



Elevers och lärares möjligheter samt hinder i arbetet med representationsformer i matematikundervisningen

KURS: Examensarbete, Grundlärare 4-6, 15 hp

FÖRFATTARE: Elin Josefsson, Paulina Källberg

EXAMINATOR: Annica Otterborg

TERMIN: VT 16

Sammanfattning

Elin Josefsson, Paulina Källberg

**Elevers och lärares möjligheter samt
hinder i arbetet med representationsformer
i matematikundervisningen**

Antal sidor: 22

Under vår verksamhetsförlagda utbildning uppmärksammade vi att eleverna i årskurs 4-6 uppvisade kunskapsluckor i användandet av olika representationsformer. Den representationsform som eleverna föredrog att arbeta med var symboler. Det väcktes ett intresse att undersöka varför eleverna i huvudsak valde att använda en representationsform vid beräkningar. Litteraturstudien syftar till att öka förståelse för elevers och lärares arbete med olika representationsformer, dels att belysa på vilka sätt de olika formerna av representationer kan vara till nytta för elever i årskurserna 4-6 i matematikundervisningen. Studien fokuserar även på att synliggöra eventuella problem som kan uppstå vid användandet av representationsformer och hur lärare på ett effektivt sätt kan motivera elever att använda olika representationsformer. Arbetet baseras på vetenskapliga artiklar samt litteratur som hittats via informationssökningar. Resultatet av litteraturstudien visar att med hjälp av representationsformer kan elever öka sin matematiska förståelse samt utveckla sitt matematiska tänkande. Forskningen redovisade att elever ofta upplever svårigheter gällande växlingen mellan representationsformer men poängterade även att lärare upplever svårigheter med representationsformer på grund av bristande kunskap. Vidare visar resultatet att läraren har en viktig uppgift i att skapa och upprätthålla en positiv inställning till arbetet med representationer. Centralt i matematikundervisningen måste också vara att kommunikation mellan elev-lärare och elev-elev kring representationsformer sker för att gemensamt utveckla och befästa kunskaperna.

Sökord: Representationsformer, Matematisk utveckling, Elever, Lärare

Innehållsförteckning

1. Inledning	1
2. Syfte	2
3. Bakgrund	3
3.1 Begreppsförklaring	3
3.1.1 Externa och interna representationer	3
3.2 Kursplaner då och nu	5
4. Metod	6
4.1 Informationssökning	6
4.2 Inklusionskriterier	7
4.3 Materialanalys	7
4.4 Validitet och Reliabilitet	8
4.5 Tabell	9
5. Resultat	10
5.1 Fördelar med att arbeta med varierande representationsformer	10
5.2 Svårigheter som kan förekomma i arbete med varierande representationer	11
5.3 Lärarens påverkan på elevers motivation till arbetet med representationsformer	13
6. Diskussion	15
6.1 Metoddiskussion	15
6.2 Resultatdiskussion	16
6.3 Slutsatser	18
6.4 Vidare forskning	19
Referenslista	21
Bilaga 1	23

1. Inledning

Matematik är ett ämne där många elever upplever svårigheter vilket även bevisas av en PISA undersökning från 2013. Resultatet av undersökningen från 2013 visar även att svenska elevers matematiska kunskaper har försämrats under de senaste tio åren (Skolverket, 2013). Enligt *Läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011* (Skolverket, 2011b) ska skolan effektivt arbeta för att varje elev ska utveckla sina kunskaper och enligt kunskapskraven för årskurs 6 ska eleverna utveckla kunskaper för att kunna uttrycka sig på mer än ett sätt.

Under vår verksamhetsförlagda utbildning uppmärksammade vi att elever visade brister i användandet av olika representationsformer vid beskrivning av sitt tillvägagångssätt. Varför väljer elever endast att använda en representationsform vid beräkningar? Frågan väckte ett intresse att fördjupa våra kunskaper om hur arbetet med formerna fungerar i praktiken för elever och lärare. Det väckte även ett intresse för hur representationsformer kan vara till nytta för elevers matematiska kunskapsutveckling samt vilka problem som kan uppstå i arbetet med formerna.

Litteraturstudien undersöker huruvida användningen och växlingen mellan representationsformer kan hjälpa elever att utveckla sina matematiska kunskaper, även vilka svårigheter som kan förekomma vid användandet av representationsformer. Studien undersöker även huruvida läraren kan motivera elever till att använda sig av olika representationsformer. Elever kan med hjälp av representationsformer räkna ut och beskriva matematiska uppgifter på mer än ett sätt. De representationsformer som studien fokuserar på är symboler, ord, bilder och föremål. I avsnitt 3.1 tydliggörs begreppet representationsformer samt en presentation av de olika formerna ges.

2. Syfte

Syftet med litteraturstudien är att öka förståelse för elevers och lärares arbete med olika representationsformer. Studiens syfte är dels att belysa på vilket sätt representationsformer kan vara till nytta för elever i årskurser 1-6, dels undersöka eventuella utmaningar som kan uppstå i arbetet med olika representationsformer, både för elever och för lärare. Litteraturstudien har även som syfte att undersöka huruvida läraren på ett effektivt sätt kan hjälpa elever att använda olika representationsformer. Vi avser att besvara studiens syfte med hjälp av den vetenskapligt granskade litteratur som finns inom området utifrån studiens frågeställningar.

- På vilka sätt kan olika representationsformer hjälpa elever att utveckla sina matematiska kunskaper?
- Vilka svårigheter kan uppstå för både elever och lärare vid användandet av representationsformer?
- På vilka sätt kan lärare öka elevers motivation till att utveckla kunskap om representationsformer?

3. Bakgrund

I avsnittet tydliggörs begreppet representationsform samt en förklaring ges till varför begreppet representationsform används i studien och inte uttrycksformer. Vidare presenteras de föregående och nuvarande styrdokumentens syn på arbete med representationsformer.

3.1 Begreppsförklaring

Begreppet representationsform har använts flitigt inom forskning men forskarna har inte alltid varit eniga om vad det innebär. Cai (2005) anser att användandet av representationsformer är ett sätt att förstå matematiken. Enligt Helenius, Rystedts och Tryggs (2013) tolkning står representationsformer för ett matematiskt begrepp medan uttrycksformer anger hur matematiken kommuniceras. När en elev ritat en cirkel på ett papper, då har eleven kommunicerat med en uttrycksform. Den ritade cirkeln representerar då den grafiska/geometriska representationsformen. Representationsformer förknippas ofta med begreppet uttrycksformer, begreppen används ofta som synonymer till varandra. Egentligen står begreppen representationsformer och uttrycksformer för olika företeelser men skillnaden mellan dem är svår att definiera. Den vetenskapliga litteratur som arbetet utgår från samt Helenius, Rystedts och Tryggs (2013) förklaring av begreppet representationsform anser vi stämmer överens med hur begreppet uttrycksformer används i kursplanen. De kunskaper som elever ska få möjligheten att utveckla tydliggörs i kursplanen. Till följd av den vetenskapliga litteraturen samt Helenius, Rystedts och Tryggs tolkning har vi valt att använda begreppet representationsformer. Istället för ett överanvändande av begreppet representationsformer har vi valt att använda oss av förkortningarna representationer och former som ett komplement.

