variationsteorin. Observation ansågs vara en fördelaktig metod för att dokumentera händelser och elevsvar under lektionerna, däremot kan det finnas en risk att observationen påverkat resultatet. Under observationerna kan vi misstolkat elevernas diskussioner och tankar samt gått miste om viktiga aspekter i undervisningen (Segolsson, 2021). För att få syn på om variationsmönstren möjliggjorde ett lärande analyserades och jämfördes för- och eftertest kvalitativt. Testerna var nästan identiska, förutom några uppgifter som reviderades. Uppgift 12 justerades eftersom $\frac{1}{3}$ av 9 blir 3. Bråktalet i uppgiften gjorde det svårt att tolka om eleverna urskilt den kritiska aspekten eller om de endast tog hänsyn till nämnaren. I eftertestet omformulerades uppgiften till $\frac{2}{3}$ av 9 äpplen. På grund av revideringen kan reliabiliteten ifrågasättas, då det kan påverkat resultatet (Bryman, 2018). I efterhand anser vi att revideringen av uppgift 12 även kan diskuteras på grund av att uppgiften inte innefattade ett stambråk, vilket kan påverkat resultatet. Ytterligare en uppgift som skapat diskussion var uppgift 13. Uppgiften behandlade diskret mängd där objekten innefattade olika frukter, apelsiner och bananer. Under lektionerna nämnde vi aldrig att en diskret mängd kan innehålla olika objekt, då det var en kritisk aspekt som synliggjordes efter studien. Eftersom vi gjorde revideringar av för- och eftertest kan validiteten av resultatet diskuteras, då vi inte mätte det som avsågs mätas (Bryman, 2018). Validiteten kan även ifrågasättas då vi efter analys av lektion 1, sekvens 1, upptäckte att vi undervisat om samma exempel som i uppgift 8 på för- och eftertest (se bilaga 1 & 2). Genom användningen av samma exempel kan resultatet för eleverna i klass A ifrågasättas. Eftersom vi har analyserat och tolkat elevsvaren från för- och eftertest kan resultatets trovärdighet ifrågasättas. Det hade därför varit intressant att intervjua några elever för att få en tydligare förståelse för hur de tänkt kring uppgifterna.

En styrka med studiens urval var att vi genomfört VFU i klasserna och därför hade en kontakt etablerats innan studien genomfördes. Däremot anser vi att vi hade kunnat utöka antalet klasser för att få ett större urval. I början av studien tillfrågades endast en klass, vilket vi ansåg resulterade i för lite data och därmed tillfrågades ytterligare en klass. Då

inte alla elever deltog i studien samt att det blev en del bortfall under studiens gång analyserades endast 26 elever. Vi anser dock att ett större urval inte hade bidragit till ett mer generaliserbart resultat, då kritiska aspekter är kopplade till en specifik elevgrupp samt lärandeobjekt (Marton, 2015).

6.2 Resultatdiskussion

I resultatdiskussionen kommer diskussion föras kring de kritiska aspekterna som identifierats i förtestet under rubriken Kritiska aspekter (6.2.1). Under rubriken Jämförelse mellan för- och eftertest kopplat till variationsmönster (6.2.2) diskuteras huruvida variationsmönstren gav eleverna möjlighet att urskilja kritiska aspekter.

6.2.1 Kritiska aspekter

De kritiska aspekter som identifierades i förtestet och behandlades i denna studie var: *Urskilja att alla delar i en kontinuerlig mängd ska vara lika stora (KA1), Urskilja att ett tal i bråkform är ett tal som representerar relationen mellan del och helhet (KA2)* och *Urskilja att en diskret mängd delas in i lika antal objekt (KA3).*

