JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Problemlösning med sju- och åttaåringar

En fenomenografiskt inspirerad studie av elevers olika lösningsstrategier av ett matematiskt problem

Elsa Gunnarsson

KURS: *Examensarbete II, F-3, 15 hp*

FÖRFATTARE: *Elsa Gunnarsson*

EXAMINATOR: *Mikael Segolsson*

TERMIN: *VT16*

JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Examensarbete II, F-3, 15 hp
Grundlärarprogrammet med inriktning mot arbete i förskoleklass och grundskolans årskurs 1-3

VT16

SAMMANFATTNING

Elsa Gunnarsson

Problemlösning med sju- och åttaåringar

En fenomenografiskt inspirerad studie av elevers olika lösningsstrategier av ett matematiskt problem

Antal sidor: 35

Problemlösning genomsyrar hela läroplanen och är en viktig del av matematik-undervisningen i skolan (Skolverket, 2011a). Att lösa problem kommer naturligt för barn och det är lärarens uppgift att ta vara på den förmågan och hjälpa elever att bli effektiva problemlösare. Förmågan att lösa problem är en viktig kunskap som varje elev har fördel av att kunna (Lester, 1996). Studiens syfte är att undersöka variationen av problemlösningsstrategier som elever använder samt undersöka hur eleverna resonerar när de löser ett problem. 39 elever från två olika skolor i England och Sverige fick lösa ett matematiskt problem och sedan intervjuades 12 av dem med olika lösningsstrategier. Resultatet visade att eleverna använde sig av fyra olika kategorier av lösningsstrategier. De olika kategorierna var: lösningsstrategi genom addition, lösningsstrategi genom addition och subtraktion, lösningsstrategi genom att gissa och resonera, och lösningsstrategi genom att söka mönster. Det fanns även en grupp elever som inte hade någon utläsbar lösningsstrategi. Slutsatsen av studien är att elever behöver explicit undervisning i problemlösning för att till fullo kunna behärska den.

Problem solving permeates the Swedish national curriculum and it is an important part of mathematics education (Skolverket, 2011a). To solve problems comes naturally to children and it is the teacher's task to harvest this ability and help pupils to be effective problem solvers. The ability to solve problems is an important knowledge and if known provides an advantage in life (Lester, 1996). The purpose of this study is to investigate the variation of problem solving strategies that pupil use and to investigate their mathematical reasoning while solving a mathematical problem. 39 pupils from two different schools in England and Sweden got to solve a mathematical problem and then 12 of them, which had different solution strategies, were selected for an interview. The result showed that the pupils used four categories or solving strategies. The categories were: finding a solution though addition, finding a solution though both addition and subtraction, finding a solution though guessing and reasoning and finding a solution though seeking patterns. There was also one group of pupils who did not have a distinguishable solution strategy. The conclusion of this study is that pupils need explicit teaching about problem solving to be able to fully master it.

Sökord: Problemlösning; Lösningsstrategi; Matematiskt Problem; Variation.

Keywords: Problem Solving; Strategy; Solution; Mathematical Problem; Variation.

Innehållsförteckning

1. Inledning....4
2. Bakgrund....5
2.1 Problemlösning i Lgr11....5
2.2 Problemlösning....5
2.3 Fundamentala bakgrundsfaktorer för problemlösning....6
2.4 Ett matematiskt problem/ett rikt problem....8
2.5 Lösningsstrategier....10
3. Syfte....12
4. Metod....13
4.1 Fenomenografisk ansats....13
4.2 Datainsamlingsinstrument....13
4.3 Genomförande....14
4.4 Urval....15
4.5 Dataanalys....15
4.6 Etiska överväganden....16
5. Resultat....18
5.1 Vilka lösningsstrategier använde eleverna?....18
5.2 Elevernas beskrivningar av sina lösningar....19
5.2.1 Lösningsstrategi med addition....19
5.2.2 Lösningsstrategi med både addition och subtraktion....20
5.2.3 Lösningsstrategi att gissa och resonera....22
5.2.4 Lösningsstrategi att söka mönster....23
5.2.5 Ingen utläsbar lösningsstrategi....24
5.3 Elevers uppfattningar angående problemlösning....25
5.3.1 Elevers uppfattningar angående lösningsstrategier....26
5.4 Resultatsammanfattning....27
6. Diskussion....28
6.1 Metoddiskussion....28
6.2 Resultatdiskussion....30
6.2.1 Problemlösningsstrategier....30
6.2.2 Elevers lösningar....30
6.2.3 Elevers resonemang om problemlösning och lösningsstrategier....32
7. Avslutande ord....33
8. Referenser....34

1. Inledning

Matematik har en flertusenårig historia och är till sin art reflekterande, kreativ och problemlösande (Skolverket, 2011a). Barn är problemlösare av naturen. Lärarens uppgift är att ta vara på denna naturliga förmåga och hjälpa elever att bli effektiva problemlösare. Förmågan att lösa problem är en viktig kunskap som varje elev har fördel av att kunna (Lester, 1996). Ett av de viktigaste målen för skolan är att förbereda eleverna inför livet, utanför och efter skolan (Wyndham, Riesbeck & Schoultz, 2000). Genom kunskaper i matematik får elever förutsättningar för att klara av att lösa vardagliga problem, och målet är att eleverna sedan ska kunna fatta välgrundade beslut och lösa problem även i vuxen ålder (Skolverket, 2011a). I den här studien likställs ett problem med ett matematiskt problem eller ett rikt problem. Ett rikt problem är ett problem som inte har en direkt uppenbar lösning utan eleven måste anstränga sig och lägga ner tid för att komma fram till en lösning av problemet (Taflin, 2007). Genom att arbeta med problemlösning lär sig eleverna ett förhållningssätt gentemot matematik där elevens lösningar och resonemang blir i fokus (Grevholm, 2012). Att hjälpa barn att bli bättre problemlösare är inte bara ett viktigt mål i skolan utan även en mycket spännande och rolig utmaning för lärare (Lester, 1996). Det ligger en glädje i att förstå och kunna lösa ett problem (Skolverket, 2011b).

Den här empiriska studien undersöker hur elever uppfattar ett matematiskt problem och vilka lösningsstrategier de använder. Urvalet består av 20 elever från en engelsk skola och 19 elever från en svensk skola. Datainsamlingen innehåller analyser av elevintervjuer om hur de löste problemet. Syftet med studien är att undersöka variationen av problemlösningsstrategier som elever använder samt hur eleverna resonerar kring sina lösningar och val av strategier.

2. Bakgrund

Forskning inom problemlösning presenteras fortlöpande genom hela bakgrunden. I bakgrunden behandlas först problemlösning i den nuvarande läroplanen, Lgr11 (2.1). Sedan beskrivs problemlösning som tillvägagångssätt (2.2), fundamentala bakgrundsfaktorer för problemlösning (2.3), vad ett rikt problem är (2.4) samt vilka lösningsstrategier som finns (2.5). I studien följs svenska skrivreglers rekommendation för hur siffror ska skrivas, det vill säga matematiska operationer och uttryck skrivs med siffror medan tal i allmänhet skrivs med bokstäver eller siffror (Språkrådet, 2008).

2.1 Problemlösning i Lgr11

Problemlösning genomsyrar den nuvarande läroplanen Lgr11 och finns med både i läroplanens inledande kapitel om skolans övergripande mål och riktlinjer samt i syftestexten i kursplanen för matematik. Problemlösning finns även med som egen kategori under det centrala innehållet i läroplanen (Skolverket, 2011a). Således är problemlösning en central del i undervisningen i skolan (Taflin, 2007; Wyndham, et al. 2000).

Skolverket (2011b) framhåller i kommentarmaterialet att undervisningen i problemlösning ska ge eleverna möjlighet att lära sig tolka ett matematiskt problem med anknytning till vardagen samt kunna lösa det och reflektera över valda strategier och deras rimlighet. Undervisningen i matematik ska även utveckla elevernas förmåga att motivera, argumentera och föra matematiska resonemang, vilket är en viktig aspekt i problemlösning (Skolverket, 2011a). Skolverket (2011b) framhåller att eleverna även behöver känna tilltro till sin matematiska förmåga och att undervisningen ska bidra till att eleverna känner sig säkra i sina matematikkunskaper. Att känna tilltro till sin förmåga innebär att en elev inte alltid behöver fokusera på ”rätt” sätt att lösa ett problem utan eleven vet att det finns flera olika sätt att lösa ett problem och kan således pröva sig fram till olika strategier för att lösa problemet (a.a.).

2.2 Problemlösning

Problemlösning är en central del inom matematiken och omfattar flera områden inom matematiken (Skolverket, 2011b). Problemlösning innebär att man använder det man redan kan och har erfarenhet av på ett nytt sätt, genom att tänka logiskt, systematiskt och genom att göra medvetna tankeexperiment för att lära sig ny kunskap (Wyndham, et al. 2000). Taflin (2007) framhåller att förmågan att kunna tolka ett problem och förstå vad det är som ska lösas är kompetenser eleverna måste ha i problemlösning. Vidare hävdar Taflin (2007) att problemlösning är det sätt som man bör lära sig matematik på. Polya (1957) jämför problemlösning med att lära sig simma. För att lära sig härmar man och sedan övar och praktiserar man det man härmat.

Wyndham, et al. (2000) beskriver likt Polya problemlösning som en process som består av flera intellektuella steg. Det *första steget* är bestämning av vad som är givet, det vill säga vilken information som ges i problemet. Det *andra steget* är fastställande av målet. Det innebär att eleven behöver förstå vad det är som efterfrågas i problemet. Vad är det som eleven ska ta reda på? Det *tredje steget* är utformande av en väg som leder till målet. Det innebär att eleven behöver finna en lösningsstrategi på problemet. Det *fjärde steget* i lösningsprocessen är utförande av nödvändiga beräkningar för lösningen, det vill säga vilka aritmetiska och algebraiska beräkningar som behövs. All analys och resonerande bedrivs i de första tre stegen och i det sista steget görs beräkningarna. Den här processen upprepas tills eleven funnit en lösning på problemet (Wyndham, et al. 2000; Polya, 1957). Det *sista steget* är att se tillbaka och kontrollera resultatet (Polya, 1957). Det är även viktigt att kontrollera varje steg vid genomförandet för att inte avvika från planen (Möllehed, 2001).

Skolverket (2011b) framhåller att användandet av matematiska begrepp, strategier, uttrycksformer och att kunna resonera matematiskt är viktiga delar inom problemlösning. Att kunna värdera sitt val av lösningsstrategi och kunna värdera rimligheten i sitt tillvägagångssätt eller svar är kunskaper som elever måste kunna inom problemlösning. Eleverna måste även kunna olika tillvägagångssätt och veta att det inte alltid finns ett rätt sätt utan att problemlösning till stor del handlar om att hitta alternativa lösningar på problem (a.a.). Problemlösning kan utveckla elevers kognitiva processer samt ge möjlighet till grupparbete och diskussion kring matematik. Problemlösning utgör även en koppling mellan matematiken och verkligheten i och med att uppgifterna ofta handlar om vardagliga situationer (Taflin, 2007). Problemlösning möjliggör för eleverna att prata matematik med varandra, lyssna på andras matematiska resonemang och argumentera för sina egna lösningar. Det räcker inte enbart med diskussion mellan elever framhåller Wyndham, et al. (2000), utan läraren måste även hjälpa eleverna att utveckla, tydliggöra och fördjupa sina kunskaper i problemlösning.