3.1.1 Externa och interna representationer

Ett sätt att dela in representationer på är att beskriva dem i externa- och interna representationer. De interna representationerna är bilder som skapas i våra sinnen medan de externa är representationer som används för att uttrycka sitt matematiska tänkande. Interna- och externa representationer är sammankopplade med varandra (Couco, 2001). Cai (2005) förklarar det som att de interna representationerna är elevers mentala bilder av verkligheten och de externa representationerna är den fysiska notationen. Med den fysiska notationen menas det visuella med ord, symbol, föremål och bild som alla kan hjälpa eleven att uttrycka sina inre bilder.

De kan även benämnas som logisk/språklig- (A), konkret- (B), grafisk/geometrisk- (C), aritmetisk/algebraisk (D) representationsform. Grevholm (2014) förklarar att uttrycka sig med ord kallas för den logiska/språkliga representationsformen. När elever ska resonera och beskriva sitt tillvägagångssätt görs det med hjälp av ord och skrivs ned som en text (A). Den konkreta representationsformen betyder att konkreta föremål används för att elever ska kunna närma sig en matematisk förståelse (B). Genom den grafiska/geometriska representationsformen uttrycker elever sig med hjälp av bilder (C). Den vanligaste representationsformen kallas för den aritmetiska/algebraiska, elever använder sig då av symboler (D). Grevholm har utvecklat en representationsmatris kallad tanketavla (se figur 1). Tanketavlan är till för att hjälpa elever att beskriva en matematisk händelse på olika sätt. Forskaren beskriver att eleven får då möjligheten att växla mellan representationsformerna, vilket kan stärka elevens förmåga att tänka flexibelt kring den matematiska händelse som eleven behandlar.

(A) ORD	(B) FÖREMÅL
(C) BILD	(D) SYMBOL

Figur 1 Tanketavla (Grevholm, 2014, s.223)

3.2 Kursplaner då och nu

I *läroplanen för grundskolan 1969* (Skolöverstyrelsen) berörs inte begreppet representationsformer. Det som nämns är att konkret material var viktigt för elevers matematiska utveckling, speciellt när nya matematiska begrepp introduceras i undervisningen. Användningen av det konkreta materialet fick inte uteslutas för tidigt då det kunde påverka elevers utveckling. Undervisningen skulle utgå utifrån vardagliga situationer, situationer som utspelas utanför skolan.

Läroplanen för grundskolan 1980 (Skolöverstyrelsen) behandlar inte begreppet representationsformer. Den lyfte däremot att undervisningen skulle vara konkret, praktisk tillämpning skulle användas. En viktig ståndpunkt i Lgr 80 var att undervisningen skulle riktas mot vardagliga situationer, matematiken skulle vara ett verktyg för att förstå verkligheten.

I *läroplanen för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet 1994* (Skolverket) används inte begreppet representationsformer men, även i den här kursplanen lyfts det att undervisningen skulle utgå från vardagliga situationer. Det som togs upp var att elever skulle sträva efter att kunna inse värdet samt kunna använda sig av matematikens språk, symboler och uttryck.

I *Läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011* behandlas inte begreppet representationsformer, istället används begreppet uttrycksformer. I den nuvarande kursplanen för matematik har elever som kunskapskrav att kunna utveckla kunskaper i att beskriva olika begrepp med hjälp av olika uttrycksformer. Elever ska även kunna växla mellan uttrycksformer samt veta hur de relaterar till varandra. Med hjälp av olika uttrycksformer ska eleverna kunna beskriva sitt tillvägagångssätt på olika sätt (Skolverket, 2011b). För att elever ska kunna beskriva en matematisk situation behöver de ha förståelse för representationsformer och hur de kan användas. Elever ska också kunna växla mellan olika representationsformer (Skolverket, 2011a).

4. Metod

I följande avsnitt redogörs för vilka databaser som använts samt vilka sökord som använts för att hitta relevant litteratur till studien. I avsnittet presenteras tillvägagångssättet vid analysen av materialet till studien. Avsnittet beskriver även vilka likheter och skillnader mellan olika forskningsstudier som uppmärksammades under analysarbetet av den vetenskapliga litteraturen.

4.1 Informationssökning

Materialet som studien baseras på är av olika publikationstyper, bland annat artiklar och antologier. De söktjänster som valts för att bygga upp en trovärdighet och för att kunna besvara syftet och frågeställningarna är, databaserna ERIC, Google scholar, Primo samt MathEduc. ERIC är en pedagogiskt inriktad databas och för att försäkra sig att sökresultaten är vetenskaplig litteratur används funktionen, *peer reviewed*. Databasen Google scholar publicerar artiklar, rapporter samt litteratur från både internationella- och nationella forskare. Det som publiceras via Google scholar är inte enbart vetenskapligt granskad litteratur utan även skönlitteratur och andra artiklar. Primo är en databas där e-litteratur, artiklar samt sökvägar till databaser kan finnas bland sökresultaten. Sökningar gjordes även i databasen MathEduc som erbjuder en global översikt över litteratur om forskning, teori och praktik i matematikdidaktik.

De sökord som har valts för att hitta artiklar till studien är följande: math*, mathe* commuc*, mathe* materi*, mathe* pictu*, uttrycksform*, representationsform*, learning, mathematics education, teaching, mathematical concepts, representation*, difficulties with representations, teaching representations. De mer generella sökorden som math* och learning gav flest träffar men minst relevanta artiklar. De sökord som gav flest relevanta träffar var mathematics education, representation* och teaching representations.

Vid utökad sökning användes flera av termerna i kombinationer med varandra. Flera av termerna bands samman med hjälp av funktionen AND och antalet sökträffar blev färre, vilket underlättade arbetet med att få fram fler relevanta artiklar inom området. I de artiklar som hittades återkopplades det ofta till samma forskare. Forskarnas texter söktes sedan upp via Google som en kedjesökning. Med kedjesökning menas att man utifrån en artikels eller en litteraturs referenslista finner andra användbara källor till arbetet. Kedjesökningarna gav även träffar på annan relevant forskning och antologier. Antologierna kunde sedan hittas via

universitetets bibliotek samt via funktionen böcker på Google scholar. De mest framstående forskarna inom ämnet är Goldin, Stylianou, Lesh, Post och Behr. Under resultat- och diskussionsavsnittet presenteras några av deras verk.

