JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Undervisning om tals del-helhets-relationer

En variationsteoretisk studie
i förskoleklass

KURS: *Examensarbete II, F-3, 15 hp*

FÖRFATTARE: *Beatrice Fenelius*

EXAMINATOR: *Jesper Boesen*

TERMIN: *VT16*

JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Examensarbete II, F-3, 15 hp
Grundlärarprogrammet med inriktning mot arbete i förskoleklass och grundskolans årskurs 1-3
VT16

SAMMANFATTNING

Beatrice Fenelius

Undervisning om tals del-helhetsrelationer
En variationsteoretisk studie i förskoleklass

Teaching part-whole relationships of numbers
A variation theoretical study in preschool class

Antal sidor: 35

Följande examensarbete är en interventionsstudie med utgångspunkt i aritmetik-undervisning och tals del-helhetsrelationer. Vissa forskare menar att del-helhetsrelationer är en grund för vidare aritmetikkunskaper, medan andra forskare menar att det är viktigare att elever utvecklar räkneförmågor. Syftet med denna studie är att undersöka hur undervisning om tals del-helhetsrelationer i addition och subtraktion kan utformas ur ett variationsteoretiskt perspektiv. Lärandeobjektet för undervisningssekvensen är att identifiera ett okänt tal i en del-helhetsrelation inom talområdet 0-10.
Undersökningen gjordes med 13 elever i förskoleklass genom ett förtest, en undervisningssekvens om tre lektioner samt ett eftertest. Undervisningssekvensen och testerna videoinspelades för att utgöra underlag för analys. Lektionerna gjordes för att visa olika variationsmönster som kontrast, separation, generalisering och fusion för att eleverna skulle kunna urskilja kritiska aspekter. Exempelvis användes ”part-whole bars” och kommutativitet i undervisningen för att synliggöra de kritiska aspekterna. De kritiska aspekterna som kom fram i resultatet var att *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten*, *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*, *kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen* och att *kunna ta hjälp av kunskaper om tidigare del-helhetsrelationer för att hitta okända tal i nya del-helhetsrelationer*.

The following thesis is an intervention study based on arithmetic teaching and part-whole relationships of numbers. Some researchers argue that part-whole relationships are a basis for further arithmetic skills, while other researchers believe that it is more important that students develop counting abilities. The purpose of this study is to investigate how teaching of part-whole relationships in addition and subtraction can be designed from a variation theory perspective. The object of learning for the teaching sequence is to identify an unknown number of a part-whole relationship, in the number range 0-10.
The study was conducted with 13 students in preschool class through a pre-test, a teaching sequence of three lessons and a post-test. The teaching sequence and the tests were videotaped to provide a basis for analysis. The lessons were designed to show different patterns of variation such as contrast, separation, generalization and fusion so that the students would be able to discern critical aspects. For example, "Part-whole bars" and commutativity were used in the lessons, in order to highlight the critical aspects. The critical aspects that emerged in the result were to *discern that the two parts fit in and together is as much as the whole, be able to use two numbers in a relation between the whole and the parts to find the third number, be able to use the whole and one part to find the second part* and to *be able to use knowledge about previous part-whole relationships to find the unknown number in new part-whole relationships.*

Sökord: variationsteori, learning study, interventionsstudie, del-helhetsrelationer, förskoleklass

Keywords: Variation theory, learning study, action research, part-whole relationships, preschool class

Innehåll

Inledning

Elevers förståelse av positionssystemet, tiotalsövergångar och sambandet mellan addition och subtraktion är i hög grad beroende av deras förståelse för tals del-helhetsrelationer, vilket innebär relationerna inom och mellan tal (Bryant, Christie & Rendu, 1999; Canobi, Reeve & Pattison, 1998; Neuman, 1987, 2013; Zhou & Peverly, 2005). Ovanstående forskning sammanställdes i en litteraturstudie gjord av Fenelius och Rydberg (2015). Resultatet av litteraturstudien är att tidig undervisning om tals del-helhetsrelationer har stor inverkan på elevers fortsatta matematiklärande. Det finns dock forskare (exempelvis Carpenter, Fennema & Franke, 1996; Fuson, 1990) som menar att elever inte behöver en grundläggande förståelse för del-helhetsrelationer för att exempelvis kunna förstå tiotalsövergångar. De menar att förmågan att räkna är viktigare och att eleverna kan utveckla förståelse för tal under tiden de räknar. Detta synsätt beskrivs inte vidare i undersökningen, då syftet utgår från Neumans (1987) antaganden om del-helhetsrelationer.

I enlighet med forskningen som menar att del-helhetsrelationer är betydelsefullt bör del-helhetsrelationer vara fokus i matematikundervisningen i de tidiga årskurserna i grundskolan, även redan i förskolan och förskoleklassen (Cheng, 2012; Resnick, 1989). Vissa forskare menar att den tidiga undervisningen ska fokusera på konkret material, istället för siffror och andra symboler (Easly, 1983; Marton & Booth, 1997; Myers, 1925; Zhou & Peverly, 2005). I läroplanen för matematik i grundskolan är kunskaper om tals inbördes relationer och hur talen kan delas upp en punkt i det centrala innehållet för matematikundervisningen i årskurs 1-3 och även ett kunskapskrav för vad eleverna ska ha uppnått efter årskurs 3 (Skolverket, 2011).

Hur kan undervisning utformas för att synliggöra talens del-helhetsrelationer för elever? I följande examensarbete undersöks hur undervisning om tals del-helhetsrelationer i additiva strukturer kan planeras, synliggöras och erfaras hos 13 elever i en förskoleklass, utan att introducera siffersymboler. Undervisningen fokuserar på lärandeobjektet att identifiera ett okänt tal i en del-helhetsrelation inom talområdet 0-10. Med utgångspunkt i variationsteorin genomförs en interventionsstudie med förtest, lektioner och eftertest. Undersökningen är riktad till lärare i lägre åldrar som i sin undervisning vill möjliggöra för elever att se tals del-helhetsrelationer.

I det inledande kapitlet beskrivs undersökningens bakgrund, i form av tidigare forskning, undersökningens teoretiska utgångspunkt samt en beskrivning av interventionsstudier. Därefter följer undersökningens syfte och frågeställningar och vidare presenteras metoden, utifrån urval, datainsamling och analys. Sedan presenteras studiens resultat utifrån de genomföra lektionerna och till sist kommer diskussionen där metoden och resultatet diskuteras. Metod, resultat och analys är nära sammankopplade i följande undersökning. Därför presenteras vissa delar på flera ställen i arbetet för att förtydliga undersökningsprocessen. I arbetet skrivs tal med siffror eller bokstäver beroende på storlek utom när det gäller tal som rör matematik som då skrivs med siffror (Språkrådet, 2008).

Bakgrund

I följande kapitel beskrivs undersökningens utgångspunkt utifrån tidigare forskning. Vidare beskrivs även undersökningens teoretiska förankring, variationsteorin, och vad en interventionsstudie innebär.

Vad är tals del-helhetsrelationer?

På samma sätt som avkodning är avgörande för läsförståelse menar Neuman (1987) att tals del-helhetsrelationer är avgörande för aritmetikförståelse. Neuman beskriver talens relationer genom de tio basbegreppen (se figur 1) vilka består av 25 olika kombinationer av tal inom talområdet 1-10.

Två	**Tre**	**Fyra**	**Fem**	**Sex**	**Sju**	**Åtta**	**Nio**	**Tio**
1|1|**2**	2|1|**3**	3|1|**4**	4|1|**5**	5|1|**6**	6|1|**7**	7|1|**8**	8|1|**9**	9|1|**10**
		2|2|**4**	3|2|**5**	4|2|**6**	5|2|**7**	6|2|**8**	7|2|**9**	8|2|**10**
				3|3|**6**	4|3|**7**	5|3|**8**	6|3|**9**	7|3|**10**
						4|4|**8**	5|4|**9**	6|4|**10**
								5|5|**10**

Figur 1: Dagmar Neumans 25 kombinationer. Hämtad från "Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen", av D. Neuman, 2013, Nordic Studies in Mathematics Education, vol. 18, nr. 2, s. 16. Copyright 2013 av Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).

Bastalen bygger på additiva strukturer (Neuman, 1987, 2013). Talen upp till 10 har olika kombinationer, som bygger på tals del-helhetsrelationer mellan en helhet och två delar. Exempelvis har talet 7 tre olika kombinationer enligt Neuman (1987), $6|1|\mathbf{7}$, $5|2|\mathbf{7}$ och $4|3|\mathbf{7}$. Om kombinationen med noll, $0|7|\mathbf{7}$, räknas som den gör i förevarande arbete har talet 7 fyra olika kombinationer. Neuman (1987) beskriver att när elever har utvecklat en förståelse för de 25 kombinationerna kan de se helheten och delarna simultant och kan då hitta en okänd komponent i en kombination genom att använda sig av de två andra talen i kombinationen. Det innebär att kunna se kombinationernas kommutativa egenskaper och att kunna använda sig av sambandet mellan addition och subtraktion (Neuman, 2013). Ett exempel på det är att elever kan lösa tolv olika uppgifter som visas i tabell 1 genom att använda förståelsen för kombinationen $5|2|\mathbf{7}$ (Neuman, 1987, 2013).

Tabell 1: De tolv olika uppgifterna till kombinationen $5|2|\mathbf{7}$

$5+2=\_$	$7-2=\_$	$\_+2=7$	$\_-2=5$	$5+\_=7$	$7-\_=5$
$2+5=\_$	$7-5=\_$	$\_+5=7$	$\_-5=2$	$2+\_=7$	$7-\_=2$

Att kunna se en uppgift som ett del-helhetsproblem snarare än ett aritmetiskt problem, det vill säga en operation som ska utföras, gör att uppgiften kan lösas mer effektivt (Marton, Runesson och Tsui, 2004). Utan förståelse för del-helhetsrelationer kan elever använda sig av dubbelräkning i addition och subtraktion. När en elev dubbelräknar behöver eleven använda fingrarna, exempelvis när hen dubbelräknar uppåt i en addition. Eleven håller upp ett finger för varje siffra hen räknar uppåt och räknar sedan hur många fingrar som hålls upp. Det är en tidsödande process där mycket kan gå fel. Att fastna i dubbelräkning innebär att det aritmetiska tänkandet inte utvecklas och viktiga strategier som överslagsräkning och huvudräkning begränsas. Eleverna upptäcker inte heller sambandet mellan addition och subtraktion (Neuman, 2013).

Neuman (1987) lyfter fram vikten av förståelse för del-helhetsrelationer i sin avhandling. Hon intervjuade 105 barn innan de börjat skolan för att ta reda på hur barnen formade förståelse för de tio basbegreppen innan de fått undervisning om dem. Av de intervjuade barnen genomgick 39 av dem ett undervisningsexperiment med fokus att bygga förståelse för de tio basbegreppen. De andra 66 barnen utgjorde en kontrollgrupp. Två år senare gjordes en kontrollintervju för att se hur barnen utvecklat sin förståelse i de båda grupperna. Resultatet av studien visade att alla barn i experimentgruppen som inte hade för-kunskaper om basbegreppen i de första intervjuerna hade utvecklat en god förståelse om basbegreppen som de kunde använda vid problemlösning. I kontrollgruppen var det nio barn (av elva) som inte hade utvecklat förståelse för basbegreppen.

Tidig undervisning om tals del-helhetsrelationer

Hur tal kan delas upp och sättas samman igen är en grund för del-helhetsförståelsen (Canobi et al., 1998; Resnick, 1989). Forskning visar att undervisning om tals del-helhetsrelationer kan börja redan i lägre åldrar (Cheng, 2012). Redan i förskolan upptäcker barn hur kvantiteter kan delas upp och sättas samman. Genom leken där barnen laborerar med kvantiteter utvecklas en tidig förståelse för tals del-helhetsrelationer (Resnick, 1989). Undervisningen för de yngre eleverna bör fokusera på konkreta upplevelser av talen, där abstraktion i form av siffror och andra symboler succesivt introduceras senare (Easly, 1983; Marton & Booth, 1997; Myers, 1925; Zhou & Peverly, 2005). I Kina och Japan är tals del-helhetsrelationer en viktig del av undervisningen redan från tidiga åldrar (Easly, 1983; Zhou och Peverly, 2005). I Kina fokuserar den tidiga undervisningen på förståelse av begrepp). Addition och subtraktion introduceras genom konkreta exempel (i addition: två skålar med guldfiskar hälls i en skål) och med hjälp av bilder (i subtraktion: 3 fåglar i ett träd, 2 till flyger iväg). Genom det arbetssättet kan eleverna förstå det abstrakta i addition och subtraktion (Zhou och Peverly, 2005.