KA1 identifierades genom att flera elever delade figurer utan att ta hänsyn till att delarnas yta ska vara lika stora. Aspekten blev även synlig genom elevernas resonemang kring vilken figur som var indelad i bråkdelar. Liknande resultat synliggjordes i studierna av Gould et al. (2006) och Alkhateeb (2009). Gould et al. (2006) förklarar att bristande förståelse för indelning av bråkdelar kan bero på att elever endast tar hänsyn till antal delar som figuren är indelad i, istället för att delarna ska vara lika stora. KA2 identifierades genom att eleverna visade en bristande förståelse för hur ett bråktal representerar en del av en diskret mängd. Detta synliggjordes genom att eleverna tog hänsyn till täljaren eller nämnaren när de skulle ringa in objekt. Analysen av förtestet visade att majoriteten av eleverna hade svårt att förstå att ett tal i bråkform representerar relationen mellan del och helhet. De mest förekommande elevsvaren på uppgift 5, där eleverna skulle ringa in 1/3 av 6 stjärnor, var 1 eller 3. Elevsvaren som synliggjordes vid analysen kan kopplas till studierna av Empson (1999) och Ni och Zhou (2005). Empsons studie visar på liknande elevresonemang som uppmärksammades i vår analys. Författaren

menar att dessa resonemang kan kopplas till att eleverna har en bristande förståelse för täljaren och nämnarens relation och betydelse. KA3 synliggjordes i uppgift 12, då några elever delade varje enskilt äpple i tredjedelar istället för att dela in hela mängden äpplen. Indelningen visade att eleverna inte urskilt att en diskret mängd delas in i lika antal objekt. Analysen av elevsvaren kan kopplas till studien av Kullberg och Runesson (2013, s. 564). Det framkom även i deras studie att flera elever hade svårt att operera med bråk kopplat till en diskret mängd. En möjlig orsak kunde bero på att eleverna inte uppfattade hur många grupper en mängd skulle delas in i samt hur många objekt varje grupp skulle innehålla.

6.2.2 Jämförelse av för- och eftertest kopplat till variationsmönster

Då studien utgått från variationsteorin planerades variationsmönster för att eleverna skulle få möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna. Resultatet av den kvalitativa analysen av för- och eftertest mellan klasserna visade att variationsmönstret i sekvens 1 under lektion 2 kan ha möjliggjort ett lärande. Majoriteten av eleverna i klass B visade en ökning av rätt svar för de uppgifter som kunde visa att de urskilt KA1 i jämförelse med klass A. Anledningen till att klass B visade att de urskilt KA1 kan bero på revideringen av variationsmönstret för sekvens 1. Variationsmönstret utökades genom generalisering som innefattade två olika figurer samt olika delningar av dessa. Tillämpningen av generalisering kan ha möjliggjort ett lärande eftersom eleverna fick erfara hur olika figurer kan delas in i bråkdelar, samt hur samma figur kan delas in på olika sätt. Skillnaden på resultatet kan också bero på revideringen av arbetsbladet under lektion 2. Eleverna i klass B fick dela in figurer i tredjedelar, istället för fjärdedelar som diskuterades under genomgången. Detta möjliggjorde att eleverna fick generalisera sin kunskap genom att dela in samma figurer men i tredjedelar. Resultatet visade även att fler elever i klass B urskilt KA3 till skillnad mot klass A. Skillnaden kan bero på revidering av variationsmönstret som innehöll kontrast samt att mängden var konstant medan bråkdelarna varierade. Utifrån vår uppfattning av lektionerna så anser vi att variationsmönstret för lektion 2 var mer fördelaktigt, dels eftersom bråkdelarna varierade, dels på grund av kontrasten. Detta kan kopplas till Magnusson och Maunula (2011, s.41), då de menar att det som är kritisk för att eleverna ska utveckla förståelse är det som ska synliggöras med hjälp av variationsmönster. Då bråkdelarna varierade mot en konstant mängd synliggjordes innebörden av en bråkdel kopplat till mängden.