4.2 Inklusionskriterier

Vid sökning efter relevant forskningsmaterial till litteraturstudien har vi utgått från olika inklusionskriterier. Kriterierna har använts som stöd för att hitta källor som stämmer överens med ämnesområdet. Det första kriteriet innebär att materialet är baserat på vetenskaplig forskning kring arbete mot årskurserna 4-6, vilket är fokus i vår utbildning. Användandet av det kriteriet resulterade i att artiklar som var riktade mot förskoleklass och gymnasiet sovrades bort. Andra kriteriet var att materialet skulle innehålla information om representationsformer, då studiens fokus är arbete med representationsformer i undervisningen. Genom att vårt syfte både behandlar elev- och lärarperspektiv valdes det tredje kriteriet att behandla artiklar som tar upp antingen båda perspektiven eller ett utav dem.

4.3 Materialanalys

De valda artiklarna analyserades ett flertal gånger för att få en fördjupad förståelse för artiklarnas innehåll. Parallellt med läsningen fördes anteckningar kring det valda materialet och översiktsmatrisen fylldes i (Bilaga 1). Anteckningarnas syfte var att lyfta fram det som var relevant för ämnesområdet, vårt syfte och våra frågeställningar. För att strukturera och underlätta arbetet med våra anteckningar markerades frågeställningarna med siffrorna 1, 2 och 3, där varje fråga även markerades med var sin färg. De anteckningar som tillhörde en specifik frågeställning tilldelades en tillhörande siffra och en specifik färg. Genom att markera anteckningarna med siffror och färg, blev det enklare att se om frågeställningarna besvarades. Artiklarna tillsammans med anteckningarna samlades sedan i mappar för att göra det insamlade materialet mer överskådligt.

I nästa steg sammanställdes alla anteckningar i ett dokument och genom uppdelningen med siffror och färg utvecklades en tydlig struktur i dokumentet. Grundtanken med arbetssättet var att synliggöra skillnader och likheter mellan olika forskningsstudier samt de synpunkter kring representationsformer som sedan kunde lyftas upp i resultat- och diskussionsavsnittet.

4.4 Validitet och Reliabilitet

Validitet används för att mäta det som är relevant för studien. Undersöks och besvaras studiens syfte och frågeställningar? Reliabilitet mäter hur tillförlitlig undersökningen är. Skulle studien genomföras igen skulle resultatet då bli detsamma? (Bryman, 2001). För att uppnå validitet har vi valt att arbeta utifrån studiens syfte och frågeställningar samt valt att vara uppmärksamma på att det materialet som använts kan återspeglas i både syftet och frågeställningarna. För att uppnå tillförlitlighet med litteraturstudien är materialet hämtat från söktjänster där vetenskapliga publikationer publiceras. Studiens validitet och reliabilitet diskuteras ytterligare i diskussionsavsnittet.

4.5 Tabell

Tabellen nedan visar det urval av vetenskaplig litteratur studien baseras på. Under avsnittet resultat finns det mer ingående innehåll om varje källa och i referenslistan redovisas den fullständiga referensen ut.

Författare	År	Publikationstyp	Titel
Abrahamson, D.	2006	Vetenskaplig artikel	Mathematical representations as conceptual composites: implications for design
Bossé, J., M., Adu-Gyamfi, K. & Cheetham, M.	2011	Vetenskaplig artikel	Translations among mathematical representations: teacher beliefs and practices
Boulton-Lewos, G.	1998	Vetenskaplig artikel	Children's strategy use and interpretations of mathematical representations
Cai, J.	2005	Vetenskaplig artikel	U.S and Chinese Teachers' constructing, knowing and evaluating representations to teach mathematics
Couco, A., A.	2001	Vetenskaplig artikel	The roles of representations school mathematics
Dündar, S.	2015	Vetenskaplig artikel	Mathematics teachercandidates' performance in solving problems with different representation styles: The trigonometry example
Goldin, G.	2008	Antologi	Handbook of international research in mathematics education (edition 2)
Goldin, G.	1998	Vetenskaplig artikel	Representational systems, learning and problem solving in mathematics
Lee, J.	2015	Vetenskaplig artikel	"Oh, I just had it in my head": Promoting mathematical communications in early childhood
Lesh, R., Post, T. & Behr, M	1987	Vetenskaplig artikel	Representations and translations among representations in mathematics learning and problemsolving
Lesser, L. & Tchoshanov, M.	2005	Vetenskaplig artikel	The effect of representation and representational sequence of students' understanding
Momona-Downs, J. & Downs, M.	2002	Antologi	Handbook of international research in mathematics education (edition 1)
Ryken, E., A.	2009	Vetenskaplig artikel	Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning
Stylianou, A., D.	2010	Vetenskaplig artikel	Teachers' conceptions of representations in middle school mathematics
Tinungki, M., G.	2015	Vetenskaplig artikel	The role of cooperative learning type team assisted individualization to improve the students' mathematics communication ability in the subject of probability theory
Uyangör, S. & Karaca, D.	2010	Vetenskaplig artikel	The attitudes of the prospective mathematics teachers towards instructional technologies and material development course

5. Resultat

I avsnittet presenteras det material som har analyserats. Avsnittet har för avsikt att besvara studiens syfte och frågeställningar. Inledningsvis presenteras de fördelar som finns kring arbetet med varierande representationer och varför det är viktigt för elever att arbeta med representationer. Därefter förklaras diverse svårigheter som förekommer i arbetet med representationer för både elever och lärare. Avslutningsvis beskrivs lärarens påverkan på elevers motivation till arbetet med olika representationsformer.

5.1 Fördelar med att arbeta med varierande representationsformer

Momona-Downs och Downs (2002) beskriver i sin studie att teorin kring representationsformerna och dess användning har utvecklats till att bli en viktig process för undervisningen och elevers lärande. Användningen av olika representationsformer hjälper elever att utveckla djupare matematisk förståelse och analytisk förmåga samt underlättar för elever att skapa interna bilder kring matematiken. I en studie gjord av Cai (2005) beskrivs representationsformer som en process för elever att förstå matematiska begrepp. Han anser att elever bör använda sig av praktiska och konkreta representationer som att rita, för att elever enklare ska förstå ett matematiskt begrepp eller ett matematiskt problem.

En studie från 2015 betonar att elever behöver presentera sina matematiska lösningar genom att använda mer än en representationsform. Användningen av flera representationsformer visar på förståelse för matematiken samt visar på en utveckling av elevernas matematiska utveckling av deras matematiska tänkande (Dündar, 2015). Boulton-Lewis (1998) nämner att elever vanligtvis inte är medvetna om att de hela tiden arbetar med åtminstone en representationsform. Den vanligaste och den representation som elever använder vid matematiska beräkningar är den aritmetiska/algebraiska representationsformen. Enligt Goldin (2008) ska elever med hjälp av olika representationsformer ges tillfälle till att förklara den matematiska situationen på mer än ett sätt. Exempelvis beskriva situationen med symboler och sedan förklara med hjälp av ord, föremål eller bild.