Effekter av förståelse för tals del-helhetsrelationer

Talens del-helhetsrelationer spelar en viktig roll för elever när de ska övergå från konkret till abstrakt tänkande (Treacy & Willis, 2003). När eleverna förstår att tal kan delas upp i delar utvecklas deras förståelse för kardinalitet, det vill säga mängdförståelse (Fischer, 1990). Andra situationer där del-helhetsförståelse visar sig vara av stor vikt är när elever löser additions och subtraktionsuppgifter (Easly, 1983; Fischer, 1990). I Fischers (1990) undersökning visades att undervisningen om del-helhetsrelationer hjälpte elever lösa kontextuppgifter med addition och subtraktion även om räknesätten inte hade fokuserats i undervisningen. Sambandet mellan addition och subtraktion kan förklaras och förstås genom förståelse för tals helhet och delar (Bryant et al., 1999; Neuman, 2013; Resnick, 1989; Zhou & Peverly, 2005). Talen i en del-helhetsrelation, exempelvis $2|4|\mathbf{6}$ kan användas i både addition, $2+4=6$, $4+2=6$, och subtraktion, $6-4=2$, $6-2=4$ (Zhou & Peverly, 2005). Elever visar på en god förståelse för tals del-helhetsrelationer när de kan använda förståelsen för talens helhet och delar i additionsuppgifter för att lösa uppgifter med samma helhet och delar i subtraktion. Det visar sig när elever ser att en helhet är summan av två delar (addition) och att om en del tas bort från helheten resulterar det i att den andra delen är kvar (subtraktion) (Canobi, 2005). När elever ska räkna med tiotalsövergångar är kunskapen om del-helhetsrelationerna en viktig faktor (Fischer, 1990; Zhou & Peverly, 2005), exempelvis när de använder sig av del-helhetsrelationerna i talområdet 0-10 för att förstå tal som är större än tio (Fischer, 1990). Zhou och Peverly (2005) beskriver att förmågan att dela upp talet 10 är viktig när eleverna får uppgifter med svar över 10. Strategin att addera upp till 10 bygger på de olika del-helhetsrelationerna i talet 10. Genom att använda strategin att addera upp till 10 kan eleverna lösa uppgiften $8+5=$ genom att dela 5 i 2 och 3 för att sedan addera 8 och 2 för att få 10 som sedan kombineras med 3 vilket resulterar i $8+5=8+2+3=10+3=13$.

Variationsteorin

I följande arbete används variationsteorin som utgångspunkt och analysverktyg. Nedan presenteras viktiga delar i variationsteorin som är av vikt för förståelsen av arbetet. Först presenteras en kort redogörelse för vad variationsteori är, sedan följer en beskrivning av viktiga begrepp som lärandeobjekt, kritiska aspekter och variationsmönster.

Variationsteorin har sitt ursprung i fenomenografin som studerar de olika sätt människor erfar världen (Runesson, 1999). Variationsteorins utgångspunkt bygger på föreställningen att lärande av något specifikt sker när något som skiljer sig från mängden kan uppfattas. För att exempelvis kunna förstå vad begreppet färg innebär måste olika färger uppfattas. Genom variation kan särskilda aspekter bli synliga och det är urskiljandet av de aspekterna som leder till lärande (Marton et al., 2004). Variationsteorin kan användas för att förklara varför några undervisningsmetoder fungerar, medan andra inte gör det, utifrån begrepp som lärandeobjekt, kritiska aspekter och variationsmönster (Lo, 2012).

Lärandeobjekt

Enligt variationsteorin benämns den avgränsade förmågan eller kunskapen som eleverna förväntas lära sig under en eller flera lektioner som lärandeobjekt (Marton & Pang, 2006). Lärandeobjektet är inte ett mål för undervisningen utan en utgångspunkt för vad elever ska lära sig. Lärandeobjektet består av två delar, det direkta och det indirekta lärandeobjektet. Det direkta lärandeobjektet är innehållet och det indirekta lärandeobjektet är vad eleverna ska kunna göra med innehållet. På likande sätt har lärandeobjekt en specifik och en generell aspekt. Den förstnämnda är den kortsiktiga delen av lärandeobjektet, det vill säga den kunskap som eleverna ska lära sig. Den sistnämnda är den mer långsiktiga delen av lärandeobjektet som syftar till färdigheter och förmågor som kan utvecklas med hjälp av den lärda kunskapen (Lo, 2012). Ett lärandeobjekt kan förändras utifrån lektionerna och vilken förståelse eleverna visar. Det kan vara så att lärandeobjektet behöver preciseras mer eller vinklas åt något annat håll. Det första lärandeobjektet som skapas, det *intentionella*, är vad läraren planerar att eleverna ska lära sig. Under lektionen synliggör läraren olika aspekter av lärandeobjektet som eleverna ska urskilja och ta till sig, vilket blir det *iscensatta* lärandeobjektet. Vilka aspekter eleverna kan urskilja är avgörande för vad de lär sig och det blir det *erfarna* lärandeobjektet (Marton et al., 2004, Wernberg, 2009).

Kritiska aspekter

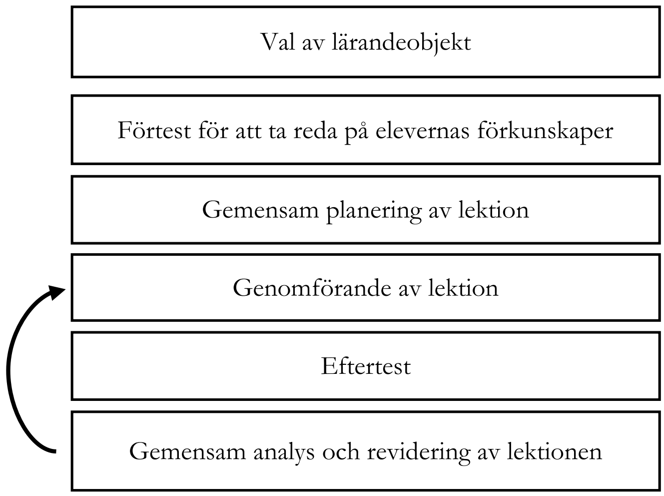
Inom variationsteorin har varje lärandeobjekt vissa aspekter som måste urskiljas för att eleverna ska kunna urskilja och förstå lärandeobjektet. Aspekterna är så kallade kritiska aspekter, de aspekter läraren måste synliggöra för att eleverna ska utveckla förståelse för lärandeobjektet. Relationen mellan lärandeobjektet och de kritiska aspekterna är ett del-helhetsförhållande där alla kritiska aspekter behövs för att förstå lärandeobjektet (Lo, 2012). Det är viktigt att visa olika exempel samtidigt för att det ska bli möjligt att kunna urskilja de kritiska aspekterna i exemplen. Aspekterna kan synliggöras när de går att jämföra med något annat för att hitta likheter och skillnader. Läraren måste skapa möjligheter för eleverna att urskilja likheterna och skillnaderna (Runesson, 1999).

Variationsmönster

För att urskilja de kritiska aspekterna krävs det en form av variation. Det är vad som varierar och vad som är invariant som avgör vad som kan urskiljas och därför även vilket lärande som möjliggörs. Variationen kan ske genom fyra olika variationsmönster. *Kontrast* innebär att det som ska urskiljas jämförs med något det inte är. Exempelvis kan talet 7:s delar urskiljas om två korrekta delar, 3 och 4, jämförs med två felaktiga delar, 3 och 5. I *generalisering* förtydligas det som ska urskiljas genom att visa flera exempel på samma fenomen. Delarna 3 och 4 kan generaliseras genom att visa dem med olika representationsformer, exempelvis genom konkret material, siffror och tärningsprickar. *Separation* innebär att separera en aspekt från andra aspekter genom att låta den variera i jämförelse med invarianta aspekter. Om för många aspekter varieras samtidigt går de inte att urskilja. Delarna kan separeras genom att visa på flera olika delar som tillsammans är 7, exempelvis 3 och 4, 5 och 2, 6 och 1 samt 7 och 0. Delarna varierar men helheten är konstant. *Fusion* är ett avslutande variationsmönster där flera kritiska aspekter visas och måste urskiljas samtidigt. För att exempelvis kunna lösa del-helhetsuppgifter måste flera aspekter kunna urskiljas samtidigt (Marton et al., 2004).

Interventionsstudie

Följande undersökning kan beskrivas som en interventionsstudie vilket är en undersökningsmetod som kan användas inom många olika forskningsområden. Syftet med en interventionsstudie är att förstå, förbättra eller förändra en viss praktik utifrån särskilda interventioner. På samma sätt som en interventionsstudie inte är styrd av forskningsområden är den inte heller styrd i hur den utförs. Den kan utföras av en ensam forskare eller av ett större forskarlag. En typ av interventionsstudie, teaching methods, innebär att använda och undersöka speciella tillvägagångssätt i undervisningen (Cohen, Manion & Morrison, 2000). Nedanstående undersökning har tagit inspiration från tre olika former av teaching methods som presenteras nedan, vilka är design experiment, lesson study och learning study. Det förstnämnda, design experiment, är en metod där en forskare vill undersöka och förbättra lärandepraktiker genom att påverka och ändra olika aspekter i lärandemiljön (Brown, 1992). Syftet med metoden har både en praktisk och en teoretisk del. Den praktiska delen innebär att utforma undervisning och den teoretiska delen innebär att utveckla teorier om lärande genom att studera undervisningen och dess delar. Processen i ett design experiment bygger på hypoteser som sedan testas och utvärderas. Det är en cyklisk process som upprepas för att komma fram till en teori som är tillämpningsbar i andra praktiker än undersökningspraktiken. Det finns olika typer av design experiment där forskare enskilt eller tillsammans med lärare utför undersökningarna (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). En annan metod är lesson study som är vanligt förekommande i Japan. En lesson study syftar till att utveckla lärares idéer och erfarenheter kring undervisning tillsammans med andra lärare. Processen i en lesson study börjar med att lärare tillsammans planerar en lektion utifrån tidigare lesson studies och/eller elevernas förkunskaper. Därefter genomförs lektionen av en av lärarna under tiden de andra lärarna observerar. Efter lektionen diskuterar lärarna, ibland tillsammans med en forskare, kring olika förbättringsförslag (Doig & Groves, 2011). En learning study är en blandning mellan ett design experiment och en lesson study. Lärare samarbetar för att skapa möjligheter för lärande av ett specifikt lärandeobjekt. Det kan vara allt från två lärare till ett mindre arbetslag som samarbetar med eller utan en forskare (Marton & Pang, 2006). En learning study använder variationsteorin som en teoretisk ram i såväl uppbyggnaden av lektionen som analysverktyg. Variationsteorin används för att bestämma lärandeobjektet och de kritiska aspekterna men även för att ta reda på elevernas förkunskaper och för att mäta om lärandeobjektet har blivit uppnått (Kullberg et al., 2016).



Figur 2: Processen i en learning study

En learning study följer en cyklisk process av planering, genomförande, analys och omarbetning (Kullberg et al., 2016). Processen i en learning study synliggörs i figur 2 utifrån Kullberg (2010). Processen inleds med att lärandeobjektet bestäms. Därefter genomförs ett förtest för att få reda på elevernas förkunskaper om lärandeobjektet. Utifrån resultatet på förstestet planeras en lektion som observeras. Därefter görs ett eftertest för att ta reda på hur eleverna har erfarit lärandeobjektet. Lektionen analyseras och revideras för att göras om i en ny elevgrupp.

Syfte och frågeställningar

Syftet med interventionsstudien är att undersöka hur undervisning om tals del-helhetsrelationer i additiva strukturer kan utformas utan siffersymboler ur ett variationsteoretiskt perspektiv. Lärandeobjektet för undervisningen är att identifiera ett okänt tal i en del-helhetsrelation inom talområdet 0-10. Studien avgränsas till elever i förskoleklass.

Frågeställningar

- Vilka är de kritiska aspekterna eleverna behöver urskilja för att förstå lärandeobjektet?
- Hur kan specifik undervisning om lärandeobjektet utformas utan siffersymboler för att synliggöra de kritiska aspekterna?