Variationsmönstret synliggjorde hur täljaren och nämnarens relation förhåller sig till uppdelning av en diskret mängd. Klass B fick erfara planerad och oplanerad kontrastering, till skillnad från Klass A som endast fick erfara oplanerad kontrast utifrån elevexempel. Klass B fick erfara variationsmönster som innehöll mer kontrast och fick därför större möjlighet att erfara en större dimension av variation (Holmqvist, 2021). Under lektion 2, sekvens 2, utgick vi från elevnära exempel, vilket kan påverkat resultatet. Variationsmönstret i lektion 1 utgick inte från elevnära situationer, detta uppmärksammade vi under lektionen då en elev själv kopplade ett exempel till egna erfarenheter. I efterhand anser vi att vi borde utgått från elevnära situationer i lektion 1, då Skolverket (2022a) syftar till att undervisningen om tal i bråkform bör utgå från elevnära situationer.

Sammanfattningsvis kunde vi se en viss skillnad i resultatet mellan klass A och B. Det finns dock flera anledningar att ifrågasätta och diskutera evidensen av jämförelsen mellan för- och eftertest (Carlgren et al., 2017). Klass B gjorde eftertestet 1 dag efter lektionen medan klass A genomförde eftertestet 3 dagar efter lektionen. Eftersom eftertestet genomfördes några dagar efter lektionen finns det en risk att andra faktorer utöver undervisningen påverkat elevernas svar. Andra omständigheter som exempelvis elevernas koncentration, mående eller sociala omständigheter kan påverkat elevernas svar. Det är även relevant att ta hänsyn till studiens tidsbegränsning, då endast en lektion genomfördes i båda klasserna.

6.3 Vidare forskning

I vår studie undersökte vi vilka variationsmönster som möjliggjorde ett lärande för eleverna. Det hade därför varit intressant att undersöka och jämföra lektioner som planeras utifrån variationsteorin respektive lektioner som inte utgår från variationsteorin. Utifrån studiens resultat hade det även varit intressant att undersöka vad eleverna inte fick möjlighet att lära. Vidare forskning hade då kunnat undersöka vilka variationsmönster som kan möjliggöra att elever urskiljer att en diskret mängd kan innefatta olika objekt.

Referenslista

Alkhateeb, M. A. (2019). Common Errors in Fractions and the Thinking Strategies That Accompany Them. *International Journal of Instruction,* 12(2), 399-416. http://proxy.library.ju.se/login?url=https://www.proquest.com/scholarly-journals/commonerrors-fractions-thinking-strategies-that/docview/2228698510/se-2

Bergqvist, M., & Echevarría, C. (2011). En introduktion till Learning study. I T.Maunula, J. Magnusson & C, Echevarría (Red.) *Learning study: undervisning gör skillnad* (21–34). Studentlitteratur.

Bryman, A. (2018). Samhällsvetenskapliga metoder. (3.uppl.). Liber.

Carlgren, I., Eruksson, I., & Runesson U. (2017). Learning study. I I. Carlgren (Red.), *Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study* (17-30). Gleerups.

Drageryd, K., Erdtman, M., Persson., U & Kilhamn, C. (2012). Tallinjen – en bro mellan konkreta modeller och abstrakt matematik. *Nämnaren,* (3) 63-68. https://ncm.gu.se/media/stravorna/3/a/3A_drageryd.pdf

Empson, S. B. (1999). Equal Sharing and Shared Meaning: The Development of Fraction Concepts in a First-Grade Classroom. *Cognition and Instruction*, 17(3), 283-342. http://proxy.library.ju.se/login?url=https://www.proquest.com/scholarly-journals/equal-sharing-shared-meaning-development-fraction/docview/62403374/se-2

Gabriel, F., Coché, F., Szucz, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, *4*, Article 715. https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2013.00715/full