I avsikt att elever ska förstå matematiken innebär det att de ska kunna använda och variera mellan olika representationsformer för att uttrycka sina matematiska idéer. Det inkluderar även att de ska kunna röra sig obehindrat inom och mellan olika matematiska idéer (Cai, 2005). 1987 publicerade Lesh, Post och Behr en artikel som behandlade växlingen och övergången mellan

olika representationsformer vid arbete med problemlösning. De lyfte att representationsformerna inte bara är viktiga var för sig utan även växling samt övergång är viktig för elevers matematiska kunskapsutveckling och förståelse för matematiken. Lesser och Tchoshanov (2005) instämmer med Lesh, Post och Behr att växlingen mellan representationsformer är viktig. De lyfter även att kombinationen av olika former av representationer har betydelse för elevers förståelse för matematiken.

Exempel på hur en växling mellan representationerna skulle kunna se ut ges i en studie av Boulton-Lewis (1998). Forskarens exempel handlade om att elever skulle utveckla förståelse för ett tals värde. Vanligtvis får elever utveckla förståelse för siffror och andra symboler utan hjälp av andra representationsformer, men genom att arbeta växelvis med konkret material, såsom klossar eller tiobasmaterial kan elever utveckla en djupare förståelse för talets värde. Boulton-Lewis menar att elever enklare och tydligare utvecklar förståelse för matematiken om de kan kombinera och växla mellan representationsformerna.

Ryken (2009) tar i sin studie upp att elever bör få möjligheten att arbeta mer med representationer när de ska förklara eller illustrera ett matematiskt problem både enskilt och i grupp. Forskaren beskriver även att representationer är ett kraftfullt verktyg för att föra resonemang. Enligt National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (refererad i Stylianou, 2010) bör elever skapa och använda representationer för att organisera och kommunicera matematiska idéer. Representationer används främst för att enklare förstå matematiken. Användningen av dem skapar även tillfällen där elever får träna på att utveckla förmågan att kommunicera matematik.

5.2 Svårigheter som kan förekomma i arbete med varierande representationer

Ryken (2009) tar i sin studie upp att arbetet med representationsformerna kan i somliga fall vara komplicerat, både för elever och för lärare. Svårigheter som kan visa sig i arbetet med representationsformer är att eleverna saknar kunskaper och medvetenhet vid användning av representationsformer vid matematiska beräkningar. Forskaren lyfter även fram att elever mestadels använder sig av den aritmetiska/algebraiska representationsformen, vilket medför att de flesta elever får svårare att beskriva sitt tillvägagångssätt på mer än ett sätt. Ryken menar att elever borde få möjlighet att arbeta mer med olika representationer inom matematikämnet. Enligt Stylianou (2010) är representationer något som elever i många fall får lära sig själva och det kan medföra svårigheter eftersom elever inte vet hur formerna ska användas. Elever erhåller

inte full förståelse för hur de ska använda representationsformerna, vilket leder till att representationerna inte utnyttjas maximalt.

En annan svårighet som Abrahamson (2006) presenterar i sin studie är att elever inte förstår representationernas betydelse. Abrahamsson menar att inom alla representationer finns det "gömda idéer" och kunskaper som elever har svårt att förstå. Elever kan då använda representationerna men förstår inte innebörden av dem. Forskaren lyfter även fram att en klassrumsdialog skulle kunna vara lösningen på problemet, då elever tillsammans med läraren diskuterar de olika representationsformernas betydelse och användning. Här synliggörs även elevers förståelse för representationsformerna, vilket i sin tur kan hjälpa läraren i bedömningen. Eventuella missförstånd och frågor kring representationsformerna kan även synliggöras genom kommunikationen.

I Bossé, Adu-Gyamfi och Cheetmans (2011) studie påpekas det att elever har svårigheter med att växla mellan de olika representationerna. Det framhålls även att det är lättare att växla mellan vissa representationer än mellan andra. Forskarna ger även förslag på hur problemet kan undvikas och det genom att läraren via sina instruktioner ger eleverna exempel och därigenom ökar elevernas erfarenhet kring översättningar mellan representationerna. Enligt Dündar (2015) kan en överdriven växling mellan representationsformerna skapa svårigheter för elever. De kan få svårt att förstå hur de ska gå tillväga vid lösningen samt blanda ihop de olika representationerna med varandra.

Stylianou (2010) lyfter i sin studie att även lärare kan uppleva svårigheter med representationer. Forskningen menar att lärare kan känna sig osäkra vid arbete med representationer och väljer då att inte använda representationsformer i sin matematikundervisning. Lärarens egna kunskaper och uppfattningar kring ämnet matematik påverkar hur de kommer att undervisa elever i ämnet (Cai, 2005).

5.3 Lärarens påverkan på elevers motivation till arbetet med representationsformer

Uyangör & Karaca (2010) belyser betydelsen av lärarens inställning till arbetet med representationsformer. Ett genuint intresse samt kunskap om representationer är viktigt för att lärare ska kunna undervisa om dem. Läraren bör även veta vilka fördelar samt utveckla en positiv inställning till arbetet med formerna. Lärarens inställning till olika former av representationer påverkar då även elevers inställning till arbetet med dem. Uttrycker läraren en positiv inställning kan det medföra att elever blir motiverade och utvecklar också en positiv inställning till arbetet med representationsformer.

En viktig del i lärarens arbete är utformning av lektioner och utveckling av elevers matematiska kunskaper. Läraren har möjligheten att påverka hur väl elever kommer att tillgodogöra sig den kunskap som undervisningen handlar om (Uyangör & Karaca, 2010). Couco (2001) tar i sin studie upp att matematikklassrummet länge har präglats av att det ska vara tyst och att elever helst ska arbeta individuellt. Couco anser dock att kommunikationen i klassrummet är viktig, det är kommunikationen som bidrar till att öka förståelsen för representationsformer. Genom kommunikationen får elever även möjlighet att dela med sig av sina egna tankar till kamrater och lärare (Couco, 2001). Att uppmuntra elever att kommunicera sitt matematiska tänkande kan hjälpa läraren att bedöma huruvida elever har förstått eller inte. Genom kommunikationen får även elever syn på sitt egna tänkande samt ta del av andras matematiska tänkande. Kommunikationen mellan elever anses vara positivt då de själva får styra diskussionen och fokus förflyttas då från läraren till eleverna (Lee, 2015).