2.3 Fundamentala bakgrundsfaktorer för problemlösning

Lester (1996) framhåller att problemlösning är en förmåga som utvecklas under lång tid eftersom den kräver relativt djupa matematiska kunskaper. För att behärska problemlösning behöver eleven kunna resonera och söka efter lämpliga lösningsstrategier (Wyndham, et al. 2000). Enligt Lester (1996) finns det fem faktorer som är fundamentala för problemlösning. Dessa faktorer är även beroende av varandra.

Den *första faktorn* är kunskapande och användning. För att kunna förstå och lära sig det behöver eleverna ha informell och formell kunskap i matematik. Kunskaperna bör innehålla faktakunskaper om tal, exempelvis god kunskap om positionssystemet eller kunskaper om geometriska former (Lester, 1996). Eleverna behöver ha begreppskunskap vilket innebär att de har kunskaper om olika faktakunskaper som exempelvis tabellkunskaper, taluppfattning, kunna se samband, matematiska symboler och representationer. Procedurkunskap ingår också under kunskapande och användning och är en kunskap eleverna behöver lära sig, vilket innebär att eleven behärskar operationell kunskap som exempelvis att kunna göra beräkningar eller förenklingar av ekvationer (Wyndham, et al. 2000). Eleverna behöver ha viss kunskap om algoritmer, strategier som exempelvis rita bilder eller söka mönster samt ha viss kunskap om olika problemtyper (Lester, 1996). Kontexten kring problemet påverkar elevens förståelse för det och eleverna behöver känna igen olika kontexter för att till fullo kunna förstå ett problem (English & Gainsburg, 2016). Grevholm (2012) framhåller att problemlösning främst handlar om olika textuppgifter där det är nödvändigt för eleven att förstå kontexten samt matematiken i uppgiften för att kunna lösa den. Problemlösning förutsätter därmed både kunskaper i läsförståelse och matematik för att eleven ska kunna tolka uppgiften på ett korrekt sätt. Det är särskilt viktigt att eleverna har kunskap om hur man organiserar och presenterar sina lösningar (Lester, 1996). För att lösa problem är strategisk kunskap viktigt. Det innebär att eleven kan förstå ett problem, systematiskt använda dess information och använda det i beslutsprocessen för att finna en lösning på problemet (Wyndham, et al. 2000).

Den *andra faktorn* som är betydelsefull för problemlösning är kontroll, det vill säga att kunna kontrollera sina lösningar och matematiska operationer. Det är av betydelse för elevens problemlösningsförmåga att han eller hon kan fördela och organisera sina resurser och kunskaper, det vill säga att eleven kan matematiska regler och kan applicera dem i problemlösningen (Lester, 1996).

Den *tredje faktorn* är uppfattning av matematik (Lester, 1996). Metakognitiv kunskap omnämns i vissa sammanhang som en förutsättning för ett framgångsrikt problemlösande. Den metakognitiva kategorin innebär att eleven kan analysera ett problem, styra sina tankar och bedöma sina val (Wyndham, et al. 2000). Elevers uppfattning av matematik innefattar deras föreställningar över hur deras matematiska kunskaper ser ut. Elevers subjektiva syn på sitt lärande är även beroende av vilken matematikdidaktisk omgivning som råder. Den matematiska omgivningen karaktäriseras av vilka områden inom matematik som behandlas och hur läraren undervisar om dem (Lester, 1996).

Den *fjärde faktorn* som är grundläggande för problemlösning är elevers affekter, det vill säga deras känslor och attityder gentemot matematik. Om en elev exempelvis är motiverad, intresserad och inte ger upp utan försöker igen så påverkar det elevens prestationer i problemlösning positivt. Hade eleven däremot haft en avig attityd gentemot matematik hade troligtvis den elevens lärande inte fortskridit lika fort som den föregående elevens lärande (Lester, 1996).

Den *femte faktorn* som påverkar lärandet av problemlösning är sociala sammanhang. Sociokulturella faktorer, som exempelvis samspel mellan elever och lärare, värderingar samt förväntningar på eleverna, påverkar elevernas utveckling av och förståelse för problemlösning. Sociala sammanhang har även en inverkan på elevernas användning av matematiska tekniker och idéer i problemlösning. Människor påverkas av andra människors beteende och detta påverkar också lärandet av problemlösning, exempelvis lärarens inställning till problemlösning påverkar elevernas lärande av den. I sociala situationer skapas ofta utveckling av och förståelse för olika idéer och metoder inom problemlösning (Lester, 1996). Även sociala situationer utanför skolan påverkar elevens förståelse för problemlösning. Eleven har med sig en matematisk kunskap från hemmet, exempelvis räknekunskaper från besök i matbutiken, när han eller hon kommer till skolan och dessa erfarenheter påverkar elevens lärande i problemlösning (Riesbeck, 2000). Andra sociala faktorer som exempelvis elevers relationer till läraren och andra elever påverkar även matematikundervisningen. Dessa faktorer överlappar och är beroende av varandra och kan således inte separeras till enskilda enheter (Lester, 1996).

2.4 Ett matematiskt problem/ett rikt problem

Ett problem kan vara ett rikt problem för en elev men en rutinuppgift för en annan elev beroende på deras kunskapsnivå (Skolverket, 2011b). Det finns flera kriterier som ett problem måste uppfylla för att vara ett rikt problem. Ett kriterium är att problemet ska uppmuntra till matematiska idéer (Taflin, 2007) och individen eller gruppen som möter problemet ska vilja eller behöva lösa problemet (Lester 1996). Eleven ska stimuleras att tänka lite extra och lära sig av problemet. Problemet ska även vara enkelt att förstå och eleven ska ha en möjlighet att kunna arbeta med problemet. Det är en nödvändighet för att alla elever i klassen ska ha en möjlighet att arbeta med problemet. Ett annat kriterium är att problemet ska vara en utmaning för eleven (Taflin, 2007) och det inte ska finnas någon direkt uppenbar lösning på problemet (Lester, 1996). Det ska krävas en ansträngning och tid för att lösa problemet (Lester, 1996; Taflin, 2007). Problemet ska även kunna lösas på flera olika sätt med flera olika strategier samt matematiska representationer. Ett annat kriterium är att problemet utifrån dess olika lösningar ska stimulera till olika matematiska diskussioner och resonemang. Problemet ska även möjliggöra skapandet av broar, det vill säga att problemet ska kunna visa på samband mellan olika matematiska idéer och områden. Ett matematiskt problem ska stimulera till att lärare och elever kan utveckla det och göra egna rika problem. Genom att göra egna problem kan eleverna visa för läraren och för sig själva hur de förstått matematiken och utmana sig själva (Taflin, 2007).

Även Wyndham, et al. (2000) framhåller att ett rikt problem inte bör vara ett så kallat rutinproblem och bör inte kunna lösas efter en mall eller schablonartat mönster. Det ska krävas att eleverna tänker lite extra för att kunna lösa problemet och lösningen brukar inte vara given utan eleverna får ofta pröva sig fram genom olika strategier tills de hittar en som fungerar (Skolverket, 2011b; Wyndham, et al. 2000; Taflin, 2007; 2003; Lester, 1996). Eleverna ska även visa en vilja att lösa problemet på grund av att problemet har en personlig relevans för eleven (Wyndham, 1993). Den personliga relevansen kan bestå av en situation som eleven befinner sig i ofta i sin vardag exempelvis genom fritidsintressen (Wyndham, et al. 2000). Om problemen är verklighetsbaserade kan det leda till ökad motivation för eleverna (Möllehed, 2001). Genom att använda verklighetsbaserade problem förbereds eleverna för att kunna lösa problem senare i kontexter utanför skolan på elevens fritid (English & Gainsburg, 2016). Ett rikt problem bör även innehålla en fråga eller uppmaning, antingen explicit formulerad eller implicit formulerad (Wyndham, et al. 2000; Wyndham, 1993).

Flertalet forskare menar att begreppet *ett rikt problem* inte är enhetligt definierat och har ofta olika innebörd i olika sammanhang (Taflin, 2007;2003; Wyndham, et al. 2000; Riesbeck, 2000; English & Gainsburg, 2016). Även i litteratur är inte ett rikt problem enhetligt definierat, framhåller Taflin (2007) och Wyndham (1993). En rutinuppgift är, olikt ett problem, en uppgift som inte elever har lätt för att lösa och som inte kräver mycket ansträngning att lösa (Taflin, 2003). Ett matematiskt problem är, till skillnad från rutinuppgifter, något som elever inte direkt kan hitta svaret på eller inte direkt kan se hur det ska lösas (Skolverket, 2011b; English & Gainsburg, 2016). Det är viktigt att alla lärare använder korrekt matematisk terminologi och har samma syn angående problemlösning för att undervisningen ska bli så likvärdig som möjligt (Mouwitz, 2007).

Ett matematiskt problem kan se olika ut. De kan vara kopplade till vardagen eller kontextlösa i form av en ekvation eller en algoritm. Det matematiska problemet kan ha kopplingar till olika områden inom matematiken, exempelvis aritmetik eller geometri (Skolverket, 2011b). Ett rikt problem kan ses som en helhet med en övergripande frågeställning, emellertid kan ett rikt problem även vara delat i mindre problem och dellösningar (Wyndham, et al. 2000). Svårigheten i ett matematiskt problem avgörs i relationen mellan problemet och eleven som ska lösa det (Skolverket, 2011b). Beroende på kunskapsnivån hos eleven kan ett matematiskt problem vara som en rutinuppgift om eleven har kommit långt i sin kunskapsutveckling och redan känner till lösningsstrategin (Skolverket, 2011b; Möllehed, 2001; Wyndham, 1993). Samtidigt kan det matematiska problemet vara svårt för en elev som inte har kommit lika långt i sin kunskapsutveckling och inte har någon tidigare erfarenhet av att lösa matematiska problem. Således måste den eleven pröva sig fram och undersöka olika lösningsstrategier för att finna en lösning på problemet (Skolverket, 2011b). Undervisningen bör även erbjuda många olika problem med olika svårighetsgrad för att möta elever med olika förutsättningar (Möllehed, 2001). Det är även viktigt att eleverna inte får lära sig att en viss strategi *alltid* ska tillämpas på ett visst problem, på grund av att det kan leda till att problemlösningen mekaniseras och bara blir ett görande snarare än ett tänkande. Inom problemlösningen ska man sträva efter att ha öppna problem som möjliggör många olika lösningar (Wyndham, et al. 2000). I undervisningen behöver eleverna därför ges tillfälle att lära sig tillämpa alternativa lösningar och diskutera sina lösningar med klasskamrater (Grevholm, 2012).