Metod och material

Nedan presenteras valet av undersökningens metod och lärandeobjekt. Därefter följer en redogörelse för urvalet samt undersökningens delar utifrån planering, genomförande och analys. Slutligen presenteras en redogörelse för undersökningens tillförlitlighet och forskningsetiska aspekter.

Val av metod

Undersökningen är en interventionsstudie som tog inspiration av design experiment, lesson study och learning study samt av Ekdahl, Venkat och Runessons (2016) undersökningsmetod. Till skillnad från inspirationskällorna gjordes undersökningen av en enda person som utgjorde både lärare och forskare. Det är vanligast att design experiment, lesson study och learning study görs av lärarlag, forskare eller genom ett samarbete mellan lärare och forskare (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003; Doig & Groves, 2011; Marton & Pang, 2006). Inledningsvis har undersökningen många likheter med learning study (Kullberg, 2010). Först valdes ett brett lärandeobjekt, tals del-helhetsrelationer. Utifrån lärandeobjektet letades tänkbara kritiska aspekter fram i forskningslitteratur för att skapa ett förtest. Resultatet av förtestet analyserades för att bekräfta eller avfärda kritiska aspekter. Utifrån de aspekter som ansågs mest kritiska planerades en första lektion. Lektionen filmades i likhet med lesson study och learning study. Eleverna fick fylla i ett arbetsblad och både inspelningen och arbetsbladet blev underlag för analys av lektionen. Utifrån analysen av den första lektionen planerades en andra lektion som en fördjupning av den första lektionen, vilket skiljer sig från en learning study struktur där samma lektion revideras. Istället liknar undersökningen Ekdahls et al. (2016) undersökningsmetod, där en undervisningssekvens planerades och användes. Lektionsstrukturen i följande undersökning har även likheter med en lesson study som kan bygga vidare på tidigare lektioner (Doig & Groves, 2011) eller ett design experiment som inte är lika styrd i utförandet (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). Insamling av analysunderlag för den andra lektionen gjordes på samma sätt som i den första lektionen. Analysen av den andra lektionen ledde till planering och genomförande av en tredje lektion med tillhörande arbetsblad. Efter alla tre lektionerna i sekvensen fick eleverna göra ett eftertest som liknade förtestet.

Val av lärandeobjekt

Forskning menar att förståelse för tals del-helhetsrelationer är viktigt för abstrakt tänkande, sambandet mellan addition och subtraktion och räkning med tiotalsövergångar (exempelvis Bryant, Christie & Rendu, 1999; Canobi, Reeve & Pattison, 1998; Neuman, 1989, 2013; Zhou & Peverly, 2005). Därför blev det indirekta lärandeobjektet för undersökningen tals del-helhetsrelationer. Det direkta lärandeobjektet kunde bestämmas utifrån resultatet av förtestet, det vill säga de uppgifter som eleverna upplevde som svåra att lösa. Det direkta lärandeobjektet blev därför att identifiera ett okänt tal i en del-helhetsrelation inom talområdet 0-10.

Urval

Undersökningens urval bestod av 17 elever i sex- och sjuårsåldern. Eleverna gick i samma förskoleklass i en skola på landsbygden i Västra Götaland. Urvalet är ett så kallat bekvämlighetsurval (Bryman, 2011), vilket innebär att urvalsgruppen är lättillgänglig och bekant för undersökaren. Bekvämlighetsurvalet var att föredra då det var viktigt att eleverna gick i samma klass och att de var trygga med undersökaren för att eleverna skulle våga uttrycka sig under intervjuerna och lektionerna. Alla elever i klassen fick förfrågan om att delta i undersökningen och fyra elever valde att inte vara med, vilket resulterade i 13 deltagande elever.

Datainsamling

Underlaget till datainsamlingen bestod av ett förtest, tre lektioner med tillhörande arbetsblad och ett eftertest. Varje del i datainsamlingen analyserades för sig för att skapa förutsättningar för nästa steg i insamlingsprocessen, i likhet med learning study (Kullberg et al., 2016)

Förtest

Inledningsvis i undersökningsarbetet skapades ett förtest med en bred variation av uppgifter för att pröva elevernas förförståelse av tals del-helhetsrelationer (se bilaga 1). Uppgifterna byggde på viktiga aspekter som hittades i forskningslitteratur från den tidigare litteraturstudien av Fenelius och Rydberg (2015). Majoriteten av aspekterna prövade förståelse för del-helhetsrelationer: ett tal kan innehålla andra tal (Piaget, 1965), ett tal kan delas (Cheng, 2012), när ett tal delas upp och sätts samman igen är talet fortfarande detsamma (Piaget, 1965), att dela upp innebär inte att dela lika (Neuman, 1987) och helheten är större än delarna (Piaget, 1965) samt att se relationen mellan helhet och delar samtidigt som relationen mellan delarna (Neuman, 1987; Piaget, 1965). Förtestet prövande även några aspekter gällande taluppfattning som hör ihop med del-helhetsrelationer: ett tal står för ett antal (McIntosh, 2008), subitizing vilket innebär att kunna se ett antal utan att räkna (Neuman, 2013) och antalskonservation vilket innebär ett antal är detsamma oavsett hur det placeras eller flyttas om (Piaget, 1965). Förtestets första del bestod av fem uppgifter med konkret material (knappar), varav två uppgifter där eleverna uppmanades att bestämma och ta bort antal. En uppgift prövade elevernas antalskonservation och en uppgift utmanade elevernas förmåga att hitta en okänd del med hjälp av helheten och den andra delen. Vidare fick eleverna dela upp talet 7 på så många sätt som möjligt. Den andra delen av förtestet bestod av kontextuppgifter där eleverna fick ett sammanhang för de uppgifter de skulle lösa. Ett exempel från förtestet var ”Du har 7 äpplen i en korg och lägger 3 av äpplena på bordet. Hur många har du då kvar i korgen?”.

Alla deltagare genomgick en individuell intervju som varade i genomsnitt 11,5 minuter. Intervjuerna genomfördes i avskilda rum på skolan. Intervjuerna utgick från uppgifterna i förtestet, vilket liknar en strukturerad intervju (Bryman, 2011). Intervjuerna spelades in med hjälp av en videokamera. Wernberg (2009) påpekar att en fördel med att filma är att elevernas gester och rörelser fångas upp, något som annars skulle behövt antecknas. Eleverna i intervjun använde ibland fingrarna när de räknade, något som kunde dokumenteras med filmkameran. I likhet med Wernbergs (2009) avhandling transkriberades inte intervjuerna, eftersom syftet med testet var att se elevernas lösningsmetoder och detaljrikedomen i elevernas svar inte var nödvändig för analysen. Förtestet analyserades genom att elevernas lösningar och svar sammanställdes kortfattat i en tabell (se bilaga 6) för att tydliggöra vilka uppgifter som var svårast för eleverna. En uppgift som var svår för eleverna räknades bort då det var uppgiftens språkliga formulering som bedömdes vara problematisk. De uppgifter som eleverna upplevde som svåra analyserades närmare för att finna möjliga kritiska aspekter eleverna behöver för att förstå del-helhetsrelationer. En svår uppgift handlade om gömda knappar. Först visades 8 knappar för eleven, sedan gömdes några knappar i en hand och i den andra handen visades 3 knappar. Eleverna fick uppmaningen att komma fram till hur många knappar som gömdes. Många elever hade ingen metod för att lösa uppgiften och gissade istället. Analysen av förtestet resulterade i det direkta lärandeobjektet: att identifiera en okänd del i en del-helhetsrelation inom talområdet 0-10. De kritiska aspekterna som kunde utrönas utifrån förtestet var:

- *Urskilja att de två delarna ryms i den större helheten*
- *Urskilja att de två delarna tillsammans är lika mycket som helheten*
- *Kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*

Lektioner

Undervisningssekvensen bestod av tre lektioner som byggde på varandra, i likhet med Ekdahl et al. (2016). Den första lektionen (se bilaga 2) planerades behandla de tre kritiska aspekterna som kom fram i förtestet. Under den första lektionen deltog alla 17 elever i klassen (inklusive de elever som inte ville vara med i intervjuerna). Lektionen varade i 30 minuter. Lektion 2 (se bilaga 3) planerades utifrån analysen av lektion 1. Under lektion 2 deltog alla 17 elever (inklusive de fyra som inte deltog i intervjun) och lektionen varade i 30 minuter. En tredje lektion (se bilaga 4) planerades utifrån analysen av lektion 2. Tolv elever deltog i den tredje lektionen. Det var enbart de elever som deltagit i intervjuerna, varav en var frånvarande. Lektionen varade i 40 minuter. Alla lektioner videofilmades med en kamera riktad mot tavlan, för att fokus för undersökningen var hur läraren synliggjorde de kritiska aspekterna. Lektionerna analyserades med hjälp av videoinspelningarna med variationsteorin som utgångspunkt. Videoinspelningarna användes för att analysera vilka variationsmönster som användes under lektionerna och hur de synliggjorde de kritiska aspekterna för eleverna. Arbetsbladen från lektionerna användes även i analysen för att se hur eleverna hade urskilt de kritiska aspekterna. Videoinspelningen analyserades för att synliggöra det iscensatta lärandeobjektet och arbetsbladet användes för att analysera det erfarna lärandeobjektet.

Eftertest

Eftertestet (se bilaga 5) utformades för att se vad eleverna erfarit under de tre lektionerna. Eftertestet genomfördes, likt förtestet, genom individuella intervjuer som videofilmades. Eleverna fick sex uppgifter med tillhörande följdfrågor. De fyra första uppgifterna behandlade den kritiska aspekten att kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen. Eleverna fick se en helhet (med hjälp av konkret material) som sedan delades upp, där eleverna fick se en del och fick i uppgift att ta reda på den okända delen. De sista två uppgifterna var två exempel på Neumans (1987) gissningslek, vilka behandlade den kritiska aspekten att urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten. Gissningsleken byggde på en helhet (konkret material) som delades upp i två och eleverna skulle gissa hur helheten har delats. Exempelvis fick eleverna se 6 knappar. Knapparna delades sedan upp och gömdes i två händer, 4 knappar i en hand och 2 i den andra. Eleverna fick sedan uppmaningen att gissa hur knapparna var uppdelade. Till skillnad från förtestet utformades eftertestet för att ta reda på hur eleverna erfarit lektionerna. Syftet med förtestet var att ta reda på elevernas förkunskaper. Eftertestet var även kortare än förtestet, då det fokuserade på få uppgifter om det direkta lärandeobjektet istället för många uppgifter om det indirekta lärandeobjektet som i förtestet. Eftertestet genomfördes med 13 elever och intervjuerna var i genomsnitt sju minuter långa. Resultatet av eftertestet sammanställdes i en tabell (se bilaga 7) för att möjliggöra analysen. Elevernas lösningar på uppgifterna analyserades genom en jämförelse med liknande uppgifter från förtestet. Jämförelsen visade om och hur lösningsmetoderna hade utvecklats.

Tillförlitlighet och forskningsetiska aspekter

Eftersom undersökningen var kvalitativ valdes begreppet tillförlitlighet för att säkerställa undersökningens kvalitet istället för begreppet reliabilitet, som är vanligast förekommande i kvantitativa undersökningar. Undersökningen utgick från fyra delkriterier för tillförlitlighet som beskrivs av Bryman (2011). Det första kriteriet är trovärdighet, vilket innebär att en undersökning görs enligt de regler som finns uppsatta för undersökningen och att resultaten rapporteras till verksamma inom undersökningsområdet för att bekräfta att området är beskrivet på rätt sätt. Det andra kriteriet är överförbarhet, vilket beskriver hur pass överförbart resultatet från en undersökning är till andra undersökningsområden. Det tredje kriteriet är pålitlighet, vilket innebär att hela undersökningsprocessen är tydligt dokumenterad i varje steg. Det sista kriteriet är möjligheten att styrka och konfirmera. Det betyder att undersökaren inte låter personliga värderingar eller teoretiska inriktningar styra eller påverka undersökningsprocessen och slutsatserna (Bryman, 2011).