Lesser & Tchoshanov (2005) menar att elever och lärare bör ha en dialog om hur de har gått tillväga och vad de menar med resultatet. Kommunikation är även en bra grund för att få insikt i samt bedöma elevernas interna- och externa representationer och det kan leda till att läraren enklare kan planera den fortsatta matematikundervisningen (Lesser & Tchoshanov, 2005). De externa representationerna är lättare för läraren att uppmärksamma då det tydliggörs med hjälp av notationen från elever. För att förstå hur elever har tillämpat den externa representationen behöver de interna representationerna synliggöras. Först då kan läraren förstå hur elever verkligen har tänkt. Det är genom de interna representationerna läraren får en förklaring till hur elevers matematiska tänkande, inläring samt dess förståelse för det matematiska området ser ut. För att synliggöra hela processen krävs det att läraren analyserar samspelet mellan de externa- och interna representationerna, eftersom representationerna är sammanlänkade

(Goldin, 1998). Den matematiska kommunikationsförmågan är viktig för att elever ska kunna lösa matematiska problem, använda sig av bra resonemang, illustrera matematiska idéer och sedan använda dem (Tinungki, 2015).

Det är viktigt att läraren motiverar elever till fortsatt utveckling av sina matematiska kunskaper genom att uppmuntra elever till att ta egna initiativ, låta dem utforska och använda sig av representationsformer på ett kreativt sätt (Couco, 2001). Elever bör automatisera användandet av formerna i matematiken. För att det ska kunna ske bör läraren vara konsekvent vid instruktioner och förklaringar kring representationsformer. Utvecklar elever förmågan att variera och använda olika former kan de lättare navigera sig genom matematiska problem och beräkningar (Stylianou, 2010). Elever behöver därför få möjlighet att arbeta med ett brett urval av material för att utveckla en vana av att arbeta med formerna. Har elever utvecklat goda kunskaper om olika representationer utvecklas även motivation för det fortsatta arbetet med dem (Boulton-Lewis, 1998). Valet av material kan påverka hur elever väljer att inta information och hur de väljer att arbeta med representationerna. Det kan även påverka elevers motivation och inställning till det fortsatta arbetet med representationsformer. Syftet med materialet är att elever ska få möjligheten att utforska och känna sig trygga i användandet av olika representationsformer (Uyangör & Karaca, 2010).

6. Diskussion

I avsnittet diskuteras metodval och resultat. Avsnittet inleds med en diskussion kring metodvalet samt studiens validitet och reliabilitet. Därefter diskuteras det resultat som studien påvisat. I resultatdiskussionen synliggörs forskarnas samt våra ställningstaganden kring arbetet med representationsformer. Avslutningsvis presenteras olika slutsatser samt förslag ges på fortsatt forskning inom ämnesområdet.

6.1 Metoddiskussion

Det material som litteraturstudien baserats på är i huvudsak vetenskapliga artiklar. Under analysarbetet uppmärksammade vi att materialet som använts har sitt ursprung i internationell forskning, då nationell forskning kring ämnet saknades. Hade studiens syfte formulerats för att belysa olika aspekter kring arbetet med representationsformer nationellt, hade urvalet av material begränsats kraftigt.

Det material som studien bygger på är mestadels från databasen ERIC, då dess inriktning är mot pedagogik. Material användes även från databaserna Primo och Google Scholar men inte i samma utsträckning som från ERIC. Det kan vara svårt att konstatera om artiklarna i Primo och Google Scholar är vetenskapligt granskade. Användning av databaser där icke vetenskapligt granskade publikationer finns kan påverka reliabiliteten, men då vi har använt oss av artiklar och litteratur som är vetenskapligt granskade påverkas reliabiliteten på ett positivt sätt. Sökningar gjordes även via databasen MathEduc, som är en databas inriktad mot matematikdidaktik. Sökningarna via den databasen gav oss inte relevant material och i efterhand tror vi att den bakomliggande orsaken är sökorden vi använde oss av.

De sökord informationssökningen gav oss var dels artiklar med relevant innehåll, dels artiklar som inte uppfyllde våra inklusionskriterier. I de artiklar som inte ansågs uppfylla inklusionskriterierna låg fokus istället på forskning kring elever på gymnasial nivå eller vände sig till lärare på universitetsnivå. Arbetet med representationsformer framställs positivt i de valda artiklarna men i datasamlingen saknade vi forskares olika syn på ämnet. Vi tror att det påverkade diskussionen negativt, då avvikande synpunkter var svåra att hitta. För att motverka det hade vi kunnat utvidga vårt sökområde genom att utveckla våra sökord. Med utvecklade sökord hade vi eventuellt kunnat upptäcka fler artiklar som även tar upp motsägelsefulla synpunkter och aspekter, vilket i sin tur hade kunnat påverka studiens resultat och diskussion.

På grund av att våra sökord inte var tillräckligt precisa valde vi att göra så kallade kedjesökningar. Genom kedjesökningar hittades inte enbart artiklar utan även antologier som senare kunde användas i arbetet. Kedjesökningarna anser vi är en positiv faktor i informationssökningen, då arbetsmetoden inte bara gav oss mer relevant material än tidigare utan även en inblick i vilka forskare som är framstående inom ämnet. Vi har arbetat effektivt utifrån vårt syfte och våra frågeställningar vilket vi anser vara positivt. Det kan även indikera på god validitet.

Däremot kan validiteten i vår studie påverkats av vår positiva inställning till arbete med olika representationsformer. Vår positiva inställning kan ha påverkat urvalet så att resultatet som lyfts fram mest visar på positiva aspekter kring variationen av representationsformer. Våra egna uppfattningar om representationsformer har funnits i åtanke under arbetets gång och det har medfört att vi har jämfört de uppfattningarna med forskningens.

6.2 Resultatdiskussion

Elevers tillvägagångssätt med matematiska uppgifter är något som både är intressant och relevant för en lärare att observera. Enligt kunskapskraven för årskurs 6 ska elever med hjälp av olika representationer förklara sina beräkningar (Skolverket, 2011b). Under vår verksamhetsförlagda utbildning upptäckte vi att elever uppvisade svårigheter med att variera mellan olika representationsformer. Eleverna tecknade oftast endast med hjälp av den aritmetiska/algebraiska representationsformen eller beskriva sitt tillvägagångssätt med huvudräkning för att undgå den fysiska notationen.

Enligt en studie gjord av Ryken (2009) uppmärksammades det att elever oftast väljer att uttrycka sig på ett sätt genom att endast använda en representationsform. Vår fundering är om elever väljer en representationsform på grund av trygghet eller för att de tycker att det är svårt att växla mellan representationsformer? Elever behöver få en insikt i samt kunskap om representationsformernas betydelse för att kunna använda de olika formerna samt kunna växla mellan dem. Det i sin tur leder förhoppningsvis till en ökad säkerhet i användandet av flera olika former. Det finns elever som utvecklar en matematisk förståelse med hjälp av någon annan representationsform än den vanligaste, den så kallade algebraiska/aritmetiska formen. Vi anser inte att det är positivt att elever fastnar i användandet av en form, utan vi ser gärna att elever ska få möjligheter att ta egna initiativ och kunna välja den representationsform som är mest

lämpad för den aktuella uppgiften. Målet är trots allt att elever ska utveckla sin matematiska förmåga, oberoende vilken representationsform som används för att få en djupare förståelse. Däremot ska elever enligt kunskapskraven kunna ge förslag på olika tillvägagångssätt samt växla mellan olika representationsformer för att kunna förklara hur olika begrepp relaterar till varandra (Skolverket, 2011b).