2.5 Lösningsstrategier

För att kunna lösa ett matematiskt problem behövs en eller flera lösningsstrategier och det krävs en balans mellan kreativt tänkande och kunskaper om matematikens begrepp, metoder, regler och uttrycksformer (Taflin, 2007). En strategi inom problemlösning är ett tillvägagångssätt som används för att lösa problemet och det är viktigt att den som löser problemet är medveten om varför en viss strategi används (Malouff & Shutte, 2008). Det finns många olika strategier för att lösa ett rikt problem, de kan exempelvis vara att välja en eller flera operationer att räkna med, söka mönster, göra en lista, dramatisera problemet, gissa eller pröva, använda laborativa material, rita bilder, arbeta baklänges, skriva upp en ekvation, göra ett diagram eller en tabell, lösa ett enklare problem med mera (Lester, 1996; Taflin, 2007; 2003). En annan lösningsstrategi är att formulera om problemet med sina egna ord. Det kan resultera i nya infallsvinklar eller att beskrivningen av problemet blir lättare att genomskåda (Wyndham, et al. 2000).

Strategin som tillämpas för ett visst problem måste passa det ämnade problemet, därav är det viktigt att den som löser problemet har ett metakognitivt perspektiv och medvetet väljer en passande lösningsstrategi. Den metakognitiva aspekten gör att lösaren av problemet kan använda en eller flera strategier effektivt och kan få en överblick över problemet (Malouff & Schutte, 2008). Även Taflin (2007) framhåller att den metakognitiva aspekten av problemlösnings-processen är viktig för att den kan underlätta lösandet av problemet om strategier väljs utifrån strategiska och logiska val. Lester (1996) framhåller att det ofta uppstår problem för elever vid valet av lösningsstrategi på grund av att de endast har lärt sig att använda olika räknesätt som strategi, vilket kanske inte passar för det aktuella problemet. Orsaken till att vissa elever har svårt med problemlösning är att de inte har fått explicit undervisning i olika lösningsstrategier eller att eleven endast har fått explicit undervisning om en strategi. Elever behöver undervisning i många olika lösningsstrategier och inte bara i den vanligaste strategin, nämligen att välja en eller flera operationer och göra beräkningar utifrån dem. Undervisningen om olika lösningsstrategier bör även innehålla strategier som rita en bild, skriva upp en ekvation, dramatisera, göra en lista, göra ett diagram eller en tabell, arbeta baklänges, gissa eller pröva, börja med att lösa ett enklare problem eller att använda laborativt material. Undervisningen bör vara indelad i två delar, en del där man introducerar lösningsstrategin och en del där man övar eller praktiserar lösningsstrategin. Läraren bör inte tala om för eleverna vilka lösningsstrategier de ska använda när de senare löser ett rikt problem utan eleverna bör uppmuntras att fundera själva eller välja någon av de lösningsstrategier som de har lärt sig i undervisningen. Om elever ska lära sig att lösa problem med hållbara och effektiva strategier krävs det att de får lösa så kallade processproblem. Ett processproblem är ett problem som inte endast kan lösas av beräkningar utan behöver exempelvis även illustrationer eller tabeller för att kunna lösas (Lester, 1996).

3. Syfte

Syftet med studien är att undersöka variationen av problemlösningsstrategier som elever använder samt undersöka hur eleverna resonerar när de löser ett matematiskt problem.

Utifrån syftet har följande frågeställningar formulerats:

- Vilka problemlösningsstrategier använder sig eleverna av?
- Hur beskriver eleverna att de löste problemet?
- Hur resonerar eleverna allmänt om problemlösning i förhållande till problemet?

4. Metod

Syftet med studien var att undersöka variationen av problemlösningsstrategier som elever använder samt hur eleverna resonerar kring sina lösningar och val av strategier. Studien avgränsades till elever som är sju till åtta år gamla. Nedan presenteras fenomenografisk ansats (4.1), datainsamlingsinstrument (4.2), urval (4.3), genomförande (4.4), dataanalys (4.5) samt etiska överväganden (4.6).

4.1 Fenomenografisk ansats

Studien har en kvalitativ, fenomenografisk teoretisk ansats. I en kvalitativ metod vill forskaren beskriva någonting och beskriva vilka egenskaper eller beskaffenhet någonting har. Kvalitativ metod bygger på en systematisk kunskap om hur någonting kan gestaltas och syftet är att söka de beskrivningar eller modeller som utförligt beskriver eller tolkar något (Larsson, 2011). Inom fenomenografin intresserar man sig för att beskriva hur olika individer uppfattar samma objekt, och hur variationen mellan uppfattningarna ser ut (Marton & Booth, 1997). Fenomenografi har sin utgångspunkt i kvalitativ metod och syftar till att empiriskt undersöka människors uppfattningar (Larsson, 2011). Inom fenomenografin antas det att det finns objekt i världen som människor uppfattar på olika sätt. Man intresserar sig inte för att beskriva en sanning om hur någonting är utan är en beskrivande ansats som intresserar sig för att förstå hur någonting kan uppfattas av människor (Kroksmark, 1987). Inom fenomenografin är människors uppfattningar är det centrala och relationen mellan människan och objektet (Larsson, 2011; Kroksmark, 1987). Fenomenografi är inte en metod utan snarare ett förhållningssätt för att identifiera, formulera och möta olika forskningsfrågor. Det är en specialinriktning som är riktad mot frågor som behandlar lärande och förståelse i undervisningssammanhang (Marton & Booth, 1997). Syftet med den här studien är att beskriva variation av det objekt som studeras och metoden som använts är inspirerad av fenomenografin. Objektet som studeras i den här studien är ett matematiskt problem (se bilaga 1) och det matematiska resonemang som problemet erbjuder. Problemet som används i studien erbjuder olika sätt att lösa problemet och i resultatet presenteras fyra möjliga lösningsstrategier, addition, addition och subtraktion, gissa och resonera samt söka mönster. Men det går även att lösa problemet genom fler sätt, exempelvis genom att arbeta baklänges, genom subtraktion eller genom att dramatisera problemet.

4.2 Datainsamlingsinstrument

Till datainsamlingen användes ett problem som handlade om att åka buss (se bilaga 1). Kontexten användes för att den är känd för elever både i Sverige och England och således kunde eleverna förhoppningsvis förstå och relatera till problemet. Problemet som används konstruerades av mig med avsikten att svårighetsgraden skulle vara på en nivå som utmanade majoriteten av eleverna.

För några elever var problemet emellertid för svårt och för en elev var problemet lätt. Men detta var väntat och svårighetsgraden sattes med avsikt att utmana så många elever som möjligt och för att kunna få ut en så stor variation som möjligt av olika lösningsstrategier. En semistrukturerad intervju genomfördes som utgick från förutbestämda frågor (se bilaga 2), även följdfrågor ställdes beroende på elevens svar. I enlighet med Bryman (2002) gjordes en semistrukturerad intervju som följde en intervjuguide men intervjuaren har även frihet att ändra ordningen frågorna ställs i eller ställa frågor som inte finns med i intervjuguiden om de anknyter till något intervjupersonen sagt. Intervjuer med eleven användes som datainsamlingsmetod och de spelades in på en mobiltelefon och sedan transkriberades de på dator.

4.3 Genomförande

Deltagarna fick lösa ett rikt problem under 20 minuter i klassrummet(se bilaga 1). Problemet löstes enskilt och eleverna fick inte prata med varandra. De fick problemet uppläst för sig av en lärare eller annan vuxen men fick annars ingen hjälp. Två elever i England fick sina problem översatta till sina modersmål genom Google Translate för att de ännu inte kunde engelska. Eleverna fick använda hjälpmedel som fanns i klassrummet om de ville, det kunde exempelvis vara miniräknare, tallinjer eller annat laborativt material. Därefter samlades samtliga svar in och genomgick en fenomenografisk analys. I analysen analyserades varje problemlösning för sig för att fastställa vilken lösningsstrategi som hade använts. Sedan delades lösningarna in i olika kategorier i enlighet med de olika lösningsstrategier som eleverna använde. Sedan valdes sex elever ut i klassen i England och sex elever i klassen i Sverige för en kvalitativ intervju (se bilaga 2). Urvalet baserades på att få en så stor variation som möjligt, kriterier för urval presenteras i urval (4.4). Intervjuerna genomfördes för att få en djupare förståelse för elevernas lösningsstrategier och få höra elevernas egna resonemang. I enlighet med Bryman (2002) började intervjuerna med att ställa några allmänna frågor om skolan för att eleverna skulle vänja sig vid intervjusituationen och inte känna sig nervösa och sedan fokuserade frågorna på individens egna uppfattningar och erfarenheter. Frågorna var enkelt formulerade för att de skulle vara förståeliga för sju- till åttaåringar. Endast öppna frågor har använts för att inte påverka elevernas svar i någon riktning. I enlighet med Bryman (2002) användes uppföljningsfrågor, som exempelvis ”kan du förklara mer?” eller ett uppmuntrande ”ja?”, användes för att uppmuntra eleverna att utveckla sina svar. Intervjuerna varade i ca tio minuter. Intervjuerna genomfördes tätt inpå problemlösnings-uppgiften för att eleverna inte skulle glömma sina lösningar. Tolv elever valdes ut för analys och intervju på grund av att det är en hanterbar mängd för studiens omfattning och ger ett uttömmande resultat av variation av lösningsstrategier. Samma procedur genomfördes i de två klasserna men på skolan i England översattes bilagorna till engelska. Intervjuerna spelades in och transkriberades för att få en detaljrik analys och för att fånga elevernas svar i deras egna formuleringar. Intervjuerna transkriberades och analyserades enligt analysmodellen som presenteras i dataanalysen (4.5). Det är inte bara viktigt vad eleverna säger utan även hur de säger det och därav användes inspelning för att få med båda delar (Bryman, 2002).

4.4 Urval

Empiri till studien samlades in på två olika skolor, en skola i Sverige och en skola i England. Studien omfattar 39 elever, 20 elever från en primary school i England och 19 elever från grundskolan i Sverige. Det slutgiltiga urvalet för intervjuer var 12 elever. Eleverna är i åldrarna sju till åtta år. Urvalet av deltagare är baserat på bekvämlighetsurval, vilket betyder att urvalet består av personer som är tillgängliga för forskaren för tillfället (Bryman, 2002). Urvalet av intervjuer är baserat på tre kriterier. Kriterierna var graden av matematisk kvalité av elevens lösningsstrategi. Det här kriteriet är baserat på hur intressant lösningen är rent matematiskt samt om lösningen var logisk och anpassad till problemet i fråga. Det andra kriteriet var hur säker eleven var att prata svenska eller engelska. Det fanns några nyanlända elever i båda klasserna som ännu inte behärskade språket och därav skapades kriteriet att de intervjuade eleverna skulle ha goda kunskaper i målspråket för att till fullo kunna förstå frågorna under intervjun. Det tredje kriteriet var elevernas lösningsstrategi. I urvalet för intervjuer skulle alla olika typer av lösningsstrategier ingå. Därav valdes eleverna ut i ett sådant urval att alla olika lösningsstrategier blev representerade. Urvalet har i enlighet med Bryman (2002) följt teoretisk samplingsmetod, det vill säga att intervjupersoner har valts ut tills variationen av lösningsstrategier var mättat i teoretisk bemärkelse. Inom tre kategorier valdes fler än en elev ut till intervju för att deras lösningar hade små skillnader vilket gjorde dem extra intressanta även om det var inom samma kategori. Till slut valdes 12 elever ut för intervju och vissa av eleverna som intervjuades hade lösningsstrategier inom samma kategori men hade variationer inom lösningarna. Därav valdes flera elever ut i vissa kategorier.