Gould, P., Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2006). One-third is three-quarters of one-half. In *annual meeting of the Mathematics Education Research Group of Australia, Australia*. https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/72723830/RP282006-libre.pdf?1634326077=&response-content-disposition=inline%3B+filename%3DOne_Third_is_Three_Quarters_of_One_Half.pdf&Expires=1718015363&Signature=B5W9dZ-uK0vEkUUyNN7CjV3GAe-ze0myY~cU0A3XGYTfqhMailU4~Y29pmgjwmPzZbs-am2x7zylfeQHd2MrQc8KOGqoKm3AvqJ0d--jelRZ0jIPgFHV341qf0jtmKXIFd61VqZgeEQIF~5i0pEfi4SR~QKk0bYKi1Wf657LdbXgPrw-6Slrf5gHBa76~CVco82Xssw-

1YdzxyHbb8TZAr1QiV3VP2ip5wjeCFPbD9LpLFrYcdYfVBreXljEqh8GIgF~QVZHbUjYoAceIhtwzviAdNlvIrQSaX3TlVhGqjJUFxZf~MJ8PzQknoFLJ6Z2YZarEvKXhdRAxzhBi81ngg__&Key-Pair-Id=APKAJLOHF5GGSLRBV4ZA

Heiberg Solem, I., Alseth, B. & Nordberg, G. (2011). *Tal och tanke: matematikundervisning från förskoleklass till årskurs 3.* Studentlitteratur.

Holmqvist, M., (2021). Lärande i ett variationsteoretiskt perspektiv. I M. Holmqvist (red.), *Teorier för undervisning och lärande* (27–47). Gleerups

Kilborn, W. (2014). Om tal i bråkform och decimaltal – en röd tråd. *Nationellt centrum för matematikutbildning*. Göteborgs universitet. https://ncm.gu.se/media/ncm/dokument/brak_wiggo_kilborn.pdf

Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Journal*, *25*, 547-567. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s13394-013-0080-9.pdf

Lindegren,C., Welin, I & Sönnerhed, W. (2012). Förståelse för tal i bråkform. *Nämnaren.* https://ncm.gu.se/media/stravorna/3/a/3A_lindegren.pdf

Löwing, M. (2017). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare*. (2. Uppl.). Studentlitteratur.

Magnusson, J., & Maunula, T. (2011). Variationsteorin ur ett undervisningsperspektiv. I T. Maunula, J. Magnusson & C, Echevarría (Red.) *Learning study: undervisning gör skillnad* (35-50). Studentlitteratur.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. Routledge.

McIntosh, A. (2020). *Förstå och använda tal: en handbok* (2. uppl.). Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Nationellt centrum för matematikutbildning. (u.å.). Diamantdiagnoserna: En del av en hel. https://ncm.gu.se/klassrum/diamantdiagnoserna

Nationellt centrum för matematikutbildning. (u.å.). Diamantdiagnoserna: Flera delar av en hel. https://ncm.gu.se/klassrum/diamantdiagnoserna.

Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist, 40*(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Runesson, U. (2017). Variationsteori som redskap för att analysera lärande och designa undervisning. I I. Carlgren (red.), Undervisningsutvecklande forskning – exemplet Learning study (45-60). Gleerups.

Runesson, U., & Kullberg, A. (2010). Learning from variation. *Differences in learners' way of experiencing differences. I: B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, C. Michelsen, G. Palsdottir, O. Steinthorsdottir & L. Haapasalo (Red.), The Sourcebook on Nordic research in mathematics education*, 299-317.

Schumacher, R. F., & Malone, A. S. (2017). Error Patterns with Fraction Calculations at Fourth Grade as a Function of Students' Mathematics Achievement Status. *Grantee submission.* http://proxy.library.ju.se/login?url=https://www.proquest.com/reports/error-patterns-with-fraction-calculations-at/docview/1968427317/se-2

Segolsson, M. (2021). Datainsamling och analys – verktyg i systematiskt kvalitetsarbete. I Å. Hirsh & A. Olin (Red.), *Skolutveckling i teori och praktik* (s.55–77). Gleerups.