I vårt resultat upplyser Stylianou (2010) att även lärare upplever svårigheter i undervisningen vid användandet av representationsformer. Är det en bidragande orsak till att den aritmetiska/algebraiska representationsformen är den mest frekventa formen i matematikundervisningen? Uyangör och Karaca (2010) som tidigare nämnts lyfter att lärarens egen inställning och kunskap kring representationer kan påverka lärarens sätt att undervisa om de olika representationsformerna. Genom att använda exempelvis Grevholms (2014) tanketavla tror vi att både lärare och elever får möjlighet att träna på och använda de olika representationsformerna och utveckla en säkerhet i användandet.

(A) ORD	(B) FÖREMÅL
(C) BILD	(D) SYMBOL

Figur 1 Tanketavla (Grevholm, 2014, s.223)

Enligt kunskapskraven för årskurs 6 ska elever utveckla förmågan att kunna beskriva sitt tillvägagångssätt på flera och varierande sätt. Elever ska även kunna ge förslag på ett alternativt fungerande tillvägagångssätt samt kunna samtala med andra kring olika metoder för att lösa matematiska uppgifter (Skolverket, 2011b). Vår tanke är att elever behöver träna på att kommunicera matematik vilket möjligtvis skulle kunna öka säkerheten i användandet av olika

representationsformer. Genom kommunikation kan elever få en förståelse för hur de själva tänker samt få en förståelse för hur andra elever tänker. Elever kan och bör ta lärdom av varandra genom att lyssna, kommunicera och se varandras uträkningar och beskrivningar. Genom att uppmärksamma hur andra elever arbetat med de fyra representationsformerna kan de själva få förståelse för dem.

Genom elevers dialoger och diskussioner med varandra kan även läraren få en förståelse för elevers användande av olika representationer. Som tidigare nämnts i arbetet beskriver Abrahamsson (2006) att klassrumdialoger är positiva och anser att kommunikationen kan användas för att diskutera representationsformers betydelse. Kommunikationen medför att elever kan uttrycka sina matematiska tankar och läraren får då förståelse för och insikt i elevers matematiska tänkande. Kommunikationen i matematikklassrummet har utvecklats till att bli en viktig aspekt vid matematisk inläring (Couco, 2001). Lesser & Tchoshanov (2005) förespråkar att elever och lärare ska ha en dialog om hur de har gått tillväga och vad de menar med resultatet. Det är kommunikation som kan ge läraren en insikt i elevens interna- och externa representationer. Kommunikation anser vi också är en viktig del i arbetet med representationsformer. Något som kan ses som en försvårande faktor vid bedömningar av kommunikation i matematiken är tidsaspekten. Men då det ingår i uppdraget att bedöma både de interna och externa representationer, måste det centrala i klassrummet vara kommunikation. En annan faktor som påverkar är att vissa elever har svårt att utveckla de interna representationerna till externa. Här har läraren en mycket viktig funktion att fylla. Lärarens uppdrag är att bedöma hela processen ända fram till resultatet, vilket kan vara svårt om elevens kunskaper är bristfälliga.

6.3 Slutsatser

Utifrån litteraturstudien kan vi dra slutsatsen att arbetet med representationsformer främjar elevers fortsatta matematiska utveckling. Genom representationsformer kan elever utveckla en matematisk förståelse samt det matematiska tänkandet och förmågan att beskriva sitt tillvägagångssätt. Elever bör utveckla en medvetenhet kring användandet av olika representationsformer och förstå att de hela tiden använder olika representationsformer. Forskningen lyfter fram att genom växling och övergångar mellan representationsformer kan elever utveckla en djupare förståelse för matematiken.

Det förekommer svårigheter i arbetet med olika representationsformer. Elever anser att de endast behöver använda en representationsform och kan då inte förklara sitt tillvägagångssätt på flera sätt. Växlingen kan även skapa svårigheter för elever på grund av att de saknar grundläggande kunskaper kring användandet av flera representationsformer. Enligt forskningen är det inte enbart elever som har svårigheter med representationsformerna. Lärarens uppfattning och egna erfarenheter av arbetet med formerna påverkar huruvida undervisningen kring representationsformerna utformas. Forskningen lyfter även fram att om läraren utstrålar en positiv inställning till arbetet med representationer kan elever också utveckla en positiv inställning till arbetet.

Kunskap om representationsformer kan och bör utvecklas via ett samspel mellan lärare-elev och elev-elev. En ständig kommunikation behövs för att synliggöra elevers matematiska kunskaper och förståelse. Genom kommunikationen kan elever tillsammans med lärare och varandra diskutera olika tillvägagångssätt och får då möjlighet att få en förståelse för hur andra människor tänker samt ta del och lärdom av andra representationsformer. Därför är det viktigt att läraren ger elever möjlighet till en undervisning där kommunikationen är central.

6.4 Vidare forskning

Resultatet av den här studien visar att elever saknar kunskap om de olika representationerna samt upplever svårigheter med att använda flera olika representationsformer. Eleverna använder sig i huvudsak av en representation vid beräkningar, då användandet av fler kräver mer av eleverna. I en eventuell fortsatt forskningsstudie vore det intressant att studera huruvida elevers kunskaper kring representationsformer återspeglas i deras matematiska arbete samt vilka svårigheter som kan förekomma i arbetet. Det vore även intressant att undersöka utifrån ett lärarperspektiv och en lärares tankar kring representationsformer och hur de använder sig av dem i undervisning. En forskningsstudie kring huruvida lärares inställning och motivation till arbetet med olika representationer kan hjälpa elever att vilja använda flera olika representationer anser vi hade varit ett intressant ämne att forska vidare om.

Vi har konstaterat att kommunikationen är en central del för att kunna fördjupa kunskap i användandet av flera representationer. Därför hade det varit intressant att undersöka om det finns matematikklassrum som arbetar aktivt med kommunikation i matematikundervisningen,

för att på så sätt främja arbetet med representationsformer. Ett annat intressant forskningsområde hade varit att undersöka huruvida elever själva kommunicerar för att göra sig förstådda när de beskriver och samtalar om representationer.