4.5 Dataanalys

Varje elevs lösning analyserades och lösningsstrategin nedtecknades. Alla elevers lösningar analyserades och delades in i kategorier i enlighet med elevernas olika lösningsstrategier. Kategorierna var lösningar genom addition, lösningar genom både addition och subtraktion, lösningar genom att gissa och resonera, lösningar genom att söka mönster och ej utläsbara lösningar. Sedan valdes olika antal elever ut i varje kategori för att bli intervjuade. Empirin analyserades sedan utifrån en kvalitativ och fenomenografisk analysmetod. Analysen fokuserar på att framställa variationen i uppfattningar (Larsson, 2011). Analysmodellen som användes består av sju steg.

1. Transkribering och läsning av allt material för att börja bearbeta materialet.
2. Kondensation, det vill säga att välja ut de viktigaste meningarna eller styckena ur materialet.
3. Jämförelse, jämföra olika textavsnitt och hitta likheter och skillnader.
4. Gruppering, organisera likheter och olikheter i grupper.
5. Artikulera kategorierna, dela upp materialet i kategorier och dela in likheter och skillnader i passande kategorier.
6. Namnge kategorierna för att kunna beskriva dem korrekt.
7. Kontrastiv fas, jämför passager, likheter och skillnader samt kategorier. Kategorier slås ihop och bildar större kategorier som förhoppningsvis är uttömmande. Dessa kategorier utgör sedan resultatet (Dahlgren & Johansson, 2015).

För att framställa variationen i materialet krävs läsning, tolkning och reflektion av empirin, vid flera tillfällen. Vid en första analys av materialet upptäcks ofta inte alla dimensioner utan materialet behöver läsas och reflekteras kring flera gånger för att till fullo förstå dess mening (Larsson, 2011). Materialet i den här studien har bearbetats flera gånger enligt analysmodellen presenterad av Dahlgren och Johansson (2015).

4.6 Etiska överväganden

I all forskning måste forskaren följa forskningsetiska principer för att inblandade personer inte ska uppleva några negativa konsekvenser av forskningen (Bryman, 2002). Principen kallas individsskyddskravet och innebär att forskaren har tagit hänsyn till att organisera studien på ett sådant sätt att deltagare inte utsätts för fysisk eller psykisk skada, förödmjukelse eller kränkning (Vetenskapsrådet, 1990). Vetenskapsrådet (1990) presenterar fyra huvudkrav som forskaren måste förhålla sig till i sin studie och de är informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. Informationskravet innebär att forskaren har skyldighet att informera alla deltagare om syftet med forskningen. Samtyckeskravet innebär att deltagare i en studie har rätt att själva bestämma över sitt deltagande. Konfidentialitetskravet handlar om att alla uppgifter från en studie skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifter förvaras oåtkomligt för obehöriga. Nyttjandekravet innebär att alla insamlade uppgifter endast får användas för forskning (a.a.).

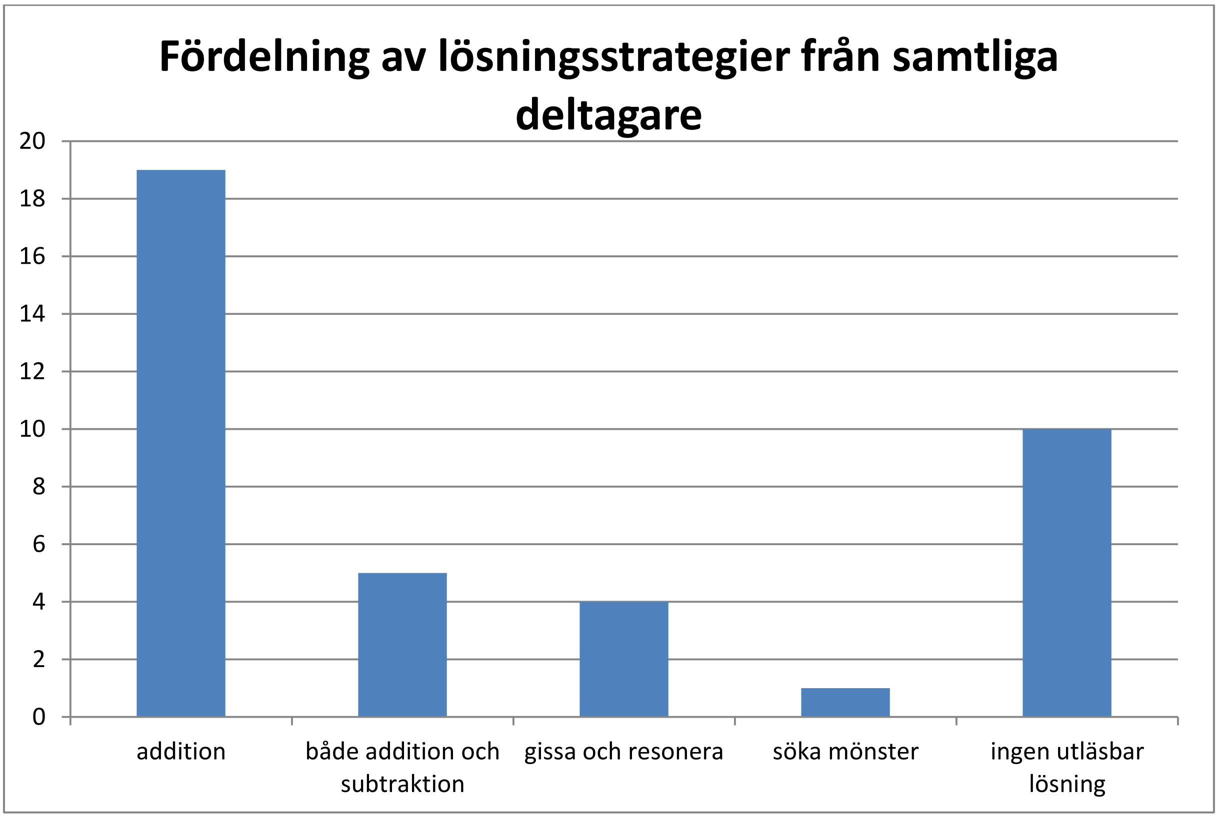
I den här studien har dessa forskningsetiska principer tillgodosetts genom hela undersökningen. Deltagare har fått ett brev hemskickat till sina vårdnadshavare där de har blivit informerade om syftet med studien. Vårdnadshavare och elever fick även skriva under om de ville delta eller inte i studien samt att de vid vilken tidpunkt som helst får lämna den utan anledning. Deltagarna informerades om att alla uppgifter i studien behandlades konfidentiellt och alla svar har anonymiserats i studien. I deltagarbrevet informerades även alla deltagarna om att alla uppgifter endast kommer att användas för den här studien och inte spridas vidare.

5. Resultat

I resultatet besvaras först den första frågeställningen om vilka problemlösningsstrategier använder sig eleverna av under 5.1. Sedan besvaras andra frågeställningen om hur eleverna beskriver sina lösningar under 5.2. Elevernas olika lösningar är indelade i följande kategorier: lösningar genom addition, lösningar genom både addition och subtraktion, lösningar genom att gissa och resonera, lösningar genom att söka mönster och ej utläsbara lösningar. Sedan besvaras frågeställningen om hur eleverna resonerar allmänt om problemlösning under 5.3. Sist i resultatet presenteras en resultatsammanfattning (5.4). Fokus i den här studien ligger på elevernas lösningsstrategier av det matematiska problemet (se bilaga 1). Alla elever som har producerat utläsbara lösningsstrategier har använts i studien även om de inte kom fram till rätt svar. 29 elever av 39 löste problemet och 13 av eleverna presenterade rätt svar på problemet. Rätt svar är att det var 2 personer på bussen innan Lisa gick på den.

5.1 Vilka lösningsstrategier använde eleverna?

Efter analysen kunde fyra olika kategorier av lösningsstrategier urskiljas samt en kategori av ej utläsbara lösningar. Fördelningen mellan kategorierna presenteras i diagrammet nedan. Totalt deltog 39 elever i studien och 19 av dem löste problemet genom addition, fyra elever genom att resonera, fem elever genom att använda både addition och subtraktion, en elev genom att söka efter mönster och tio elever hade ingen utläsbar lösningsstrategi.



Figur 1: Fördelningen av elevernas lösningsstrategier. n=39

5.2 Elevernas beskrivningar av sina lösningar

Nedan följer en redogörelse för elevernas beskrivningar av sina lösningsstrategier.

5.2.1 Lösningsstrategi med addition

19 elever av 39 löste problemet med hjälp av addition och detta är därmed den mest förekommande lösningsstrategin i den här studien. Eleverna löste problemet genom att addera 3+5+4=12 eller 1+3+5+4=13 och sedan räknade man uppåt och lade till två eller tre för att komma till 15, således kom majoriteten av deltagarna fram till svaret två eller tre. Det var några elever som använde en kulram för att lösa problemet. Den användes antingen direkt för att lösa problemet eller så löstes problemet i huvudet först och sedan kontrollräknade eleverna med hjälp av kulramen för att se om deras lösning verkligen stämde. En elev berättar hur han använde kulramen för att kontrollräkna:

> ”Jag tog den där, vad heter det, den där med kulorna och kollade ifall det var rätt […] Jag drog kulorna åt olika håll […] Jag hade 12 på den vänstra sidan och sån 3 på den högra. […] Jag tänkte sen att 12 och 3 är 15 så då tänkte jag att det blev 3.” (Elev 7)

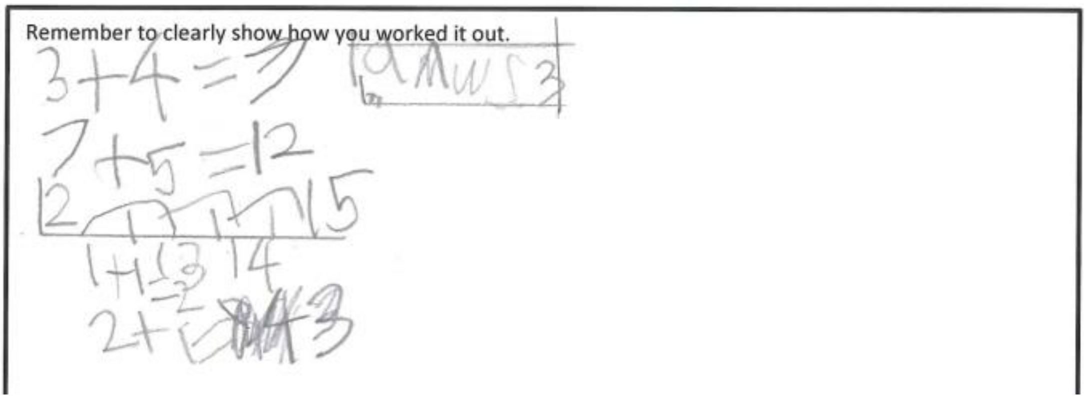
Figur 2: Lösningsstrategi genom addition av elev 7.