Skolverket. (2019). TIMSS 2019: *Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. https://www.skolverket.se/getFile?file=7592

Skolverket. (2022a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet: LGR 22*. https://www.skolverket.se/getFile?file=9718

Skolverket. (2022b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik – grundskolan*. https://www.skolverket.se/publikationer?id=9790

Vetenskapsrådet. (2002). Forskningsetiska principer: inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. https://www.vr.se/analys/rapporter/vara-rapporter/2002-01-08-forskningsetiska-principer-inom-humanistisk-samhallsvetenskaplig-forskning.html

Bilagor

Bilaga 1 – Förtest

Namn: _____

1. Ringa in bråktalet som stämmer med figuren.

$\frac{3}{1}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{2}{4}$ $\frac{4}{2}$

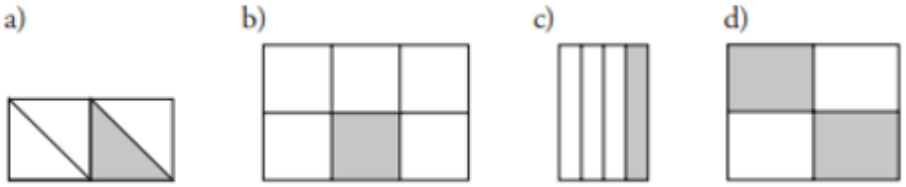
2. Hur stor del av figurerna är målad? Skriv bråktalet.

a) _____

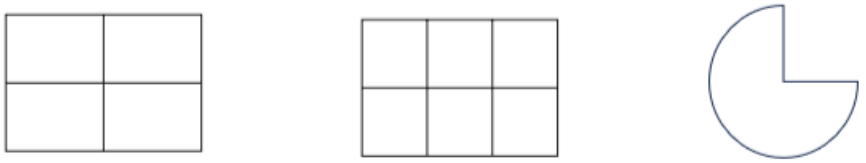
b) _____

c) _____

3. Ringa in den/de figurer där $\frac{1}{3}$ är målad.

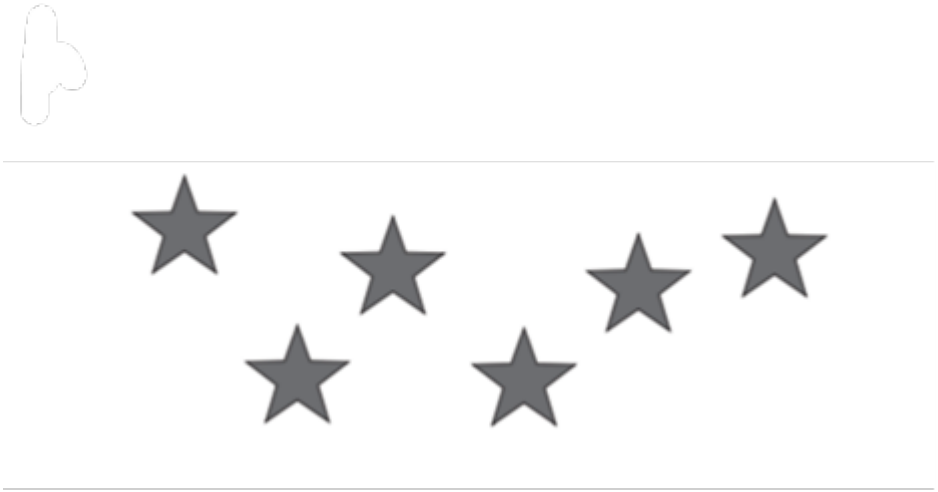


4. Måla halva figurerna och skriv ut bråktalet.

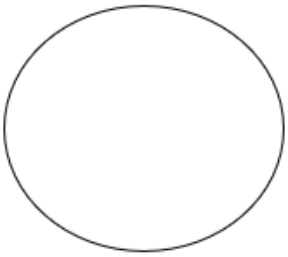


_____ _____ _____

5. Rita en ring runt $\frac{1}{3}$ av stjärnorna.



6. Dela in figurerna i tredjedelar.



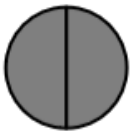
7. Dra streck mellan figurerna och bråktalen.