Undersökningen följde de etiska principer för forskning som nämns av Bryman (2011) rörande informationskravet, samtyckeskavet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. I enlighet med informationskravet fick elever och vårdnadshavare information om undersökningens syfte och upplägg. Därefter fick både elever och vårdnadshavare ge sitt samtycke till att delta i undersökningen utifrån samtyckeskravet. I enlighet med konfidentialitetskravet filmades ingen elev om eleven och/eller vårdnadshavarna inte hade gett sitt samtycke. Namn på personer och platser fingerades för att säkerställa deras anonymitet. Med hänsyn till nyttjandekravet förvarades det insamlade materialet oåtkomligt för obehöriga. Inspelningarna användes enbart för undersökningsarbetet.

Resultat

Nedan presenteras resultatet först med en redogörelse av de kritiska aspekterna från förtestet. Sedan presenteras varje lektion för sig, där det intentionella lärandeobjektet presenteras först, utifrån hur lektionen var planerad. Det iscensatta lärandeobjektet beskrivs utifrån variationsmönster och kritiska aspekter som behandlats i lektionerna och det erfarna lärandeobjektet redogörs utifrån arbetsbladen i lektionerna. Varje lektionsbeskrivning avslutas med en kort diskussion av hur lärandeobjektet har iscensatts och erfarits samt hur de kritiska aspekterna utvecklats till nästkommande lektion. Slutligen jämförs elevernas resultat på förtestet med deras resultat på eftertestet. Syftets frågeställningar besvaras löpande genom kapitlet.

Kritiska aspekter från förtestet

Förtestet utgick från flera viktiga aspekter av del-helhetsförståelsen av tal, för att utifrån testet kunna avgränsa ett lärandeobjekt med tillhörande kritiska aspekter. Efter förtestet kunde många aspekter strykas (se metodavsnittet), eftersom eleverna visade på god förståelse för dem. En aspekt som eleverna visade svårigheter för behölls som den var, helheten är större än delarna (Piaget, 1965), och blev en kritisk aspekt: *urskilja att de två delarna ryms i den större helheten*. Den aspekten synliggjordes i uppgiften där eleverna skulle komma fram till hur många av totalt 8 knappar som gömdes i en hand, när 3 knappar visades i den andra handen. En annan aspekt som visade sig vara kritisk, att se relationen mellan helhet och delar samtidigt som relationen mellan delarna (Neuman, 1987; Piaget, 1965), bröts ner eftersom den var för vid för att vara en enskild kritisk aspekt. Istället blev den de kritiska aspekterna att *urskilja att de två delarna tillsammans är lika mycket som helheten* samt att *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*. De tre kritiska aspekterna som utmynnade från förtestet användes i lektion 1.

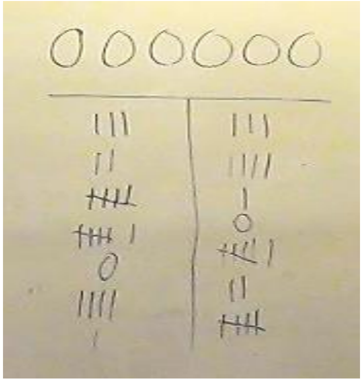
Lektion 1

Lektion 1 behandlade det direkta lärandeobjektet att kunna identifiera ett okänt tal i en delhelhetsrelation inom talområdet 0-10 genom synliggörandet av de tre kritiska aspekterna. Lektionsplaneringen (se bilaga 2) började med att synliggöra den första kritiska aspekten, *urskilja att de två delarna ryms i den större helheten,* genom en genomgång av hur ett antal kan delas upp genom en uppställning av korrekta delar i en tabell (finns en bild på tabellen i bilaga 2). I tabellen skulle en inkorrekt delning och variationsmönstret *konstrast* användas för att eleverna skulle se att delarna måste rymmas i helheten. Läraren skulle fråga om den inkorrekta delningen fick plats i helheten. Eleverna skulle sedan uppmanas att komma fram till korrekta delningar och försöka se kommutativa samband mellan delningarna, exempelvis mellan 4 och 2 samt 2 och 4. Sedan skulle den andra kritiska aspekten, *urskilja att de två delarna tillsammans är lika mycket som helheten*, synliggöras genom en *separation* med hjälp av tabellen, där helheten skulle hållas konstant och delarna variera. Varje delning skulle lyftas fram och eleverna skulle uppmanas att se om delarna tillsammans var lika mycket som helheten. Därefter skulle eleverna få se en övning där delar täcktes över i två exempel av samma helhet. Övningen skulle synliggöra den tredje kritiska aspekten, *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*, genom *separation* där helheten skulle vara konstant medan de övertäckta delarna skulle variera. Eleverna skulle uppmanas att lista ut vilka delar som var övertäckta i exemplen och beskriva hur de kom fram till dem, exempelvis om de såg kommutativitet. Lektionen skulle avslutas med ett arbetsblad som liknade den sista övningen där eleverna skulle identifiera en övertäckt del i fem olika uppgifter.

Kritik aspekt: Urskilja att de två delarna ryms i den större helheten

De två första kritiska aspekterna i lektionen hörde ihop, då de båda behandlade förståelse för relationerna mellan delarna och mellan delarna och helheten. I lektionen synliggjordes den kritiska aspekten att *urskilja att de två delarna ryms i den större helheten* till en början genom variationsmönstret *kontrast*. Först ritades 6 kulor på tavlan och sedan ställdes frågan om kulorna kunde delas i 6 och 1. De två felaktiga delarna ritades upp bredvid de första 6 kulorna. Majoriteten av eleverna var överens om att det inte var möjligt att göra så men flera elever försökte däremot hitta andra möjligheter att få de två felaktiga delarna att passa helheten, exempelvis genom att flytta på kulorna eller dela dem i hälften. Det visar att *kontrasten* inte synliggjordes tydligt för eleverna och några elever fokuserade på de felaktiga delarna senare i lektionen.

Efter de felaktiga delarna ritats upp fick eleverna komma fram till korrekta delar som sedan bokfördes med staket-tal (avprickning med streck i grupper om fem) under de 6 kulorna, i en tabell (se figur 3 nedan). I tabellen syns det hur eleverna först kom fram till fyra olika delningar (3 och 3, 2 och 4, 5 och 1 samt 6 och 0). Efterhand kunde de se kommutativitet i delningarna, det vill säga att delarna kunde byta plats (0 och 6, 4 och 2 samt 1 och 5). När noll antal kulor skulle bokföras användes en nolla för att förtydliga att det ändå var två delar (6 och 0).



Figur 3: Bokföring av delar till talet 6

När den första delningen skrivits upp jämfördes den med den felaktiga delningen för att visa på *kontrasten* igen. Här blev det tydligare att delarna måste få plats i helheten. När alla delar eleverna kunde komma fram till ställdes upp under varandra synliggjordes en *generalisering* av den kritiska aspekten, det vill säga att delarna kan vara olika men ändå rymmas i helheten. I samma moment synliggjordes även en *separation*, där delarna varierade men helheten var konstant. Det förekom även en form av oplanerad *fusion* av de två första kritiska aspekterna, där det i tabellen förtydligades att delarna både ryms i helheten och att de tillsammans är lika mycket som helheten.

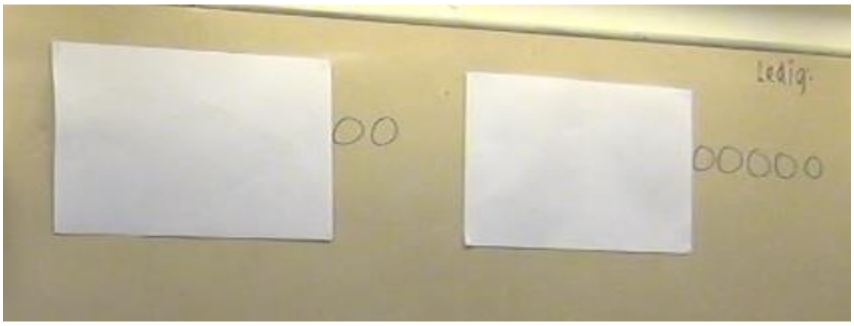
Kritisk aspekt: Urskilja att de två delarna tillsammans är lika mycket som helheten

Trots att de två första aspekterna var lika hölls de isär för att kunna visa dem tydligare för eleverna. Den kritiska aspekten att *urskilja att de två delarna tillsammans är lika mycket som helheten* synliggjordes i lektionen först genom *kontrast*, oplanerat, när den första korrekta delningen jämfördes med de felaktiga delarna. *Kontrasten* förtydligades genom en förklaring att 3 och 3 tillsammans är 6 men att 6 och 1 tillsammans är 7. Det blev tydligt för eleverna att delarna tillsammans måste vara lika mycket som helheten. Genom *kontrasten* blev det även här en *separation* av aspekten, genom att visa att helheten är konstant men delarna varierar.

Generalisering förekom när varje delning i tabellen (se figur 3 ovan) presenterades och summan av de olika delarna efterfrågades. Eleverna fick möjlighet att se att trots att delarna är olika är summan av dem ändå lika mycket som helheten. I samma moment synliggjordes även en *fusion* av den första kritiska aspekten, att delarna ryms i helheten, och den andra kritiska aspekten, att delarna tillsammans är lika mycket som helheten.

Kritisk aspekt: Kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet

Den sista kritiska aspekten i lektion 1 var den aspekt som tydligast kopplade till det direkta lärandeobjektet. Den kritiska aspekten innebar att *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet* *och delar för att finna det tredje talet*. Genom *separation,* där helheten var konstant men delarna varierade, synliggjordes att helheten och en del kan användas för att finna den andra delen. Till vänster på tavlan ritades 7 kulor upp och sedan ritades ytterligare 7 kulor upp till höger på tavlan (se figur 4 nedan).



Figur 4: Övertäckning av delar i talet 7

Eleverna fick uppmaningen att blunda och under tiden täcktes 5 kulor över med ett papper till höger och till vänster täcktes 2 kulor över med ett papper. Tanken med uppgiften var att eleverna skulle kunna se ett kommutativt samband mellan de två exemplen på tavlan. Det framkom dock inte tydligt för eleverna att de kunde använda sig av den synliga delen i exemplet till vänster för att hitta den gömda delen i exemplet till höger.

En elev lyckades uppmärksamma det kommutativa sambandet, att exemplen var tvärtom varandra. Det var få elever som räckte upp handen och ett par elever uttryckte att de inte förstod uppgiften. Därför gjordes ett nytt exempel med samma helhet men andra delar som täcktes över. I det nya exemplet täcktes 3 kulor över till vänster och 4 kulor till höger. Genom det nya exemplet synliggjordes en oplanerad *generalisering* och fler elever kunde använda sig av sambandet från det förra exemplet för att hitta de gömda delarna i det nya exemplet.

Det erfarna lärandeobjektet i lektion 1

Den sista kritiska aspekten synliggjordes även i elevernas arbetsblad där eleverna individuellt skulle finna de övertäckta delarna av talet 8 i fem olika uppgifter. Arbetsbladet byggde vidare på den sista genomgången, med övertäckta delar, och läraren förklarade för eleverna att de skulle göra som i genomgången. Det innebar ytterligare en *generalisering* av den kritiska aspekten. Majoriteten av eleverna klarade alla uppgifter på arbetsbladet. Flera elever använde sig av fingerräkning för att lösa uppgiften. En elev skrev 7 i stället för 6 i uppgiften **8|_|2**, vilket har tolkats utifrån elevens andra lösningar som en felräkning. En annan elev blev påverkad av sin bänkkamrat och suddade ut det rätta svaret (5) och ändrade till 8 i uppgiften **8|_|3**. Bänkkamraten var en elev som på arbetsbladet visade att hen inte hade urskilt aspekten och skrev 8 i uppgiften **8|_|3**, 8 i uppgiften **8|_|6** och 6 i uppgiften **8|_|7**.

Analys av lektion 1

Det iscensatta lärandeobjektet stämde inte helt överens med det intentionella lärandeobjektet då de kritiska aspekterna inte framträdde lika tydligt som planerat. Det erfarna lärandeobjektet som synliggjordes i arbetsbladet visar ändå att majoriteten av eleverna förstod det intentionella lärandeobjektet. I lektionen skulle helheterna blivit tydligare om de representerades med hjälp av något konkret material, exempelvis genom kulor på ett snöre. Då skulle förmodligen eleverna inte i lika stor grad vilja flytta om helheten, dela den i halvor eller utöka helheten vilket var enklare att göra med uppritade helheter. Efter den första lektionen tillkom inga nya kritiska aspekter. Istället slogs de två första aspekterna ihop eftersom de var så lika och blev en enda kritisk aspekt: *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten*. Den sista kritiska aspekten behölls som den var för att eleverna skulle få möjlighet att urskilja den tydligare på ett nytt sätt.