Att räkna uppåt från 12 eller 13 var den vanligaste lösningsmetoden. En elev berättade hur den kom fram till lösningen genom att räkna uppåt.

> ”Lisa plus 3 barn är 4. Plus 5 barn är 9. Plus 4 barn är 13. Och sedan så hoppade det ut 15 barn. Oj! De e det ju liksom 13, *14, 15* och då e det två där” (Elev 10)

Medan eleverna i Sverige räknade uppåt på fingrarna eller i huvudet räknade eleverna i England uppåt i huvudet eller med ”Fred Frog” som bygger på att eleverna hoppar på tallinjen och räknar antal hopp.

> ”Yeah, I added all the questions up. I added 3 and 4 which equaled 7. And then I added 5 to 7, that equaled 12. And then I used Fred Frog to jump from 12 to 15. And I added it all up and it equaled 3.” (Elev 11)



Figur 3: Lösningsstrategi genom addition av elev 11.

En annan elev berättar hur den löste problemet genom Fred Frog:

> ”So I did my Fred Frog and I put my number twelve at the beginning of the line and 15 at the end of the line. And I did how many jumps it took to get from 12 to 15. And then I figured it was 3 jumps.” (Elev 12)

En annan elev räknade ut svaret genom att den hade kunskaper om talkamrater. När eleven förklarade hur den hade adderat 3, 4, 5 och 1 till 13 sade eleven:

> ”Först så gick ju Lisa på, sen gick 3 på till, sen 5 till, sen 4 till och sen för då tänkte jag 13 och 2. Det är ju talkamrater till 15.” (Elev 9)

5.2.2 Lösningsstrategi med både addition och subtraktion

Fem elever löste problemet genom att använda både addition och subtraktion. En elev löste problemet genom att först addera 3+5+4=12. Sedan adderade eleven 12+3+5+4=24. Efter det subtraherar eleven 15 från 24 vilket är lika med 9. Men eleven verkar komma på att den är fel ute och stryker över den sista uträkningen. Sedan subtraherar eleven 9 från 24 vilket är lika med 15 och sen subtraherar eleven 5, 4 och 3 från 15 på följande vis 15-5-4-3=2 och får således fram svaret att det var 2 personer på bussen innan Lisa gick på den.

En annan elev löste problemet på i nästan samma sätt men den här eleven ritade även gubbar som representerade personerna på bussen. I de skrivna uträkningarna har eleven börjat med att addera 12+5+4+3=24. Sedan har eleven subtraherat 15 från 24 vilket är lika med 9. Efter det har eleven subtraherat enligt följande 24-9-5-4-3=2 och har således funnit att svaret är 2. Sedan har eleven även ritar gubbar som representerar personerna på bussen. Eleven har ritat 5 gubbar och adderat dem med 4 gubbar och sedan adderat dem med 3 gubbar och sedan har eleven fortsatt uträkningen enligt följande = 12+15=27-25=2. Eleven motiverar sina val genom följande respons:

> ”First I added and take away at the same time [eleven refererar till sin tidigare uträkning]. Then I tried drawing pictures to work it out. I added the children up and it gave me 12 and I added 15 to it and it gave me 27. And then I take away 25 and it gave me 2. I knew it was 2 so I took away 25.” (Elev 6)

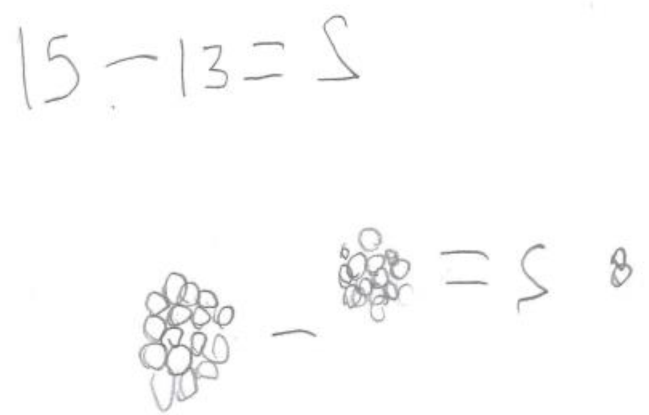
Eleven verkar tro att för att lösa problemet behöver eleven hitta ett sätt att få fram svaret två, även om det sättet inte stämmer överens med problemet. Eleven svarar senare på frågan om man hade kunnat lösa det här problemet på något annat sätt att man skulle kunna använda sig av andra siffror för att komma fram till 2.

> ”Yeah, if you have 5 times 4 is 20 and if you take away 18 would it give you 2?” (Elev 6)

Två andra elever har använt sig av både addition och subtraktion för att lösa problemet. Eleverna skrev 1+3+5+4=12-15=0 och får således fram svaret att det var 0 personer på bussen innan Lisa gick på den.

En annan elev löste problemet genom både addition och subtraktion. Eleven berättar att den har löst problemet genom att addera 3, 5 och 4, vilket är lika med 13. Sedan subtraherar eleven 13 från 15 och får således fram svaret att det var 2 personer på bussen innan Lisa gick på bussen.

> ”Man ska lägga ihop 3, 5 och 4 och det är lika med 13. Och sen var det 15 på bussen så då tog jag bort 13, sen var det bara 2 kvar.” (Elev 1)



Figur 4: Lösningsstrategi genom både addition och subtraktion av elev 1.

Eleven räknade ut svaret först i huvudet och sedan använde eleven en kulram för att kontrollera sitt svar. Eleven beskrev att den drog 15 kulor åt sidan på kulramen och tog sedan bort 13 kulor genom att dra dem till andra sidan av metallstaven.

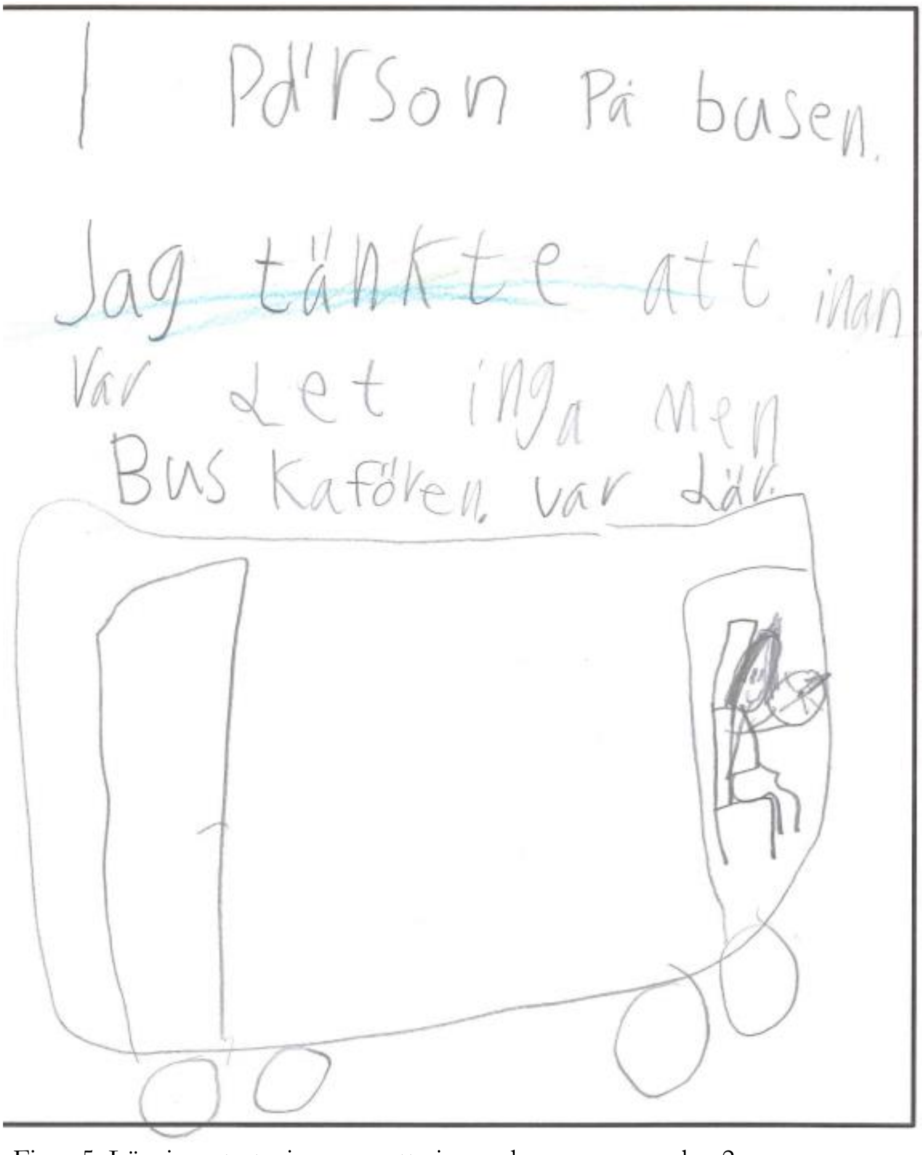
> ”Jag tog kulramen och så räknade jag till 15 och så tog jag bort 13. Och sen tänkte jag så här: att 15 minus 13 är nästan samma sak som 5 minus 3 och det är 2. Så jag tog bort 13 och sen blev det 2. Så det var 2 som kom in i bussen först.” (Elev 1)

Eleven visar här på en fördjupad taluppfattning genom att se att 15-13 blir lättare att räkna ut om man tar bort tiotalen på båda sidor, det vill säga (15-10)-(13-10)=5-3=2.

5.2.3 Lösningsstrategi att gissa och resonera

Fyra elever löste problemet genom att gissa och resonera sig fram till svaret. Lösningsstrategierna är inte byggda på matematiskt resonemang utan istället på gissningar och allmänt resonerande om uppgiften. Gissningarna byggde på vardagliga erfarenheter från elevernas liv. En elev resonerade som så att det bör vara en person på bussen innan Lisa gick på bussen och det är busschauffören.

> ”Jag tror att det var en person på bussen innan. Och det var busschauffören för bussen kan ju inte köra sig självt.” (Elev 2)



Figur 5: Lösningsstrategi genom att gissa och resonera av elev 2.

En annan elev gissade att det var 14 personer på bussen innan Lisa hoppade på bussen och förankrade sina teorier i vardagliga erfarenheter.

> ”Jag tror att det var typ 14 personer på bussen innan Lisa för att Lisas stopp kan ju inte ha varit det första stoppet. Det måste ju ha varit stopp innan det som folk hoppade på.” (Elev 3)

Andra gissningar byggde på fantasi. En elev uttryckte att det var 0 personer på bussen innan för att den gissade att Lisa var den första personen som hoppade på bussen.

> ”-Jag tror att Lisa var den första som steg på bussen.
>
> -Ok, hur räknade du ut det?
>
> - Ne, jag bara tror det.” (Elev 4)

5.2.4 Lösningsstrategi att söka mönster

En elev löste problemet genom att söka mönster. Eleven började med att rita en buss och skriva sifforna 3, 5 och 4 nedanför den. Eleven verkar tro att man måste rita en buss för eleven svarar på följande sätt på frågan om vad den gjorde först:

> ”-I drawed the bus.
>
> -Ok, why did you do that first?
>
> - Because that’s the drawing bit and then you don’t need to worry about it…the drawing bit.” (Elev 5)

Eleven går vidare genom att rita streck som representerar de olika personerna på bussen. Eleven drog ett streck för varje person som gick på bussen och sedan räknade den ihop summan av strecken, vilket blev 12. Sedan berättade eleven att den blev konfunderad för att det inte gick att subtrahera 15 från 12.