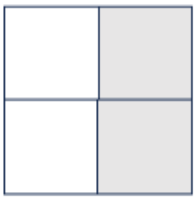
$\frac{1}{5}$

$\frac{2}{2}$

$\frac{2}{4}$

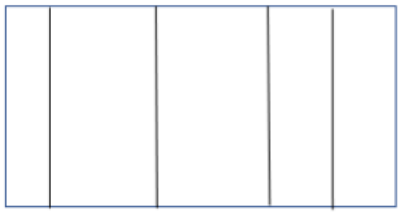
$\frac{3}{6}$



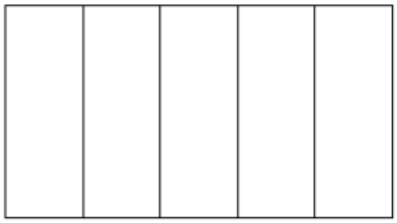


8. Ringa in den/de figurer som är indelade i femtedelar.

A)

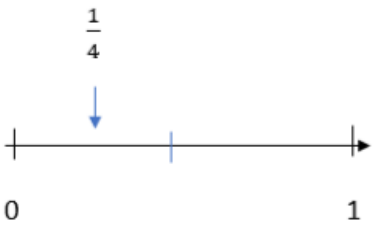


B)



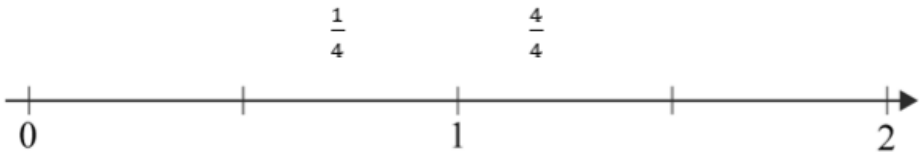
Förklara hur du tänker:

9. Ringa in tallinjen där $\frac{1}{4}$ är placerad på rätt ställe.

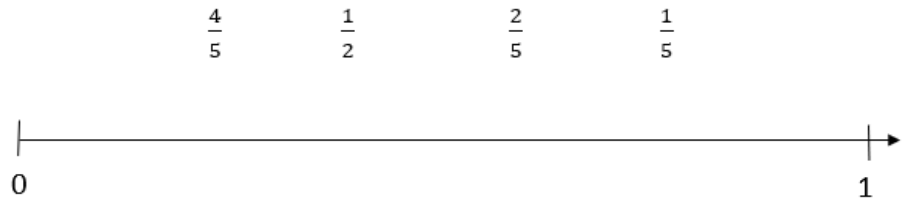


10. Dra streck från bråktalen till rätt plats på tallinjen.

A)



B)

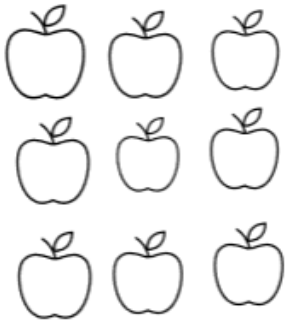


11.

Hur stor del av flaggan är blå? _____

Hur stor del av flaggan är röd? _____

12. Lisen har 9 äpplen. Noa får $\frac{1}{3}$ av äpplena. Hur många äpplen får Noa?



Svar:

13. Hur stor del av antalet frukter är apelsiner? Skriv i bråkform.

Svar:

Bilaga 2 – Eftertest

Namn: _____

1. Ringa in bråktalet som stämmer med figuren.

$\frac{1}{3}$ $\frac{3}{1}$

$\frac{2}{4}$ $\frac{4}{2}$

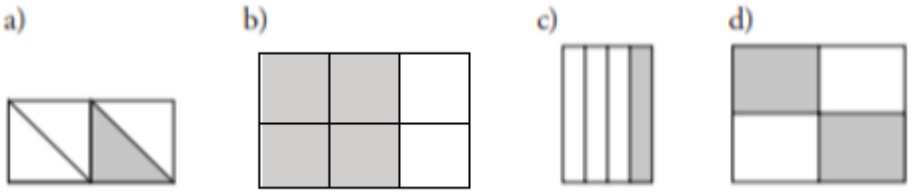
2. Hur stor del av figurerna är målad? Skriv bråktalet.