Lektion 2

Lektionen var planerad att innehålla en genomgång av den sammanslagna kritiska aspekten från lektion 1, *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten.* Eleverna skulle få se en *kontrast* och *separation* mellan korrekta och felaktiga delar till en helhet. Därefter skulle eleverna få arbeta i par för att träna på att para ihop och bokföra delar till två bestämda helheter. Lektionen skulle avslutas med en genomgång där eleverna skulle se den kritiska aspekten att *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*. Aspekten skulle synliggöras genom *separation* och *generalisering* av del-helhetsrelationer där en del hölls konstant medan den andra delen och helheten ökade. På grund av tidsbrist genomfördes inte det sista momentet vilket innefattade den tredje kritiska aspekten. Det innebar att en ny lektion blev tvungen att planeras för att de planerade kritiska aspekterna av lärandeobjektet skulle kunna synliggöras.

Kritisk aspekt: Urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten

I lektion 2 synliggjordes den kritiska aspekten, *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten*, i en genomgång och en parövning. Med hjälp av utklippta cirklar med helheten 8 och delarna 6, 2, 5 och 3 skrivna med staket-tal fokuserade genomgången på att para ihop rätt delar (se figur 5).

Figur 5: Kontrast av delar till talet 8

Eleverna fick frågan om 6 och 3 kunde paras ihop och eleverna förstod att det inte gick. Den felaktiga kombinationen sattes upp på tavlan och över den sattes den korrekta kombinationen upp. Eleverna fick sedan hitta skillnader mellan de olika kombinationerna och såg att det var ett streck för mycket i den nedersta kombinationen. Här användes variationsmönstren *kontrast och separation* för att synliggöra både att delarna ryms i helheten och att delarna tillsammans är lika mycket som helheten. Eleverna var uppmärksamma under genomgången och framför allt *kontrasten* synliggjordes tydligt då eleverna kunde se skillnaderna mellan de olika delningarna.

Det erfarna lärandeobjektet i lektion 2

När eleverna skulle börja med parövningen fick de en beskrivning av vad de skulle göra med koppling till genomgången. Eleverna fick urklippta cirklar med delar till talet 9 och till talet 10, skrivna med staket-tal, som de skulle para ihop korrekta kombinationer och sedan bokföra på ett arbetsblad tillsammans i par. När eleverna fick ut båda talens delar blev det inte tydligt för eleverna vad de skulle göra och därför förstod de inte uppgiften. Det krävdes förklaringar för varje par för att de skulle kunna komma igång med uppgiften. Tanken med övningen var att synliggöra *generalisering* och *fusion*, men eftersom variationsmönstren var otydliga förstod eleverna inte. Åtta elever förstod övningen efter en ny förklaring, där eleverna fick hjälp med att para ihop två delar. Sex elever var fortfarande osäkra efter en ytterligare förklaring av uppgiften och fick ta mycket hjälp av sina bänkkamrater för att klara övningen. Tre elever valde att inte delta alls i övningen och två elever parade ihop delarna men bokförde dem inte. De insamlade arbetsbladen visade att ungefär hälften av eleverna urskilde den kritiska aspekten och parade ihop delarna på ett korrekt sätt. Den andra hälften hade inte parat ihop delarna på ett korrekt sätt, utan skapat egna kombinationer. Utifrån deras arbetsblad kan det tolkas att de inte urskilt att delarna tillsammans måste vara lika mycket som helheten.

Analys av lektion 2

Under genomgången verkade det som att de flesta eleverna kunde urskilja och förstå den kritiska aspekten att *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten*. När eleverna fick parövningen visade det sig att flera elever inte hade förstått genomgången och därför inte parövningen heller. Det intentionella lärandeobjektet stämde inte överens med det iscensatta, då den sista genomgången inte hanns med. Därför behandlades inte den viktigaste delen av lärandeobjektet i lektionen. Det erfarna lärandeobjektet som synliggjordes i parövningen visar att några elever inte hade urskilt den kritiska aspekten. Genomgången av parövningen hade kunnat göras bättre om variationsmönstret i den gemensamma övningen varit utökat och tydligare. Sedan skulle delarna till talet 9 delats ut först och delarna till talet 10 skulle delats ut till de elever som klarat talet att dela upp 9.

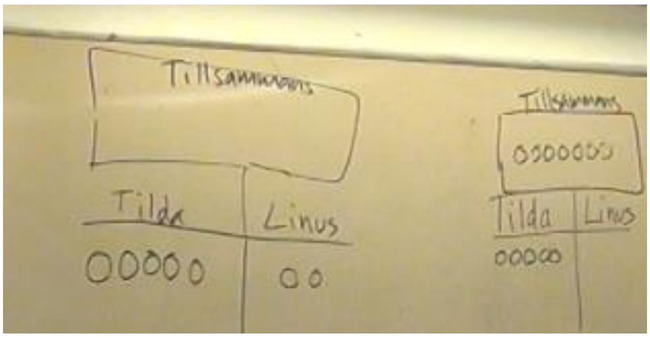
Eftersom att den sista kritiska aspekten inte hanns med var det nödvändigt att den fanns kvar även till den tredje lektionen. Den kritiska aspekten att *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten* bedömdes vara klar eftersom majoriteten av eleverna som hade urskilt den i den första lektionen, där den behandlades som två aspekter, eller i den andra lektionen. Istället formulerades en ny kritisk aspekt till lektion 3, *kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen*. Den utformades för att tydligare fokusera på att identifiera en okänd del, snarare än ett okänt tal i en del-helhetsrelation. I den första lektionen behandlades den liknande aspekten *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*, vilken var svår för några elever att urskilja. Aspekten behövde fokuseras, vilket resulterade i den nya kritiska aspekten till lektion 3.

Lektion 3

Den tredje lektionen planerades att först behandla den kritiska aspekten att *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*. Aspekten skulle synliggöras genom en *konstrast* mellan en del-helhetsrelation där helheten saknades, och samma del-helhetsrelation där en del saknades. Sedan skulle den kritiska aspekten att *kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen* synliggöras genom den genomgång som var tänkt till lektion 2. Eleverna skulle få se en del-helhetsrelation där en del saknades. Eleverna skulle uppmanas att hitta den okända delen. Sedan skulle den kända delen och helheten öka för varje nytt exempel för att synliggöra *separation* och *generalisering*. Representationsformen skulle ändras med vartannat exempel för en ytterligare *generalisering*. Lektionen skulle avslutas med ett arbetsblad som liknade den första genomgången där eleverna skulle fylla i en okänd del i fyra del-helhetsrelationer, vilket skulle visa på en *generalisering*.

Kritisk aspekt: Kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet

Den kritiska aspekten att *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet,* synliggjordes i början av lektionen. Den första genomgången handlade om en kontextuppgift om kulor: ”Tilda har 5 kulor och Linus har 2 kulor. Hur många har de tillsammans?”. Uppgiften uppmuntrade eleverna att se kommutativitet. Kulorna ritades upp på tavlan som en tabell (se figur 6 nedan) och eleverna uppmanades att berätta hur de tänkte när de löste uppgiften. En elev beskrev att hen räknade ihop alla kulorna och elevens svar ritades upp på tavlan. Sedan fick eleverna en liknande kontextuppgift: ”Tilda och Linus har tillsammans 7 kulor. Tilda har 5 kulor. Hur många kulor har Linus?”. På liknande sätt ritades kulorna upp på tavlan som en tabell bredvid den första. Eleverna fick återigen frågan hur de tänkte när de löste uppgiften.



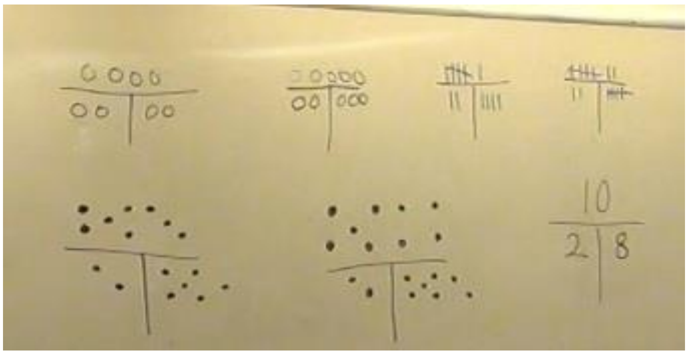
Figur 6: Kontrast av del-helhetsrelation

En elev nämnde att hen tog hjälp av mittenlinjen i tabellen och förlängde den genom helheten för att dela upp helheten i 5 och 2. En annan elev utgick från helheten och räknade bort den kända delen för att se hur många kulor som blev kvar. En tredje elev såg sambandet, kommutativitet, mellan de två tabellerna på tavlan och kunde därför se vilken del som saknades. Eleverna fick frågan om de kunde se någon skillnad mellan de olika uppgifterna men de hade svårt att se någon. En elev såg en skillnad att i ena tabellen fanns Linus kulor med, men inte i den andra.

Läraren förtydligade för eleverna skillnaderna i hur de olika exemplen såg ut genom att gå igenom uppgiften igen, där helheten var utsuddad i första tabellen och delen 2 i var utsuddad i den andra tabellen (se figur 6 ovan). Läraren förklarade att det krävs olika sätt att tänka för att lösa uppgifterna, men att eleverna kunde ta hjälp av informationen i båda tabellerna. Genom jämförelsen gjordes det möjligt för eleverna att urskilja variationsmönstret *kontrast*, dock i den andra genomgången av uppgiften. Genom att låta del-helhetsrelationen i genomgången vara konstant men att variera vilka tal i relationen som syns möjliggjordes även variationsmönstret *separation*.

Kritisk aspekt: Kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen

I nästa moment av lektion 3 synliggjordes den nya kritiska aspekten: *kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen*. Eleverna uppmanades att hitta den okända delen och förklara hur de tänkte i sju olika exempel (se figur 7 nedan) där en del (2) var konstant men helheten ökade med 1 i varje exempel. Representationsformen varierades i de olika exemplen för att visa synliggöra *generalisering* och utmana eleverna, genom att införa siffror. Representationsformerna som användes var ritade kulor, staket-tal, tärningsprickar och siffror.



Figur 7: Ökande del och helhet med olika representationsformer (efter att eleverna löst alla exempel)

En elev använde en metod där hen ”förlängde” mittenlinjen i exemplet för att dela helheten utifrån den kända delen. En annan elev räknade på fingrarna, där hen utgick från den kända den och lade till fingrar upp till helheten. Två elever förklarade att de tänkte bort den kända delen från helheten och räknade hur många det var kvar. En elev såg sambandet mellan de olika exemplen och kunde använda sig av det mönstret för att hitta den okända delen. Eleverna löste enkelt exemplen skrivna med kulor, då det var enkelt att ”se” var helheten skulle delas. I exemplen med tärningsprickar (se figur 7) kunde eleverna också ”se” var helheten skulle delas. I exemplen med staket-tal och siffror var det svårare att använda visuella lösningsmetoder. Genom övningen kunde eleverna urskilja den kritiska aspekten genom variationsmönstret *separation*, när en del hölls konstant medan den andra delen och helheten varierade.

Det erfarna lärandeobjektet i lektion 3

Avslutningsvis i lektion 3 fick eleverna ett arbetsblad där de skulle fylla i liknande tabeller som övades i den första genomgången i lektionen. Eleverna fick fyra uppgifter de skulle fylla i individuellt. I varje uppgift var helheten och en del känd och eleverna skulle hitta den okända delen. Eftersom uppgifterna var olika synliggjordes en *generalisering*. Läraren gav en muntlig instruktion till arbetsbladet innan det delades ut, men flera elever behövde ytterligare en förklaring där läraren hjälpte dem att komma igång med hur de skulle tänka i den första uppgiften. Under tiden eleverna arbetade med arbetsbladet gick läraren runt och observerade elevernas lösningsmetoder. Några elever räknade med fingrarna. Några elever använde sig av visuella lösningsmetoder som att dela helheten med hjälp av en penna eller täcka över den kända delen i helheten för att räkna hur många som fanns kvar. Några elever löste uppgifterna snabbt och tyst i huvudet. Sju elever klarade alla uppgifter i arbetsbladet. Två elever hade ett eller två fel som var 1 mer eller mindre än det korrekta svaret, vilket bedömdes som räknefel. Det var svårt att räkna kulorna på pappret, eftersom att de var uppradade istället för grupperade i tydliga grupper. Tre elever hade svårt att förstå uppgifterna. En av eleverna hade två korrekta uppgifter och två fel som inte kunde tolkas. En elev räknade ihop helheten och delen. Eleven fick en ny förklaring av uppgiften och kunde då lösa arbetsbladet med hjälp. En elev förstod inte uppgifterna alls, trots en ny förklaring.