> ”So, 3, 5, and 4 which makes 12 got on the bus in three stops. And then 15 got off the bus but you can’t take away 15 from 12.” (Elev 5)

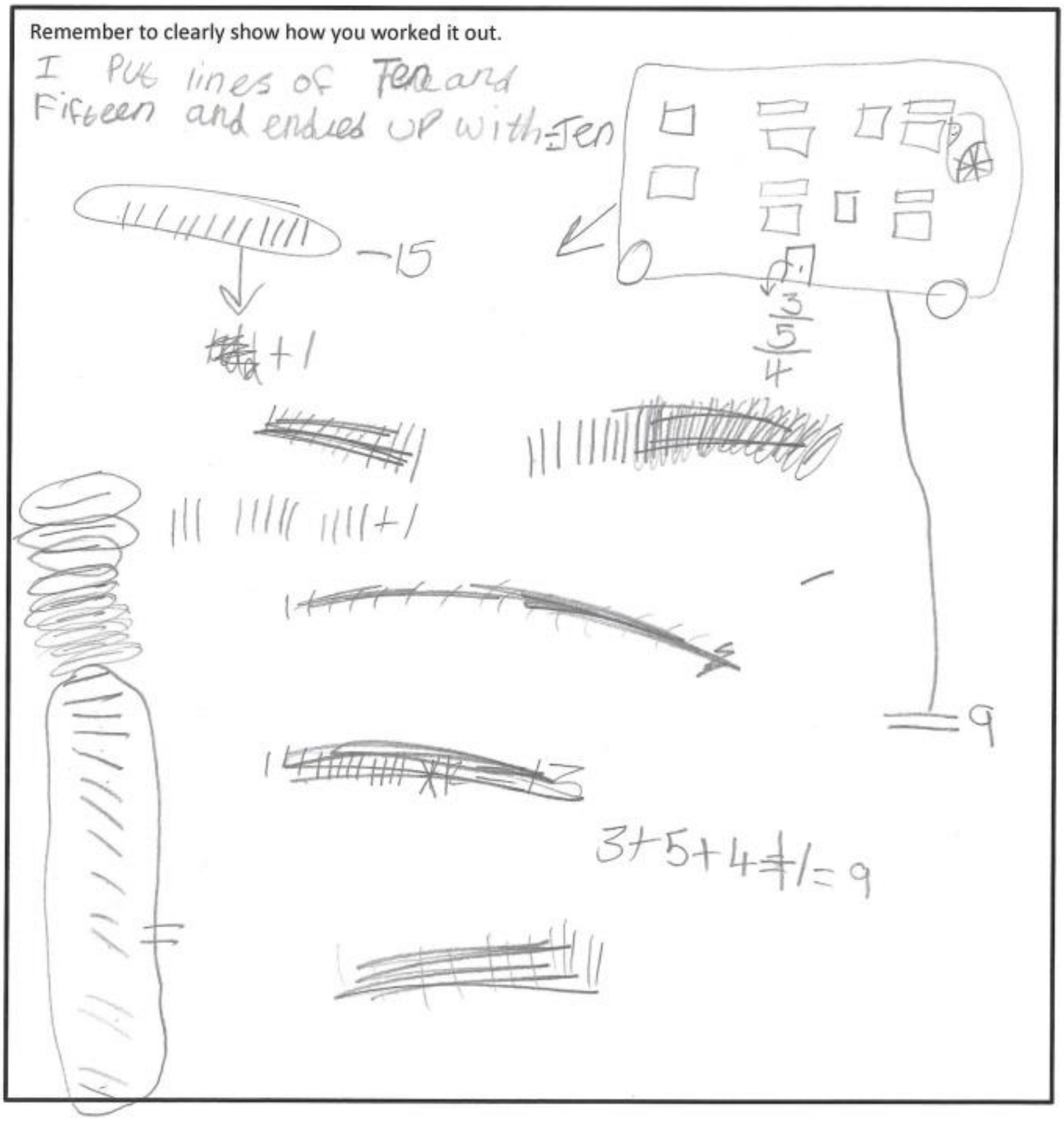
Efter det försökte eleven med en annan strategi för att finna lösningen. Eleven ritade 10 streck och 15 streck och strök sedan 15 streck och kom således fram till att svaret måste vara 10. Men eleven är fortfarande inte nöjd med sin lösning så den fortsätter att söka nya mönster. Eleven adderar 3, 4 och 5 på pappret på följande vis 3+5+4=12=10. Det är lite oklart hur eleven kommer fram till 10 och eleven verkar inte kunna förklara hur för intervjuaren. Eleven svarar:

> ”I did lines of 10 and 15 and I ended up with 10.” (Elev 5)

Eleven fortsätter att rita fler streck, först 3 streck, sedan 4 streck och sist 5 streck och räknar ut att summan är 12. Sedan lägger eleven till 1 streck som ska representera när Lisa gick på bussen. Eleven räknar sedan ihop alla streck och kommer fram till svaret att det måste ha varit 13. När intervjuaren frågar varför eleven använde sig av streck för att representera personerna svarar eleven att det är lättare att se och räkna om man gör streck.

> ”I did lines because it is easier to see. […] if you do lines it is easier to count and if they're apart like 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 then you know that there are 12 there. […] when you do the lines you know how much you've done. And if you count them, if it is a low number you can count low but if it's a high number you can count in fives, twos or tens.” (Elev 5)

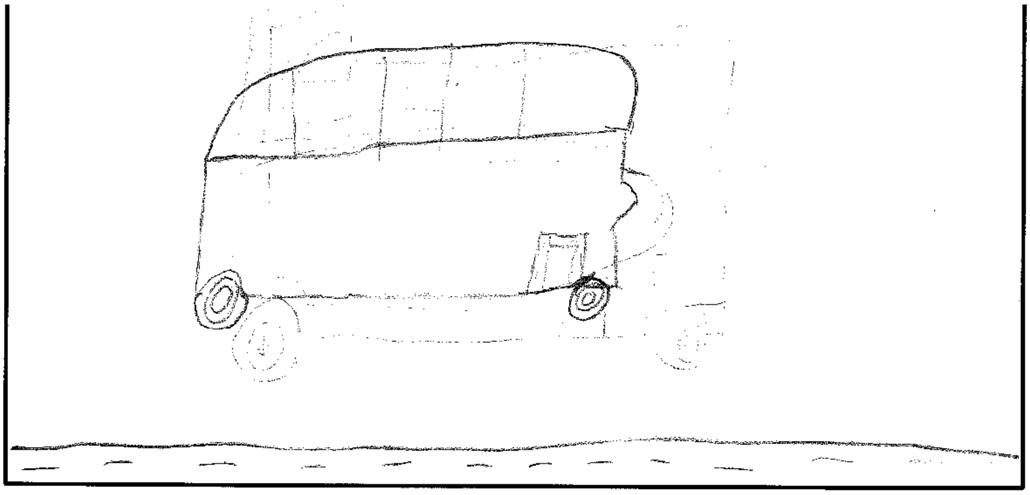
Här beskriver eleven två strategier för att göra uträkningen enklare att räkna, dels att illustrera uträkningen med streck och dels att räkna strecken i två-hopp, fem-hopp eller tio-hopp.



Figur 6: Lösningsstrategi genom att söka mönster av elev 5.

5.2.5 Ingen utläsbar lösningsstrategi

Tio elever hade ingen utläsbar lösningsstrategi. Vissa elever kunde inte lösa uppgiften eller löste uppgiften men presenterade inte någon tydlig lösning på hur de löste problemet. Dessa lösningar kunde till exempel bestå av ofullständiga uträkningar som exempelvis 3+4+5=__, 3+4+5=27 eller 35+4=39. Andra ofullständiga lösningar kunde även bestå av exempelvis en bild på en buss, en avskrift av texten till problemet eller ett skrivet ”I don’t understand”.



Figur 7: Ingen utläsbar lösning. Exempel på ett problem utan utläsbar lösning.

5.3 Elevers uppfattningar angående problemlösning

Fyra av de intervjuade eleverna tyckte att problemet var svårt, sju tyckte att det var mittemellan och en tyckte att det var lätt att lösa problemet. Många av eleverna uttrycker att för att kunna lösa problemet var de tvungna att anstränga sig.

> ”Alltså det var ju inte så att man bara tittade på det och så bara: Ah nu! Men det var ju inte så att det: Åh! Jag kommer inte på något! Utan det var nog mittemellan.” (Elev 10)

En annan elev svarar:

> ”I början var det svårt sen kom jag på det.” (Elev 9)

Eleverna utrycker även att de fick testa många olika lösningsstrategier innan de fann en som fungerade.

> “You could try lots of different methods that you’ve learned to try and help you work out a question…” (Elev 12)

En annan elev uttrycker även att när man ska lösa ett problem får man testa sig fram för att finna en effektiv lösningsstrategi.

> “Jag vet inte riktigt man fick ju bara testa lite.” (Elev 10)

En elev uttrycker att det är viktigt att försöka igen och igen även om det är svårt. Eleven uttrycker att den fick läsa frågan flera gånger om för att förstå dess innebörd.

> “It is kind of hard to understand what it means. But if you think about it and keep reading the actual question lots of times through then you get it. […] At the start I was quite

> confused, but then, I kept on reading then I knew what it meant and then I was able to solve it quite easily" (Elev 13)

En annan elev uttrycker också att det är viktigt att försöka om och om igen med olika lösningsstrategier om de inte lyckas vid första försöket. Eleven jämför problemet med andra sammanhang i vardagen och drar även paralleller till en provsituation.

> "I think you could use them [olika lösningsstrategier] for other problems because it would really help you and you wouldn't be stuck on one question. Like if it was the first question in a test you could just try different methods cause if you just sat there you would get 0 marks in your test. And all the other kids might have beaten you, like they might have got perfect scores like 10 or 20 and you might have gotten a score of 0." (Elev 12)

5.3.1 Elevers uppfattningar angående lösningsstrategier

Tio av de intervjuade eleverna trodde att deras lösningsstrategi var överförbar på något annat problem och två trodde inte att deras lösningsstrategi skulle fungera för att lösa ett annat problem. Eleverna anser att de skulle kunna använda samma lösningsstrategi för att lösa ett annat problem och ger även förslag på hur ett sådant problem skulle kunna se ut. En elev svarar på frågan om man skulle kunna använda dennes lösningsstrategi för att lösa ett annat problem enligt följande:

> ”Yes, I could use it in a take away problem or a number problem that is further away from each other." (Elev 11)

En annan elev svarar:

> "Jag tror man skulle kunna göra likadant fast med andra siffror och lägga ihop." (Elev 10)

Eleverna visar förståelse för att en lösningsstrategi går att använda på flera olika problem även att problemet inte ser lika ut. Det var två elever som inte trodde att deras lösningsstrategi skulle kunna användas för att lösa ett annat problem. En elev trodde inte att det gick att använda lösningsstrategin som den använt för att lösa ett annat problem och kunde inte förklara varför. Eleven svarade:

> ”Not sure, but probably not. […] it probably wouldn't get me the answer on a different question." (Elev 13)

Eleven anser att den lösningsstrategi som den har använt endast fungerar för att lösa just det här problemet.