Under informationssökningen och materialanalysen uppmärksammades det att forskning kring representationsformerna där datorer var ett hjälpmedel ofta förekom. Vi tror att den snabba utvecklingen av teknologi skulle kunna vara ett eventuellt forskningsområde. Dagens elever är mycket bekanta med datorer, surfplattor och telefoner. Hur kan lärare undervisa om representationsformerna med hjälp av teknologin? På vilket sätt kan elever enklare utveckla sina matematiska kunskaper med hjälp av teknologin? Det är några exempel på forskningsfrågor som man skulle kunna besvara genom en observation eller undersökning.

Referenslista

- Abrahamson, D. (2006). Mathematical representations as conceptual composites: implications for design. In Alatorre, S, Cortina J. L & Mendez, A (Ed.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the north american chapter of international group for the psychology of mathematics education, USA*, (2. uppl., 464-466).
- Bossé, J. M., Adu-Gyamfi, K., & Cheetham, M. (2011). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. *Mathematical translations & teacher beliefs*.
- Boulton-Lewis, M, G. (1998). Children's strategy use and interpretations of mathematical representations. *Journal of mathematical behavior*, 17(2), 219-237.
- Bryman, A. (2001). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (1. uppl.) Malmö: Liber ekonomi.
- Cai, J. (2005). U.S. and Chinese teachers' constructing, knowing and evaluating representations to teach mathematics. *Mathematical thinking and learning*, 7(2), 135-169. doi:10.1207/s15327833mtl0702 3.
- Couco, A, A. (2001). The roles of representations school mathematics. *Research and teaching in developmental education*, 19(1), 70-72.
- Dündar, S. (2015). Mathematics teachercandidates' performance in solving problems with different representations styles; The trigonometry example. *Eurasia journal of mathematics, science & technology educations*, 2015, 11(6), 1379-1397.
- Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of mathematical behavior*, 17(2), 137-165.
- Goldin, G. (2008). Perspectives on representations in mathematical learning and problem solving. In English, D, L (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, 2, (s. 176-201). Abingdon: Taylor and Francis.
- Grevholm, B. (2014). *Lära och undervisa matematik*. Stockholm: Studentlitteratur.
- Helenius, O., Rystedt, E., & Trygg, L. (2013). *Representations, uttrycksformer och begrepp*. Hämtad den 24 januari, 2016, från https://matematiklyftet.skolverket.se/matematik/faces/training/ak4-6/newlink3647/newlink648?_adf.ctrl-state=11nxvalnfs_4&_afLoop=6995374054962771.
- Lee, J. (2015). "Oh, I just had it in my head": Promoting mathematical communications in early childhood. *Contemporary issues in early childhood*, 16(3), 284-287. doi:10.1177/1463949115600054.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and Translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier, (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lesser, L., & Tchoshanov, M. (2005). The effect of representation and representational sequence of students' understanding. In Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Ed.). *Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, USA*.

Momona-Downs, J., & Downs, M. (2002). Advanced mathematical thinking with special referense to reflection on mathematical structure. In Lyn, D English, (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (s.165-196). New York: Lawrens Erlbaum Associates, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Ryken, A. (2009). Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning. *Math Teacher Educ*, 20, 347-364. doi: 10.1007/s10857-009-9107-2.

Skolverket. (1994). *Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet, Lpo 94*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011a) *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2013). *PISA 2012: 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap: resultaten i koncentrat*. Stockholm: Skolverket.

Skolöverstyrelsen. (1969). *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Svenska utbildningsförlaget Liber AB.

Skolöverstyrelsen.(1980) *Läroplan för grundskolan*. Stockholm: Svenska utbildningsförlaget Liber AB.

Stylianou, A., D. (2010). Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics. *Math Teacher Educ* 13, 325-343. doi:10.1007/s10857-010-9143-y.

Tinungki, M., G. (2015). The role of cooperative learning type team assisted individualization to improve the students' mathematics communication ability in the subject of probability theory. *Journal of Education and Practice*, 6(32), 27-31.

Uyangör, S., & Karaca, D. (2010). The attitudes of the prospective mathematics teachers towards instructional technologies and material development course. *The Turkish online Journal of educational technology*, 9(1), 213-220.

Bilaga 1

Översikt analyserad litteratur

Författare, Titel, Tidsskrift, Publikationsår, Land, Databas	Syfte	Design Urval Datainsamling	Resultat
Boulton-Lewis, M. G (1998), <i>Children's strategy use and interpretations of mathematical representations</i> . Australien, ERIC	Syftet var att bedöma värdet och användningen av representationer.	Presenterar utifrån sin förra forskning statistisk data och presenterar den med hjälp av olika linjediagram.	Resultatet visar att elevernas val av strategier och representationer påverkar lärarens planering av undervisningen. Lyfter även olika tankar och aspekter kring varför man ska använda representationer.
Goldin, G. (1998) <i>Representational systems, learning, and problem solving in mathematics</i> . USA, ERIC	Syftet med artikeln är att undersöka psykologiska modeller för matematisk lärande och problem lösning.	Information om olika representativa system, jämför och diskuterar dem.	De är inte motstridiga, de passar ihop till en helhet.
Ryken, A (2009). <i>Multiple representations as sites for teacher reflection about mathematics learning</i> . USA, ERIC	Syftet är att hjälpa lärarutbildare, blivande lärare och grundskoleelevers matematiska tänkande.	Författaren undersöker hur blivande lärare gör olika representations uppgifter och hur de tänker angående elever tänkande.	Det är viktigt att veta hur matematiska modeller ska användas. Undersökningen tyder också på att genom att analysera representationer hjälper det blivande lärare att ompröva sina undervisningsmetoder.
Stylianou, A, D, (2010), <i>Teachers' conceptions of representations in middle school mathematics</i> . USA, ERIC	Syfte är att undersöka om lärare uppfattar representationer som en process för matematik. Tar även upp lärares perspektiv på representationernas roll i lärandet i klassrummet.	Studien gjordes genom att hon intervjuade flera mellanstadielärare. Hon lyfte andra forskares synpunkter och kopplade samman dessa med de intervjuade lärarnas synpunkter. (Kvalitativ forskning)	Resultatet blev att flera av lärarna upptäckte att de använde flera olika representationer utan att de tänkte på det. Klargjorde även vad representationer är.