Analys av lektion 3

I den första genomgången fylldes den första tabellen i helt, innan den andra tabellen ritades upp vilket gjorde att eleverna inte såg de båda tabellerna icke-ifyllda samtidigt. Det innebar att *kontrasten* inte synliggjordes tydligt förrän efteråt när läraren gick igenom uppgiften igen. *Kontrasten* hade framkommit tydligare om tabellerna visades samtidigt. Den första genomgången kunde även gjorts tydligare genom att först dela upp konkret material och sedan övergå till att rita på tavlan. Några elever hade behövt förstå hur delarna och helheten hängde ihop vilket hade kunnat underlättas med hjälp av exempelvis kulor. I arbetsbladet visade det sig att några elever inte förstod hur den kända delen förhöll sig till helheten. I den andra genomgången synliggjordes variationsmönstren tydligt, då eleverna kunde använda sig av helheten och en del för att lösa exemplen. Läraren uppmanade eleverna att försöka se ett mönster mellan exemplen, vilket inte riktigt hörde ihop med den kritiska aspekten. Läraren påpekade för eleverna att de kunde tänka på de tidigare exemplen för att komma fram till den okända delen. Uppmaningen fokuserade på en ny kritisk aspekt som inte hittats tidigare, *att ta hjälp av kunskaper om tidigare del-helhetsrelationer för att hitta okända tal i nya del-helhetsrelationer*. Till eftertestet fokuserades de kritiska aspekterna *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten* och *kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen* eftersom de var fokus i de tre lektionerna.

Förtest och eftertest

Eftertestet (se bilaga 5) konstruerades för att pröva de kunskaper eleverna fått under de tre lektionerna. En uppgift från förtestet återanvändes, vilken var att dela upp ett antal knappar i två händer och visa eleverna en av delarna. Eftersom det endast var en uppgift från förstestet som var liknande i eftertestet har elevernas lösningsmetoder i uppgiften i förtestet jämförts med deras lösningsmetoder i liknande uppgifter i eftertestet.

I förtestet var det sex elever som klarade att lösa uppgiften där undersökaren delade upp ett antal knappar i två händer och visade eleverna en av delarna. Några av eleverna räknade bort den kända delen i huvudet, andra elever använde fingrarna och en elev kunde inte förklara sin lösning. Det var sju elever som inte kunde lösa uppgiften och majoriteten av dem gissade sina svar. I de liknande uppgifterna i eftertestet fick eleverna ett betydligt bättre resultat. Av totalt 52 insamlade svar (13 elevers svar i fyra uppgifter) så var endast sex svar fel. Nästan alla eleverna använde sig av fler lösningsmetoder i eftertestet. Alla elever utom en kunde använda en lösningsmetod i eftertestet som var mer avancerad än metoden de använde i förtestet. Endast en elev höll kvar vid samma lösningsmetod, räkna bort, i både förtestet och eftertestet. Räkna bort innebär att eleven tänker subtraktivt genom att räkna bort det tal som ska subtraheras (Neuman, 1987). Eleven i fråga räknade bort i uppgiften där 7 knappar delades upp och 3 knappar visades. Elev berättade att 7:an, 6:an och 5:an försvann, vilket lämnade 4 kvar. De lösningsmetoder som visade sig i eftertestet var att räkna bort, räkna upp, fingerräkning, gissning, memorerad addition, utgå visuellt från helheten, huvudräkning, använda sambandet mellan addition och subtraktion samt att utgå från tidigare uppgifter. Räkna upp innebar att eleven utgick från den kända delen och räknade upp till helheten. Fingerräkning innebar att eleverna använde sig av fingrarna för att räkna. De elever som använde memorerad addition utgick från en addition de kunde för att lösa uppgiften. Lösningsmetoden att utgå visuellt från helheten, innebar att eleverna såg helheten i huvudet och kunde se hur många som saknades, utan att räkna. När eleverna använde huvudräkning räknade de ut svaret i huvudet och kunde inte beskriva närmare hur de hade tänkt. En annan lösningsmetod var att använda sambandet mellan addition och subtraktion, vilket en elev använde när hen utgick från additionen $3 + 4 = 7$ för att hitta den okända delen i del-helhetsrelationen $\_|3|7$. Några elever använde sig även av lösningsmetoden att utgå från del-helhetsrelationer i tidigare uppgifter för att lösa den nuvarande uppgiften, vilket innebar att de tog hjälp av en tidigare uppgift i testet för att lösa en senare. Exempelvis använde en eleven uppgiften där 7 knappar delades upp och 3 knappar visades, när hen löste uppgiften där 7 knappar delades upp och 5 knappar visades. Eleven såg att den synliga delen var 1 mer än en av delarna i den förra uppgiften, vilket innebar att den andra delen i den senare uppgiften måste vara 1 mindre än den andra delen i den förra uppgiften.

Eftertestets två sista uppgifter prövade elevernas kunskaper att hitta delar till en helhet, där eleverna skulle gissa delarna till en helhet som delades upp och gömdes i två händer. De två uppgifterna i eftertestet är vagt jämförbara med en uppgift i förtestet där eleverna fick dela upp en helhet på olika sätt. I den uppgiften fick eleverna 7 knappar som de skulle dela upp i två högar. Alla elever lyckades hitta tre eller fler olika delningar. De två liknande uppgifterna i eftertestet var mer abstrakta då eleverna inte fick plocka med konkret material när de skulle hitta de olika delningarna. Av totalt 76 förslag på (elevernas olika förslag i två uppgifter) delningspar var 17 felaktiga, vilket visar att majoriteten ändå lyckades gissa på korrekta delar trots avsaknaden av konkret material att laborera med.

Resultatsammanfattning

I undervisningen har det visat sig att tydligt synliggjorda variationsmönster är viktiga för att elever ska kunna urskilja de kritiska aspekterna. Det är även viktigt att det finns samtidighet i exemplen, något som visade sig när de två olika tabellerna i den tredje lektionen inte visades samtidigt. Det innebar att variationsmönstret inte synliggjordes tydligt och att eleverna fick svårt att urskilja den kritiska aspekten. I lektion två synliggjordes däremot en konstrast tydligt när en felaktig delning visades samtidigt som en korrekt delning. Eleverna kunde tydligt se likheter och skillnader mellan de olika delningarna och kunde därför urskilja den kritiska aspekten. De aspekter som visade sig vara kritiska för att kunna hitta ett okänt tal i en delhelhetsrelation var:

- *urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten*
- *kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet*
- *kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen*

samt den nyfunna aspekten efter lektion 3:

- *kunna ta hjälp av kunskaper om tidigare del-helhetsrelationer för att hitta okända tal i nya del-helhetsrelationer*

Diskussion

Diskussionskapitlet inleds med en diskussion av undersökningens metod. Vidare diskuteras resultatet utifrån undersökningens frågeställningar. Kapitlet avslutas med några rader om didaktiska implikationer.

Metoddiskussion

Arbetet har utgått från de fyra kriterier för tillförlitlighet som beskrivs av Bryman (2011), vilka är trovärdighet, överförbarhet, pålitlighet och möjlighet att styrka och konfirmera. Trovärdigheten har uppfyllts genom att undersökningen följde de regler som bestämts för undersökningen och resultatet rapporterades löpande till en på området insatt handledare som kontrollerade att beskrivningar gjordes korrekt. Resultatet från undersökningen var begränsat till den kontext den var utförd i, då den gällde undervisning för en specifik elevgrupp. Resultatet är därför inte helt överförbart men det kan finnas delar av resultatet som kan ha relevans i liknande verksamheter som den undersökta. Exempelvis kan de kritiska aspekterna vara överförbara till andra förskoleklasser. Pålitligheten i denna undersökning säkerställdes genom en tydlig dokumentation av varje steg i undersökningsprocessen. Utgångspunkten för denna undersökning var forskning och därför har personliga värderingar inte fått utrymme i undersökningen. Resultatet bör därför kunna styrkas och konfirmeras av liknande undersökningar.

Urvalet för undersökningen var ett bekvämlighetsurval vilket kan kritiseras för att ge ett skevt resultat som inte går att generalisera (Bryman, 2011), men då denna undersökning fokuserade på undervisning spelade relationen mellan undersökaren och elevgruppen roll. Det var viktigt att eleverna gick på samma skola och helst i samma klass för att undervisningen skulle vara genomförbar. Eftersom eleverna genomgick två intervjuer och en undervisningssekvens om tre lektioner var det även viktigt att de kände sig trygga med undersökaren och vågade uttrycka hur de tänkte när de löste uppgifterna. Därför var ingen annan urvalsmetod motiverad i denna undersökning.

I undervisningen användes i huvudsak inga siffersymboler av två anledningar, främst då forskning påpekar att den tidiga undervisningen av tals del-helhetsrelationer ska bearbetas genom konkret material innan siffersymboler används (Easly, 1983; Marton & Booth, 1997; Myers, 1925; Zhou & Peverly, 2005). Den andra orsaken var att eleverna i undersökningsgruppen inte fått fokuserad undervisning om siffror. För att eleverna inte skulle få svårigheter i att urskilja de kritiska aspekterna på grund av att de inte kunde alla siffror fokuserades istället symboler som de kände till, som tärningsprickar och staket-tal. Siffror användes enbart vid enstaka tillfällen, exempelvis när delningar till 6 kulor bokfördes med staket-tal. Eftersom det inte finns en symbol för noll med staket-tal användes en vanlig nolla (0) istället, för att visa på att det var en del med 6 kulor och en del med 0 kulor. Andra gången siffror användes var i lektion 3 när del-helhetsrelationer visades genom olika representationsformer. Siffror användes i det sista exemplet för att utmana eleverna.

Skillnaderna mellan uppgifterna i förtestet och eftertestet är stora vilket gör att jämförelser mellan testerna begränsas. Förtestet planerades att testa ett brett lärandeobjekt och när det smalare, direkta lärandeobjektet bestämdes var majoriteten av uppgifterna i förtestet inte relevanta längre. Eftersom det endast var en uppgift som var samma från förtestet till eftertestet fokuserades jämförelserna till den uppgiften. Uppgiften var att visa en helhet, sedan visa en del och låta eleverna hitta den andra delen. I eftertestet fick eleverna fyra sådana uppgifter, till skillnad från förtestet där de bara fick en. Det medförde att eleverna fick större möjligheter att visa fler lösningsmetoder i eftertestet än i förtestet. Hade det funnits fler liknande uppgifter i förtestet hade eleverna förmodligen kunnat visa några fler lösningsmetoder som exempelvis att utgå från den förra uppgiften för att lösa den nuvarande. Eftertestet gjordes kort efter den sista lektionen, vilket innebar att eleverna hade kunskaperna färskt i minnet. Hade eftertestet varit fördröjt och gjorts några veckor efter den sista lektionen hade resultatet kunnat se annorlunda ut.

Undersökningen genomfördes enbart av en person som agerade forskare och lärare. Genom handledningsgruppen kunde metod och planering och genomförande diskuteras, men på grund av sekretessen kring videoinspelningarna kunde handledningsgruppen inte hjälpa till vid analysen av det inspelade materialet. Hade undersökningen gjorts tillsammans med en annan person hade varje steg i undersökningen kunnat diskuteras djupare, vilket ofta är fallet med undersökningsmetoder som lesson study och learning study där samarbete och kollegialt lärande fokuseras (Doig & Groves, 2011; Marton & Pang, 2006). Hade undersökningen gjorts annorlunda hade den gjorts i samarbete med en annan person, för att kunna få större möjligheter att diskutera bland annat planering och analys av lektioner.