Tio elever trodde att det även går att lösa problemet på ett annat sätt. En elev tror att det finns några fler lösningsstrategier som går att använda för att lösa det här problemet, men att det inte är så många.

”Jag tror nog att det finns lite andra sätt man kan lösa det på. Men inte så många tror inte jag.” (Elev 7)

En annan elev tror också att det går att lösa problemet med en annan lösningsstrategi men eleven har svårt för att föreställa sig hur en sådan lösningsstrategi skulle se ut.

”-Ja det är säkert vissa som gör det på andra sätt.

-Ok, hur då tror du?

- Det vet jag väl inte, de gör väl på sitt sätt.” (Elev 10)

Majoriteten av eleverna som tror att det går att lösa problemet med en annan lösningsstrategi ger olika förslag på hur de skulle kunna göra. En elev föreslår att man skulle kunna lösa problemet genom subtraktion istället för addition som eleven först använde. En annan elev föreslår att man skulle kunna räkna baklänges. Två elever trodde inte att det gick att lösa problemet på något annat sätt än den lösningsstrategin som de använt.

”Jag tror inte det finns något annat sätt.. jag kommer inte på.” (Elev 1)

”Um.. probably not.” (Elev 13)

Eleverna baserar sina antaganden på att de själva inte kan komma på en annan lösningsstrategi än den som de redan använt för att lösa problemet.

5.4 Resultatsammanfattning

Totalt kunde fyra olika kategorier av lösningsstrategier urskiljas efter analysen av empirin. Totalt deltog 39 elever i studien och 19 av dem löste problemet genom addition, fyra elever genom att resonera, fem elever genom att använda både addition och subtraktion, en elev genom att söka efter mönster och tio elever hade ingen utläsbar lösningsstrategi. Den vanligaste lösningsstrategin var genom addition. Eleverna adderade 3, 4 och 5 till 12 eller 3, 4 5, och 1 till 13 och sedan räknade de uppåt på fingrarna eller i huvudet två eller tre steg upp till 15 och fick således fram svaret två eller tre. Den näst vanligaste kategorin var lösning genom både addition och subtraktion. Inom den lösningskategorin så gjorde eleverna på lite olika sätt men den mest följdriktiga lösningen var att en elev adderade 3, 4 och 5 till 13 och sedan subtraherade eleven 13 från 15 och kom således fram till svaret 2. Under kategorin söka efter mönster använde sig en elev av streck och bilder för att komma fram till en lösning. Den sista kategorin bestod av att gissa och resonera. Dessa lösningar bestod av olika lösningar kopplade vardagliga händelser, exempelvis resonerade en elev att det måste vara en person på bussen innan och det var busschauffören. Sist i resultatet presenterades elevernas generella tankar kring problemlösning och sina lösningsstrategier. De flesta eleverna trodde att deras lösningsstrategier var överförbara på andra problem och majoriteten av eleverna uttryckte även att de trodde att det här problemet skulle kunna lösas på flera olika sätt.

6. Diskussion

I diskussionen presenteras först metoddiskussionen (6.1) där kritik gentemot metoden bearbetas. Sedan presenteras resultatdiskussionen (6.2) där resultatet diskuteras i förhållande till den forskning som presenterades i bakgrunden.

6.1 Metoddiskussion

Syftet med studien var att undersöka variationen av problemlösningsstrategier som elever använder. Vidare undersöks hur eleverna resonerar när de löser ett problem. Fenomenografi är en ansats som bygger på undersökning av variationen inom ett fenomen samt hur människor upplever variationen inom ett fenomen (Marton & Booth, 1997). I studien har detta beaktats i alla moment. Under insamlingen av empirin har endast öppna frågor ställts för att inte påverka den intervjuades tankar i någon riktning för att möjliggöra en så stor variation som möjligt. Intervjuerna har följt den fenomenografiska metod som presenterats i metodavsnittet och intervjuerna har varit semistrukturerade. Under intervjuerna har även uppföljningsfrågor använts, det innebär att intervjuaren ställer frågor som har som syfte att få ett uttömmande svar. Exempel på sådana frågor som använts är ”Hur menar du då?”, ”kan du förklara mer?” eller icke-verbala uppföljningsfrågor användes, som exempelvis nickande eller ett uppmuntrande ”mmm?” för att få den intervjuade att utveckla sin respons (Dahlgren & Johansson, 2015). Under lösandet av problemet informerades eleverna om att de fick använda vad de ville i klassrummet för att lösa problemet. Det här gjordes för att möjliggöra en så stor variation av lösningar som möjligt. Även studiens analysmetod inspirerades av fenomenografisk teori genom Dahlgrens & Johanssons (2015) fenomenografiska analysmetod för att utfallet skulle få en så stor variation som möjligt.

En intervjusituation kan eventuellt uppfattas som konstlad av den intervjuade om den intervjuade inte är van vid intervjuer och det kan leda till obehag, vilket i sin tur kan leda till att den intervjuade inte svarar ärligt på frågor eller att den intervjuade svarar det den tror att intervjuaren vill höra. Innan intervjuerna uppmanades eleverna att svara ärligt och att jag var intresserad av hur de löst problemet och att det var av mindre vikt om svaret var rätt eller inte. Det här gjordes för att motverka osäkerhet hos eleverna och för att eleverna skulle känna sig trygga att svara ärligt och utförligt på frågorna.

De skolor som datainsamlingen gjordes på är bekanta för mig sedan innan och det är ett medvetet och strategiskt val. I och med att eleverna som deltar är kända sedan innan är de trygga med intervjuaren och kan svara ärligt och kan med självförtroende delta i studien, vilket leder till högre tillförlitlighet i studien.

Alla intervjuer transkriberades för att inte missa något som eleverna sade, vilket lätt är fallet vid endast anteckning av deras svar. Videoupptagning hade eventuellt vidare stärkt resultatet i och med att elevers kroppsspråk och gester också visas. Men bedömningen gjordes att videoupptagning skulle kunna påverka elevernas agerande och beteende på ett för undersökningen negativt sätt i form av en störningsaspekt under intervjun. Det skulle kunna hämma deras ärlighet och självsäkerhet i intervjusituationen vilket i förlängningen skulle kunna hämma undersökningens tillförlitlighet.

Tolv elever valdes ut för intervju på grund av att det antalet bestod av minst en lösning ur varje kategori och mättade variationen av lösningsstrategier. Eleverna som inte valdes ut för intervju baserades på att deras lösning redan var representerad bland de elever som valdes ut för intervju eller att deras lösning var icke utläsbar. Men även om eleven inte kunde skriva ner en lösning på papper så fanns möjligheten att eleven kunde lösa problemet muntligt. För att komma åt de andra elevernas lösningsstrategier kunde alla elever intervjuats. Emellertid valdes endast 12 elever ut för intervju för att det antalet mättade variationen och således gjordes bedömningen att inga fler intervjuer behövdes.

Två elever fick sina problem översatta till sitt modersmål genom Google Translate på grund av att de ännu inte behärskade engelska. Det här kan vara problematiskt för att det inte gick att kontrollera att problemen översattes korrekt och hade samma innebörd i och med att språken var obekanta. Det här kan ha påverkat elevernas möjlighet att lösa problemet. Emellertid valdes inte dessa elever ut för intervju och har således inte påverkat resultatet nämnvärt. Istället för att översätta i Google Translate hade en annan möjlig lösning varit att översätta problemet med hjälp av en person som kan elevernas modersmål.

Studien innehåller en källa som kan anses som ålderdomlig på grund av källans utgivningsår. Källan är Polyas *How to solve it – a new aspect of mathematical method* och är från 1957. Men det som kan anses som en svaghet för studien är egentligen en styrka för studien. Den här källan är en klassiker inom forskning i problemlösning och många forskare baserar sina studier på Polyas teorier. Lesters *Problemlösningens natur* från 1996 är endast sju sidor lång och det kan också anses vara en nackdel för studien. Men även den här källan är en klassiker inom forskningen i problemlösning och många av de andra källorna i den här studien hänvisar till Lesters teorier om problemlösning.

6.2 Resultatdiskussion

I avsnittet diskuteras resultatet i förhållande till tidigare presenterad forskning. Först behandlas problemlösningsstrategier (6.2.1), sedan elevernas lösningsstrategier (6.2.2) och sist behandlas elevers resonemang om problemlösning (6.2.3).

6.2.1 Problemlösningsstrategier

Problemlösning handlar om att hitta olika tillvägagångssätt och alternativa lösningar (Skolverket, 2011b). I den här studien urskiljdes fyra olika kategorier med flera olika tillvägagångssätt inom varje kategori. Ett problem ska kunna lösas genom flera olika lösningsstrategier och matematiska representationer, framhåller Taflin (2007). Problemet som användes i studien möjliggjorde flera olika lösningsstrategier samt olika representationsformer. Exempelvis användes både siffror, konkret material och bilder för att representera problemet. De olika lösningsstrategierna återges i resultatet. Vilket tyder på att problemet som användes i studien var ett rikt problem.

Polya (1957), Lester (1996), Taflin (2007) och Wyndham, et al. (2000) framhåller att problemlösning är en process som består av flera intellektuella steg som presenteras i bakgrunden. Eleverna i studien har dock inte följt alla steg eller genomfört dem i den ordning som presenteras av forskningen. Eleverna har i varierande grad följt den här processen. Vissa elever följer några steg men inte alla, vissa elever har följt alla steg men i en annan ordning och vissa elever har inte följt några av stegen. Exempelvis har några elever gjort steget kontrollera sina lösningar men de flesta elever har inte gjort det steget. Anledningen till att eleverna inte har följt den process som presenteras av forskningen är antagligen för att det är en idealisk och teoretisk framställning av problemlösningsprocessen och eleverna har ännu inte förståelse för den. Det tyder på att eleverna inte vet hur de ska angripa ett problem för att försöka lösa det på ett effektivt sätt. Vilket resulterar i följande didaktiska implikation: elever behöver explicit undervisning i problemlösningsprocessens steg för att förstå hur de ska gå tillväga.

6.2.2 Elevers lösningar

Problemlösning innebär att man använder det man redan kan för att lära sig nya saker (Wyndham, et al. 2000). Det har flera elever gjort i studien. Flera av eleverna från England beskrev att de använde Fred Frog för att lösa problemet. De berättade att de har arbetat med det tidigare i skolan. Fred Frog är en groda som hoppar längs tallinjen och syftet med grodan är att eleverna ska förstå hur man använder och räknar med hjälp av tallinjen. Flera av de engelska eleverna använde Fred Frog för att hoppa på tallinjen från 13 till 15. En av de svenska eleverna använde talkamrater för att lösa problemet. Eleven berättade att de hade arbetat med talkamrater tidigare i skolan och att hon använde en av talkamraterna till 15, i det här fallet 13 och 2, för att lösa problemet. Den här iakttagelsen stärker forskningens antagande om att barn använder det de redan kan för att lösa problem.