Dündar, S, (2015). <i>Mathematics teacher candidates' performance in solving problems with different representation styles: The trigonometry example</i> . Turkiet, ERIC	Syftet är att undersöka hur matematik lärare inom trigonometri problem representerar format. De poängterar att flera representationer av ett problem kan bidra till ett mer meningsfullt lärande.	Denna studie kombinerar kvantitativa och kvalitativa uppgifter som samlas in och analyseras.	Testerna visade att det symboliska testet hade det lägsta antalet fel medan det visuella testet hade mer misslyckanden. De kom fram till att trigonometri är svårt för matematik instruktörerna att lära och eleverna uppger att det är komplicerat. (Lärarnas inställning till representations stilar)
Uyangör, S & Karaca, D. (2010). <i>The attitudes of the prospective mathematics teachers towards instructional technologies and material development course</i> . Turkiet. ERIC	Studiens syfte är att fastställa blivande lärares attityder som går Secondary Mathematics Education mot Instructional Technology and Material Development(ITMD). De undersöker vad man kan göra för att attityden ska bli mer positiv.	De har intervjuat och gjort test med 44 studenter som tar ITMD lektioner.	Resultatet blev att lärarkandidaters inställning till materialutvecklingen ökade.
Lesser, L & Tchoshanov, M. (2005) <i>The effect of representation and representational sequence of students' understanding</i> . USA, ERIC	Denna studie undersöker effekten av representationers påverkan på elevernas förståelse av matematiska begrepp.	Det är undersökningar från åtta olika mellanstadie lärare, hur de använder sig utav representationer i klassrummet.	Resultatet visar att elevernas medverkande utvecklar den matematiska förståelsen. Eleverna utvecklar inte bara kunskap med kombinationer av representationer utan även av en representation. Men kombinerade representationer är det bästa.
Cai, J (2005), U.S. and Chinese teachers' constructing, knowing, and evaluating representations to teach mathematics. <i>Mathematical thinking and learning</i> . USA. ERIC	Syftet är att undersöka amerikanska och kinesiska lärares uppfattningar och konstruktioner av representationer i matematikundervisningen	11 amerikanska och 9 kinesiska lärare deltog i studien. Lärarna fick delta i tre olika moment. Vid varje tillfälle bedömdes lärarna och data samlades in.	Resultatet visar att de amerikanska och kinesiska har olika syn på användandet av representationer. I USA används det mer än gärna men i Kina mindre. Studien visar även att de kinesiska lärarna inte har någon förståelse vad representationer. Artikeln lyfter även vad lärarna

			tycker om arbetet med representationer.
Couco, A.A (2001), The roles of representations school mathematics. <i>Research and teaching in development education</i> . USA. JSTOR	Förklara skillnaden mellan Interna och Externa representationer.	Ingen datainsamling. Fakta baserad text.	Beskriver skillnaden mellan interna och externa. Skriver även att representationer är viktiga för elevernas matematiska utveckling.
Goldin, G (2008). Perspectives on representations in mathematical learning and problem solving. <i>Handbook of international research in mathematics education vol 2</i> . England. Google Scholar	Lyfta olika aspekter om representationer. Olika modeller kring arbete med representationer lyfts upp.	Presenterar fakta utifrån andra forskares publikationer. Ingen datainsamling.	Resultatet visar vilka olika representationer som finns, interna och externa. Presenterar även varför det är viktigt att använda representationer. Lyfter också olika sätt att arbeta med representationer och vilka olika typer och former det finns av representationer.
Lesh, R, Post, T & Behr, M (1987). <i>Representations and Translations among representations in mathematics learning and problem solving</i> . USA, ERIC	Syftet är att kortfattat beskriva representationers olika roller och översättningar mellan dem	Studien baseras på, Applied Mathematical Problem Solving (AMPS), Proportional Reasoning (PR), and Rational Number (RN) concept formation. Past PN, PR, and AMPS publications.	Översättnings förmågorna är viktiga faktorer som påverkar det matematiska lärandet och problemlösnings förmåga.
Momona-Downs, J & Downs, M (2002). Advanced mathematical thinking with special referense to reflection on mathematical structure. <i>Handbook of international research in mathematics education vol 1</i> . USA. Google Scholar	Syftet är att lyfta det avancerade matematiska tänkandet. Vilka olika stadier det finns i tänkandet osv. Även olika strukturer som påverkar det matematiska tänkandet.	Baserad på andra forskares samt egna uppfattningar om det matematiska tänkandet. Ingen statisk data presenterad.	Presenterar de olika stegen i det matematiska tänkandet. Visar hur representationer kan påverka elevernas matematiska tänkande. Lyfter även olika strukturer som kan användas i undervisningen.

<p>Lee, J (2015). "Oh, I just had it in my head": Promoting mathematical communications in early childhood. <i>Contemporary issues in early childhood</i>. USA, ERIC</p>	<p>Syfte att presentera effektiva strategier för att främja barns matematiska kommunikation.</p>	<p>Baserad på andra forskares texter. Lyfter upp egna tankar med. Ingen observation eller intervju studie utan litteraturbaserad.</p>	<p>Resultatet visar att läraren har en viktig roll i klassrummet för att hjälpa eleverna att utveckla matematisk kommunikation. Viktigt att använda sig av olika strategier för att ge eleverna möjligheten att utveckla kunskaperna</p>
<p>Bossé, J. M, Adu-Gyamfi, K & Cheetham, M (2011). Translations among mathematical representations: Teacher beliefs and practices. <i>Mathematical translations & teacher beliefs</i>. USA, ERIC</p>	<p>Syftet är att studera hur elever och lärare växlar mellan representationer. Även upplysa hur lärares förväntningar är på elevernas resultat och olika tips på hur en lärare kan arbeta med representationer</p>	<p>Studie där både lärare och elever medverkar. Där dessa svarar på olika matematiska uppgifter och ska växla mellan olika representationer. Data samlades sedan in genom att forskarna fick svaren av personerna.</p>	<p>Resultatet visar att eleverna har lättare att växla mellan vissa representationer än andra.</p>
<p>Abrahamsson, D (2006). Mathematical representations as conceptual composites: implications for design. <i>Proceedings of the 28th annual meeting of the north american chapter of international group for psychology of mathematics education</i>. USA, ERIC</p>	<p>Syftet är att belysa de olika kunskaper man kan nå genom att sätta samman fler representationer för att främja begreppsförståelse.</p>	<p>Presenterar tre olika sätt att arbeta med representationer genom steg för steg. Texten är mestadels baserad på honom själv men lyfter även vissa andra forskare. Visar via bilder och tabell.</p>	<p>Resultat visar att hur lärare kan jobba med representation inom tre områden. Presenterar svårigheter som eleverna kan få med de olika sätten. Skriver att lärares roll är att demonstrera för att eleverna ska kunna lära sig.</p>
<p>Tinungki, M., G. (2015) The role of cooperative learning type team assisted individualization to improve the students' mathematics communication ability in the subject of probability theory. <i>Mathematics department, Mathematics and Natural Sciences Faculty, Hasanuddin University Makassar</i>. Indonesian, ERIC</p>	<p>Syftet är att studera hur/om kommunikationsförmågan i ämnet matematik kan bindas samman med den kooperativa inläringen.</p>	<p>Studien baseras på både en kvantitativ och en kvalitativ metod.</p>	<p>Det finns ett samband mellan den matematiska kommunikationen och den kooperativa inläringen.</p>