Resultatdiskussion

Nedan presenteras resultatdiskussionen utifrån de två frågeställningar som presenterades tillsammans med undersökningens syfte. Frågeställningarna var:

- Vilka är de kritiska aspekterna eleverna behöver urskilja för att förstå lärandeobjektet?

- Hur kan specifik undervisning om lärandeobjektet utformas utan siffersymboler för att synliggöra de kritiska aspekterna?

Kritiska aspekter

Resultatet av undersökningen visade att det fanns ett antal kritiska aspekter som var nödvändiga att urskilja för att förstå det direkta lärandeobjektet. Eleverna kunde lösa uppgifterna i eftertestet bättre än i förtestet vilket visar att de aspekter som eleverna hade urskilt var kritiska för förståelse för lärandeobjektet att kunna hitta ett okänt tal i en del-helhetsrelation. I den sista lektionen hittades en ny kritisk aspekt som inte fokuserats tidigare, att ta hjälp av kunskaper om tidigare del-helhetsrelationer för att hitta okända tal i nya del-helhetsrelationer. Några elever visade förståelse för den aspekten i efterestet när de kunde lösa en uppgift genom att utgå från en tidigare avklarad uppgift. En elev kunde exempelvis lösa uppgiften där 7 knappar delades upp och 5 knappar visades genom att utgå från del-helhetsrelationerna i den tidigare uppgiften där 7 knappar delades upp och 3 knappar visades.

I undersökningsgruppen visade det sig att de kritiska aspekterna inte var kritiska för vissa elever, som redan visade förståelse för dem tidigt i undervisningssekvensen. Flera elever visste redan att delarna måste vara lika mycket som helheten i första genomgången i lektion 1. Om undersökningen skulle gjorts igen hade de första kritiska aspekterna, som behandlade att delarna måste rymmas i helheten och tillsammans vara lika mycket som helheten, inte behandlats lika långdraget som de gjorde i undervisningssekvensen. För majoriteten av eleverna innebar det en upprepning av något de redan urskilt. Några elever hade däremot inte urskilt de första kritiska aspekterna när de togs bort inför lektion 3. De hade kanske behövt ett mer konkret arbetssätt i lektionerna för att kunna abstrahera förståelsen för uppdelning av konkret material, något som flera forskare förespråkar (Easly, 1983; Marton & Booth, 1997; Myers, 1925; Zhou & Peverly, 2005). På så sätt hade de bättre kunnat förstå de abstrakta, tvådimensionella exemplen som användes i lektionerna. Hade lektionerna gjorts annorlunda hade den första lektionen fokuserat mer på uppdelning och övertäckning av delar med hjälp av konkret material.

Undervisning om tals-delhelhetsrelationer

Undervisningssekvensen planerades för den aktuella elevgruppen utifrån de kritiska aspekterna som hittades i förtestet. De kritiska aspekterna som hittades kan i viss mån användas för andra elevgrupper då det är aspekter som är nödvändiga att urskilja för att fullt förstå det direkta lärandeobjektet. Det är dock inte garanterat att det som fungerade i undervisningen för den aktuella elevgruppen är överförbart till andra elevgrupper. Det som är kritiskt för några elever kanske inte är kritiskt för andra som redan har urskilt aspekterna. Lektionerna hade kunnat planeras annorlunda vilket troligen hade kunnat påverka resultatet. Resultatet presenterade ett förslag på hur undervisning kan utformas.

Resultatet visade att undervisningen hade fått effekter på elevernas sätt att lösa problem där en del saknas i en del-helhetsrelation. Alla elever utom en visade på fler och mer avancerade lösningsmetoder i eftertestet än i förtestet. I förtestet använde flera elever gissning som lösningsmetod medan de i eftertestet använde andra strategier, exempelvis räkna upp. Den eleven som inte ändrade sin lösningsmetod (räkna bort) från förtestet till eftertestet var säker på sin metod och kunde tydligt förklara hur hen tänkte, vilket visar att lösningsmetoden var ett medvetet val. Eleverna hade överlag blivit bättre på att förklara hur de tänkte när de löste uppgifterna.

I undervisningen gavs eleverna möjligheter att urskilja aspekter utöver de kritiska aspekterna för lärandeobjektet. Några genomgångar, två i lektion 1 och en i lektion 3, gav eleverna möjlighet att urskilja det kommutativa sambandet mellan delar i del-helhetsrelationer. Det kommutativa sambandet använde sig eleverna av i gissningsleken i eftertestet, när de skulle gissa hur ett antal knappar hade delats upp i två händer. En annan genomgång fokuserade även indirekt på sambandet mellan addition och subtraktion. I lektion 3 synliggjordes en *kontrast* mellan två tabeller där samma del-helhetsrelation behandlades, fast på olika sätt. I ena tabellen visades enbart delarna, vilket innebar en addition. I den andra tabellen visades helheten och en del, vilket innebar att en subtraktion synliggjordes. En elev visade att hen hade urskilt sambandet mellan addition och subtraktion i eftertestet när hen löste uppgiften där 7 knappar delades och 3 visades genom att utgå från additionen $3 + 4 = 7$ för att tänka ut subtraktionen $7 - 3 = 4$. Ovanstående kan kopplas till Neuman (1987, 2013) som beskriver att elever har utvecklat förståelse för de 25 kombinationerna (tals del-helhetsrelationer) när de kan se kommutativitet i kombinationerna och även använda sig av sambandet mellan addition och subtraktion. Eleverna i exemplen ovan visar på en god förståelse för tals del-helhetsrelationer.

Utifrån det direkta lärandeobjektet ska eleverna kunna identifiera ett okänt tal i en del-helhetsrelation, vilket dock inte innebär att eleverna måste ha en välgrundad förståelse för delhelhetsrelationer, som Neuman (1987) beskriver. De lösningsmetoder som eleverna använt i eftertestet för att korrekt lösa uppgifterna (förutom huvudräkning, räkna upp, räkna bort och gissning) visar i någon grad att de har förstått det direkta lärandeobjektet. De kan överlag använda del-helhetsrelationer för att lösa uppgifterna, eftersom fyra av uppgifterna var konstruerade för att låta eleverna identifiera ett okänt tal. Några elever som inte visade förståelse för delhelhetsrelationer i eftertestet lyckades ändå lösa uppgifterna genom att räkna upp eller räkna bort. Det stämmer överens med det tillvägagångssätt som Carpenter et al. (1996) och Fuson (1990) beskriver, att elever kan lösa uppgifter utan grundläggande förståelse för del-helhetsrelationer och utveckla förståelsen under tiden de räknar.

Wernberg (2009) beskriver att lärandeobjekt är dynamiska och att de kan förändras utifrån vad eleverna visar för förståelse. Vissa delar av det intentionella lärandeobjektet kanske inte synliggörs i det iscensatta lärandeobjektet. Detsamma gäller mellan det iscensatta och det erfarna lärandeobjektet och mellan det intentionella och det erfarna lärandeobjektet. Det iscensatta lärandeobjektet i lektionerna skiljde sig ibland från det intentionella lärandeobjektet, då de kritiska aspekterna inte framträdde så tydligt som planerat. Det skiljde sig även i den sista genomgången inte hanns med i lektion 2 samt då eleverna uppmärksammande andra saker än de planerade i genomgångarna vilket fick diskuteras i lektionerna. Exempelvis ville några elever visa på andra delningar än delningar i grupper om två i genomgången i lektion 1. Det blev därför viktigt att diskutera elevernas tankar och vinkla lärandeobjektet för att det skulle bli tydligare för eleverna. I vissa fall var det intentionella lärandeobjektet inte helt igenomtänkt vilket innebar att det iscensatta lärandeobjektet blev bristfälligt. Det skedde exempelvis i lektion 3 när två exempel som skulle synliggöra en kontrast inte visades samtidigt. Läraren följde planeringen, det intentionella lärandeobjektet, och därför blev det brister i det iscensatta lärandeobjektet. Om en liknande undersökning hade genomförts igen hade samtidigheten för variationsmönstren fokuserats mer för att de tre olika dimensionerna av lärandeobjektet skulle överensstämma så mycket som möjligt.

Det erfarna lärandeobjektet utifrån eftertestet och arbetsbladen från lektionerna visade variationer i elevernas erfarna objekt. Eleven som inte ändrade sin lösningsmetod från förtest till eftertest visade exempelvis inte på en ökad förståelse för tals del-helhetsrelationer och hur ett okänt tal kan identifieras, vilket visar att eleven inte erfarit det intentionella lärandeobjektet. Andra elever visade på god förståelse för tals del-helhetsrelationer och hur de kan användas för att identifiera ett okänt tal, vilket visade att de har erfarit det intentionella lärandeobjektet. Det erfarna lärandeobjektet visade att eleverna hade fått fler lösningsmetoder för att hitta ett okänt tal, men några av deras lösningsmetoder fokuserades inte i undervisningen. Därför stämde det iscensatta lärandeobjektet inte helt överens med det erfarna lärandeobjektet.

Didaktiska implikationer

Utifrån resultatet av undervisningssekvensen kan några slutsatser om didaktiska implikationer dras. Det är en förutsättning för undervisning om tals del-helhetsrelationer att eleverna har förstått delningsprincipen, att tal kan delas och sättas samman. I undervisningen är det därför viktigt att låta eleverna få arbeta med uppdelning av konkret material för att de ska kunna ta till sig de abstrakta, tvådimensionella representationerna på tavlan eller på papper. Det är även viktigt att använda tydliga och konkreta exempel och variationsmönster i genomgångarna, genom samtidighet och genom att använda fasta helheter som inte kan manipuleras som exempelvis fingertalen.

Referenslista

Brown, A. L. (1992). Design Experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 141-178.

Bryant, P., Christie, C., & Rendu, A. (1999). Children's understanding of the relation between addition and subtraction: Inversion, Identity and Decomposition. *Journal of Experimental Child Psychology, 74,* 194–212.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga perspektiv och metoder* (2. uppl.). Stockholm: Liber.

Canobi, K. H. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology, 92*, 220–246.

Canobi, K. H., Reeve, R. A., & Pattison, P. E. (1998). The Role of Conceptual Understanding in Children's Addition Problem Solving. *Developmental Psychology, 34*(5), 882-891.

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Franke, M. L. (1996). Cognitively Guided Instruction: A Knowledge Base for Reform in Primary Mathematics Instruction. *The Elementary School Journal, 97*(1), 3-20.

Cheng, Z-J. (2012). Teaching young children decomposition strategies to solve addition problems: An experimental study. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 29–47.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiment in educational research. *Educational researcher*, *32*(1), 9-13.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research Methods in education*. London: Routledge-Falmer.

Doig, B., & Groves, S. (2011). Japanese Lesson Study: Teacher Professional Development through Communities of Inquiry. *Mathematics Teacher Education and Development, 13*(1), 77-93.

Easly, J. (1983). A Japanese approach to arithmetic. *For the Learning of Mathematics, 3*(3), 8-14.

Ekdahl, A-L., Venkat, H., & Runesson, U. (2016). Coding teaching for simultaneity and connections: Examining teachers' part-whole additive relations instruction. *Educational Studies in Mathematics: An International Journal, 92*(2), 1-21.

Fenelius, B., & Rydberg, C. (2015). *Delar och helheter: Del-helhetsrelationers inverkan på yngre elevers matematiklärande.* Studentuppsats, Högskolan i Jönköping, Högskolan för lärande och kommunikation.

Fischer, F. (1990). A part-part-whole curriculum for teaching number in the kindergarten. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 207-215.

Fuson, K. C. (1990). Conceptual structures for multiunit numbers: Implications for learning and teaching multidigit addition, subtraction, and place value. *Cognition and Instruction, 7*(4), 343-403.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned: Professional insights gained and shared by teachers of mathematics* (Doktorsavhandling, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession, Göteborgs universitet).

Kullberg, A., Runesson, U., Marton, F., Vikström, A., Nilsson, P., Mårtensson, P. & Häggström, J. (2016). Teaching one thing at a time or several things together? – teachers changing their way of handling the object of learning by being engaged in a theory-based professional learning community in mathematics and science. *Teachers and teaching: theory and practice, 22*(6), 1-15.

Lo, M. L. (2012). *Variation theory and the improvement of teaching and learning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F. & Pang, M. F. (2006). On Some Necessary Conditions of Learning. *The Journal of the Learning Sciences, 15*(2), 193–220.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). The Space of Learning. I F. Marton & A. B. M. Tsui (Red.), *Classroom discourse and the space of learning* (s. 3-40). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Myers, G. C. (1925). *The prevention and correction of errors in arithmetic.* Chicago: The Plymouth press.