a) _____

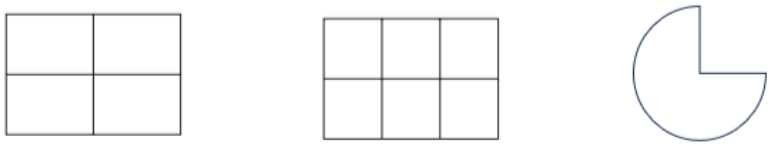
b) _____

c) _____

3. Ringa in den/de figurer där $\frac{1}{4}$ är målad.



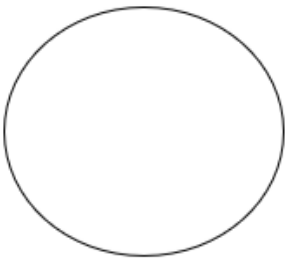
4. Måla halva figurerna och skriv ut bråktalet.



_____ _____ _____

5. Rita en ring runt $\frac{1}{4}$ av antalet stjärnor.

6. Dela in figurerna i tredjedelar.



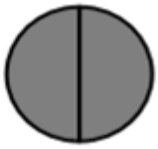
7. Dra streck mellan figurerna och bråktalen.

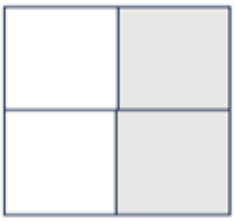
$\frac{1}{5}$

$\frac{2}{2}$

$\frac{2}{4}$

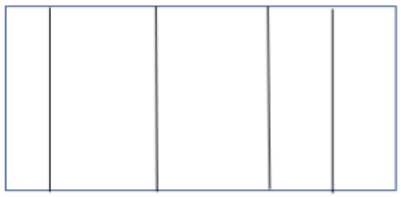
$\frac{3}{6}$



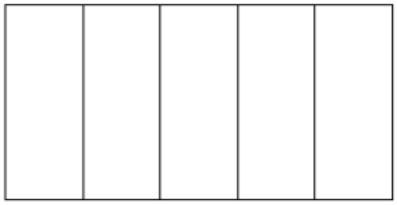


8. Ringa in den/de figurer som är indelade i femtedelar.

A)

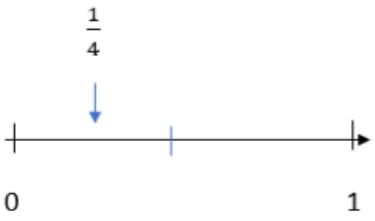


B)



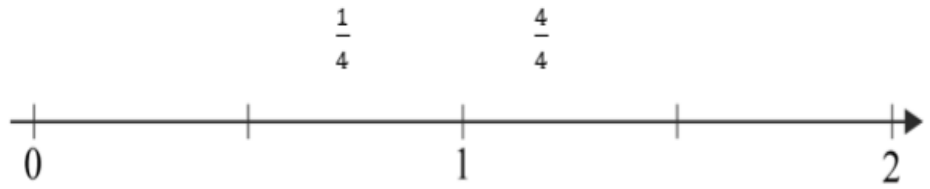
Förklara hur du tänker:

9. Ringa in tallinjen där $\frac{1}{4}$ är placerad på rätt ställe.

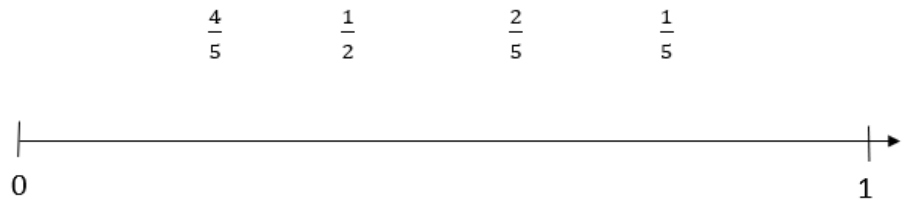


10. Dra streck från bråktalen till rätt plats på tallinjen.

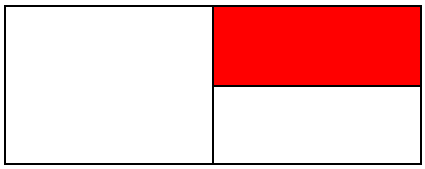
A)



B)

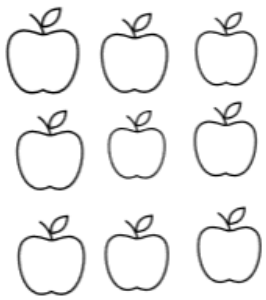


11.



Hur stor del av flaggan är röd? _____

12. Lisen och Noa plockar 9 äpplen. Lisen är mätt, så Noa får $\frac{2}{3}$ av äpplena. Hur många äpplen får Noa?



Svar:

13. Hur stor del av antalet frukter är apelsiner? Skriv i bråkform.

Svar:

Bilaga 3 - Observationsprotokoll

Moment	**Konkreta exempel**	**Kritisk aspekt**	**Variations mönster**	**Observation: elevexempel**	**Metareflektion Lektion 1**	**Metareflektion Lektion 2**
Sekvens 1						
Sekvens 2						
Sekvens 3						

Bilaga 4 - Samtyckesblankett

Hej alla vårdnadshavare i årskurs 2!
Vi heter Rebecca Edlund och Emma Abrahamsson och går just nu sista terminen på grundlärarprogrammet på Jönköpings University. Rebecca har varit student i årskurs 2 under vårterminen 2024 och Emma har varit student i klassen under höstterminen 2022. Vi håller just nu på med att skriva vårt examensarbete i matematik om tal i bråkform. Under examensarbetet kommer vi att besöka era barn under vecka 16 & 17 för att genomföra ett förtest, två lektioner samt ett eftertest. Lektionerna kommer också observeras av en oss. Materialet från lektionerna kommer endast att analyseras i syfte av att användas i studien. Alla namn, inklusive elever, skola och klass kommer att anonymiseras av sekretesskäl.

Deltagandet är frivilligt och du/ni har rätt att avbryta ditt/ert barns deltagande när som helst, utan att ange någon anledning och utan att det leder till några konsekvenser för ditt barn.

Vi ser fram emot att genomföra vårt examensarbete med era barn! Om ni har frågor får ni gärna kontakta oss via mejl: abem20qq@student.ju.se & edre20do@student.ju.se

Genom att skriva under här nedanför intygar du att du tagit del av informationen ovan.
1. Godkänner du att ditt barn deltar i studien?

[ ] Ja, jag godkänner att mitt barn deltar i studien för examensarbetet och att mitt barns personuppgifter behandlas för utbildningsändamål i examensarbetet.
[ ] Nej, jag vill inte att mitt barn deltar i studien för examensarbetet.

2. Om ditt barn får delta i studien, godkänner du att ditt barns personuppgifter behandlas för
eventuella forskningsändamål?
[ ] Ja, jag godkänner att mitt barns personuppgifter även får behandlas för forskningsändamål.
[ ] Nej, jag vill inte att mitt barns personuppgifter behandlas för forskningsändamål

Förtydligande: de personuppgifter som samlas in är endast ditt barns namn på arbetsbladen. Arbetsbladen analyseras av oss, Emma och Rebecca, och anonymiseras efter analys.

Datum: _____

Elevens namn: _____

Vårdnadshavares namnteckning: _____

Namnförtydligande: _____