Det är inte känt om eller hur mycket de deltagande eleverna har blivit undervisade i problemlösning innan. Det var tio av 39 elever som inte löste problemet, det är mer än en fjärdedel av eleverna vilket är en ganska stor andel. Problemlösningsförmågan utvecklas under lång tid eftersom att den kräver relativt djupa matematiska kunskaper, framhåller Lester (1996). I och med elevernas unga ålder och relativt få års skolgång är inte detta resultat överraskande på grund av att det tar lång tid att till fullo bemästra problemlösning. Slutsatsen kan ändock dras att eleverna behöver explicit undervisning i problemlösning och olika lösningsstrategier för att förstå dem. En större andel av de engelska eleverna kunde inte lösa problemet. Sju av 20 av de engelska eleverna och tre av 19 av de svenska eleverna klarade inte problemet. I England börjar eleverna skolan ett år tidigare än eleverna i Sverige. Emellertid var det en större andel av de engelska eleverna som inte klarade problemet trots att de har gått fler år i skolan än de svenska eleverna. Det kan bero på att problemet är formulerat av mig som svensk lärare som är influerad av ett svenskt perspektiv att arbeta med problemlösning.

Lester (1996) framhåller att det ofta uppstår problem när eleverna ska välja lösningsstrategi för att de endast har lärt sig att använda olika räknesätt som strategi, vilket kanske inte passar för just det problemet. Vissa av de elever som inte kunde lösa problemet verkade använda sig av enbart ett räknesätt för att lösa problemet. Flera av de elever som inte löste problemet använde enbart ett räknesätt, exempelvis en elevs lösning var 3+4+5=27. Men även vissa elever som löste problemet verkade fastna i tänket att använda enbart ett räknesätt för att lösa problemet, exempelvis var det en elev som adderade 3, 4 och 5 vilket är lika med 12 och sedan adderade eleven 15 och 12 vilket är lika med 27. Sedan subtraherade eleven 25 från 27 och fick fram svaret 2. Intervjuaren frågar varför eleven gjorde så och då svarade eleven att den visste att svaret skulle vara 2 så därför visste eleven att den var tvungen att subtrahera 25 från 27 för att komma fram till 2. Slutsatsen kan dras att eleven inte har förstått att den matematiska uträkningen måste stämma överens med den faktiska information som ges i problemet. Vilket återigen indikerar att eleverna behöver explicit undervisning i hur man går tillväga i problemlösning.

Problemlösning är en koppling mellan matematiken och verkligheten, framhåller Taflin (2007). I studien visades det tydligt att vissa elever kopplade problemet till sina erfarenheter ur vardagen. Exempelvis var det en elev som motiverade sin lösning med att det var en person på bussen innan och det var busschauffören för att ”någon måste ju köra bussen, den kan ju inte köra sig självt!” (elev 2). En annan elev kopplade även problemet till sin vardag och hur bussars rutter fungerar. Eleven resonerade att Lisas stopp kan inte ha varit bussens första stopp så därför måste det vara några personer på bussen innan. Lösningsstrategin som tillämpas måste vara anpassad för det ämnade problemet framhåller Malouff och Schutte (2008). Enbart ett gissande och resonerande som inte grundar sig i den faktiska matematiken i problemet antyder att eleverna inte har förstått att problemet ska lösas genom matematiskt tänkande och inte genom allmänt resonerande. Det kan vara så att eleverna inte ser problemet som ett matematiskt problem utan som ett läsförståelseproblem. I studien saknar vissa elever det metakognitiva perspektivet som behövs för att kunna välja en passande lösningsstrategi. Vilket stämmer överens med Malouff och Schuttes resonemang i bakgrunden som handlar om att vissa elever saknar det metakognitiva tänket som behövs i problemlösning (2008). Det här tyder på att eleverna inte har förståelse för premisserna inom problemlösning och de behöver få förståelse för hur problemlösning fungerar. Den här förståelsen kan komma genom explicit undervisning i hur problemlösning fungerar.

6.2.3 Elevers resonemang om problemlösning och lösningsstrategier

Ett rikt problem ska vara en utmaning för eleven (Taflin, 2007). Elever får ofta pröva sig fram genom olika strategier för att hitta en som fungerar, framhåller Wyndham, et al. (2000). Det var flera elever som uttryckte att de fick pröva några olika sätt innan de kom fram till en lösning. I studien uttryckte många elever att problemet var svårt och att de inte hittade en lösning direkt som fungerade. Många elever var även frustrerade under de första minuterna när de skulle lösa problemet. Många elevers första respons till problemlösningsuppgiften var att räcka upp handen och fråga om hjälp och de sade att de inte förstod vad de skulle göra. Om eleverna ville fick de problemet uppläst av en vuxen men utöver det ingen extra hjälp för att inte påverka resultatet. Emellertid började eleverna efter hand att förstå problemet och pröva olika lösningsstrategier för att se om de kunde lösa problemet. I och med att problemet var en utmaning för nästan alla elever betraktas det som ett rikt problem. Det var endast en elev som uttryckte att problemet var lätt och eleven löste det med en gång. Ett problem kan vara ett rikt problem eller en rutinuppgift beroende på elevens kunskapsnivå framhåller Möllehed (2001), Wyndham (1993) och Skolverket (2011b). För majoriteten av eleverna var problemet ett rikt problem men för en elev var det ett rutinproblem. Vilket resulterar i följande didaktiska implikation, läraren behöver anpassa problemen till elevernas individuella kunskapsnivå för att alla elever ska få en utmaning.

Eleverna fick en fråga om de trodde att deras lösning var överförbar på ett annat problem och om det gick att lösa det nuvarande problemet med en annan lösningsstrategi än dem eleven valt. Majoriteten av eleverna trodde att deras lösning var överförbar på ett annat problem och att det gick att lösa det nuvarande problemet med flera olika lösningsstrategier, emellertid var det några elever som inte trodde det. Lester (1996) framhåller att ett matematiskt problem ska kunna lösas genom olika lösningsstrategier som exempelvis rita bilder, arbeta baklänges, skriva upp en ekvation et cetera, och att dessa lösningsstrategier ofta kan användas för att lösa andra matematiska problem. Resultatet visar att det var några elever som ännu inte förstått hur problemlösning fungerar och återigen kan slutsatsen dras att eleverna behöver mer undervisning i problemlösning för att förstå den.

7. Avslutande ord

Orsaken till att vissa elever har svårt med problemlösning är att de inte har fått explicit undervisning i det, framhåller Lester (1996). Den mest betydande slutsaten i den här studien är att eleverna behöver explicit undervisning i problemlösning för att de till fullo ska förstå den och lära sig olika lösningsstrategier. Enligt min erfarenhet kan problemlösning i skolan betraktas som ett extra moment som fungerar som utfyllnad i matematikundervisningen. Problemlösning kan därmed bli lite åsidosatt till förmån för annan matematik som anses viktigare. Men problemlösning är en central del av läroplanen och behöver undervisningstid därefter. I den här studien visade resultatet att många av eleverna hade otillräckliga kunskaper om problemlösning och behöver explicit undervisning i problemlösning och olika lösningsstrategier för att lära sig utvecklingsbara strategier och hur man bör ta sig an ett problem för att till fullo kunna behärska problemlösning.

8. Referenser

Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.

Dahlgren, L.O. & Johansson, K. (2015). Fenomenografi, I A. Fejes & R. Thornberg (Red.). (2015). *Handbok i kvalitativ analys (s. 162-175)*. Stockholm: Liber AB

English, L, D. & Gainsburg, J. (2016). Problem Solving in a 21st-Century Mathematics Curriculum. I English, L, D., & Krishner, D. (Red.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (s. 313- 335). New York: Routledge.

Grevholm, B. (2012). (Red.). *Lära och undervisa matematik från förskoleklass till åk 6*. Stockholm: Nordstedts.

Kroksmark, T. (1987). *Fenomenografisk didaktik*. (Akademisk Avhandling, Göteborgs Universitet, Insitutionen för Pedagogik).

Larsson, S. (2011). *Kvalitativ analys – exemplet fenomenografi*. Linköping.

Lester, F.K. (1996). Problemlösningens natur. I R. Ahlström, B. Bergius, G. Emanuelsson, L Emanuelsson, M. Holmquist, E. Rystedt & K. Wallby, *Matematik ett kommunikationsämne* (s. 85-91). Göteborg: Göteborgs universitet. Nämnaren Tema.

Malouff, J. & Schutte, N. (2008). *Providing Comprehensive Education in Problem Solving in Primary and Secondary Schools*. University of New England, Australia. http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500868.pdf

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. New York: Routledge.

Mouwitz, L. (2007). Vad är problemlösning? *Nämnaren* (1): 61. Hämtad från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/6161_07_1.pdf

Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik – en studie av påverkansfaktorer i årskursena 4-9*. (Avhandling, Lärarhögskolan i Malmö. Institutionen för pedagogik).

Polya, G. (1957). *How to solve it – a new aspect of mathematical method*. New York: Priceton University press.

Riesbeck, E. (2000). *Interaktion och problemlösning - att kommunicera om och med matematik*. (Licentiatavhandling, Linköpings universitet, Institutionen för pedagogik och psykologi).

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.

Språkrådet. (2008). Svenska skrivregler. Stockholm: Liber.

Taflin, E. (2003). *Problemlösning och analys av rika matematiska problem*. (Licentiatavhandling, Umeå Universitet, Matematiska Institutionen).

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* (Doktorsavhandling, Umeå Universitet, Department of Mathematics and Mathematical Statistics).

Vetenskapsrådet. (1990). *Forskningsetiska principer – inom humanistiskt-samhällsvetenskaplig forskning.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wyndham, J. (1993). *Problem-solving revisited – on school mathematics as a situated practice*. (Akademisk avhandling, Linköping University, Department of Communication Studies).

Wyndham, J., Riesbeck, E. & Schoultz, J. (2000). *Problemlösning som metafor och praktik*. Linköpings universitet.

9.1 Bilaga 1

På bussen

Lisa går på bussen för att åka till skolan. Vid nästa hållplats hoppar 3 barn på bussen. Vid nästa hållplats hoppar 5 barn på bussen. Vid nästa hållplats hoppar 4 barn på bussen. Sedan kommer bussen till skolan och 15 barn hoppar av bussen. Sedan var bussen tom. Hur många barn var det på bussen *innan* Lisa gick på bussen?

Visa hur du tänker.

9.2 Bilaga 2

Intervjufrågor

Har ni arbetat med problemlösning innan i matematik?

Hur var det?

Hur var det att lösa det här problemet? Lätt/medel/svårt?

Använde du något konkret material när du löste problemet?

Kan du förklara för mig hur du löste problemet?

Hur visste du hur du skulle lösa problemet?

Vad gjorde du först? Varför?

Vad gjorde du sedan? Varför?

Vad gjorde du sist? Varför?

Skulle den här metoden som du har valt fungera för att lösa ett annat problem?

Går det att lösa det här problemet på ett annat sätt? Hur?