Neuman, D. (1987). *The origin of arithmetic skills: a phenomenographic approach* (Doktorsavhandling, Göteborg universitet, Pedagogiska intuitionen).

Neuman, D. (2013). Att ändra arbetssätt och kultur inom den inledande aritmetikundervisningen. *Nordic Studies in Mathematics Education, 18*(2), 3–46.

Piaget, J. (1965). *The child´s conception of number.* New York: The Norton library.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist, 44*(2), 162-169.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* (Doktorsavhandling, Göteborg universitet, Pedagogiska intuitionen).

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Språkrådet. (2008). *Svenska skrivregler*. Stockholm: Liber.

Treacy, K., & Willis, S. (2003). A model of early number development. I L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Red.), *MERINO. Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity. Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, 2*, 674-681.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna* (Doktorsavhandling, Umeå universitet, Institutionen för naturvetenskapernas och matematikens didaktik).

Zhou, Z. & Peverly, S. T. (2005). Teaching addition and subtraction to first graders: a Chinese perspective. *Psychology in the Schools, 42*(3), 259-272.

Bilagor

Bilaga 1: Förtest

1. Lägg upp 10 knappar (5 och 5, som tärningsprickar)
   fråga " hur många är det?" kontrollera om eleven behöver räkna eller om eleven *ser* att det är 10.
   Be eleven ta bort 6 stycken, kontrollera om eleven räknar dem en och en eller om eleven på ett samlat sätt kan plocka bort rätt antal.
   Fråga "hur många är kvar? Kontrollera om eleven kan *se* antalet 4 som är kvar eller om eleven behöver räkna sig fram.

2. Lägg upp 9 knappar (5 och 4 som tärningsprickar)
   fråga " hur många är det?" kontrollera om eleven behöver räkna eller om eleven *ser* att det är 9.
   Be eleven ta bort 3 stycken, kontrollera om eleven räknar dem en och en eller om eleven på ett samlat sätt kan plocka bort rätt antal.
   Fråga "hur många är kvar? Kontrollera om eleven kan *se* antalet 6 som är kvar eller om eleven behöver räkna sig fram.

3. Lägg upp 8/9 knappar på rad. Fråga "Hur många knappar är det?" (eleven får räkna dem). Dra ihop dem synligt och sprid ut dem igen. Fråga "Hur många knappar är det?" kontrollera om eleven kan förstå att antalet inte har ändrats eller om eleven behöver räkna igen.

4. Säg att du har 8 knappar tillsammans i händerna. Visa eleven 3 knappar i en hand. Visa den andra handen sluten. Fråga "Hur många är det i den stängda handen?"

5. Låt eleven dela upp 7 knappar i två högar och se om eleven kan få fram alla tänkbara kombinationer. Förstår eleven att det inte behöver vara lika många på båda sidor? Hur många kombinationer kan eleven hitta genom att dela upp tal? Kan eleven se att de talen som är i de båda högarna blir en helhet igen om man lägger ihop dem igen?

6. Du har 7 äpplen i en korg och lägger 3 av äpplena på bordet. Hur många har du då kvar i korgen?

7. Du har 2 bollar i en hink, sedan kommer din kompis och lägger dit sina 4 bollar. Hur många bollar har ni tillsammans då?

8. Du har 7 bananer i en låda, du går och ställer lådan på bordet och går därifrån, när du kommer tillbaka finns det bara 5 bananer kvar. Hur många har försvunnit?

9. Du är i affären och handlar smågodis. Du handlar för 5 kr och har då 2 kr kvar i plånboken. Hur mycket pengar hade du från början?

10. Du har 7 kr och vill köpa en chokladbit som kostar 9 kr. Hur mycket saknas?

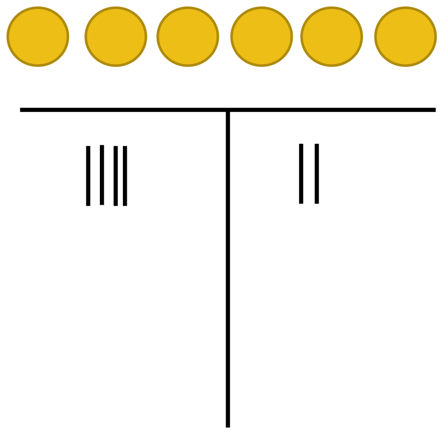
Bilaga 2: Lektionsplanering lektion 1

Inledning

Lektionen inleds genom en diskussion i helklass om vad en del är för något.

Moment 1:

KA: Urskilja att de två delarna ryms i den större helheten



Läraren ritar upp 6 kulor på tavlan och frågar om det går att dela kulorna i en hög med 6 kulor och en hög med 1 kula. Läraren frågar varför det inte går och hur talet kan delas istället. Elevernas förslag bokförs med hjälp av staket-tal och läraren förklarar tydligt hur bokföringen sker. Genom en inkorrekt delning ställs de rätta delarna i *kontrast* mot de felaktiga delarna och på så sätt synliggörs den kritiska aspekten.

Moment 2:

KA: Urskilja att de två delarna tillsammans är lika mycket som helheten

Läraren använder sig av tabellen, pekar på en delning och frågar vad de blir tillsammans. Läraren fortsätter på samma sätt med alla delningar. Genom att variera delarna men hålla helheten konstant (*separation*) kan eleverna urskilja att delarna tillsammans blir lika mycket som helheten.

Moment 3:

KA: Kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet

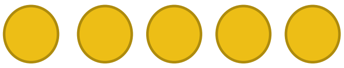
Läraren ritar upp 7 kulor och täcker över 5 med ett papper utan att eleverna få se hur många som täcktes. Läraren ritar upp ytterligare 7 kulor bredvid de första och täcker över 2 kulor istället utan att eleverna ser. Läraren frågar nu hur många kulor som saknas i de båda exemplen och ber eleverna förklara hur de tänker. Här varieras den del som täcks över men delarna och helheten är konstanta (*separation*).

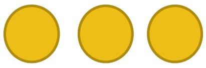
Moment 4:

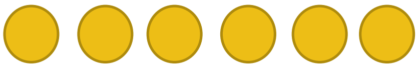
Arbetsblad

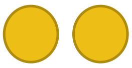
Eleverna får ett arbetsblad. Läraren förklarar att uppgiften handlar om 8 kulor som är uppdelade. En del syns och en del är gömd. Eleverna ska rita den del som saknas.

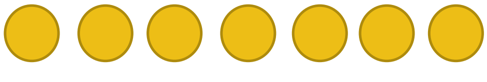
Namn: ____________________











Bilaga 3: Lektionsplanering lektion 2

Inledning

Återkoppling till förra lektionen. Eleverna får tänka efter på vad de gjorde förra lektionen och reflektera över om de lärde sig något nytt.

Moment 1

KA: Urskilja att de två delarna ryms i och tillsammans är lika mycket som helheten

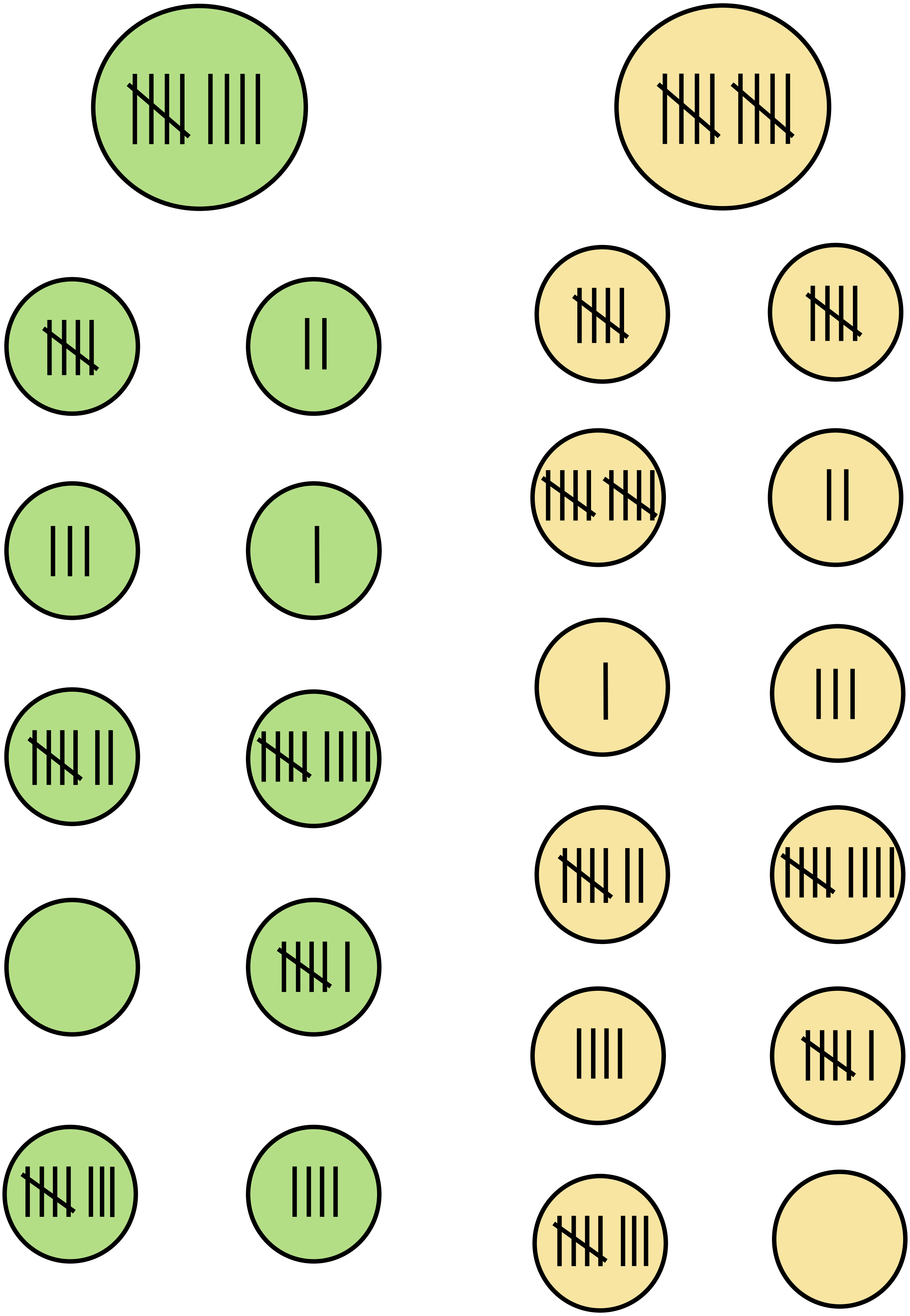
Läraren går igenom uppgiften på tavlan. En cirkel med talet 8 ritas upp på tavlan, i staket-tal. Därefter sätts fyra cirklar upp med en del till 8 i varje (6, 2, 5, 3, skrivet med staket-tal). Eleverna får fråga om 6 och 3 kan kombinerat som delar till talet 8. Eleverna får förklara varför det inte går. På tavlan ställs den korrekta kombinationen (6 och 2) upp över den felaktiga (sätt upp ytterligare en cirkel) för att visa på skillnaderna mellan dem, vilket innebär variationsmönstret *kontrast*. Genom övningen förekommer även *separation*, när eleverna separera de kritiska aspekterna.

Eleverna får utklippta cirklar med delar (med staket-tal) till helheten 9 och cirklar till helheten 10. Eleverna ska i par para ihop delarna och bokföra delarna på ett papper. Övningen är en *fusion*, där eleverna både ser att delarna ryms i helheten och att delarna tillsammans är lika mycket som helheten. Genom att använda två exempel av helheter blir det även en *generalisering*.

Moment 2

KA: Kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet

Läraren gör en genomgång. Eleverna får reda på en del (2) och helheten (4). De får uppmaningen att finna den okända delen. Därefter får de reda på samma som första gången (2) men en ny helhet (5). Så fortsätter övningen med samma första del (2) och en ökande helhet upp till talet 10. I övningen hålls en del konstant medans helheten och den andra delen varierar, vilket möjliggör variationsmönstret *separation*. Eleverna får genom övningen syn på att den okända delen ökar med samma antal som helheten ökar. Genom att gå igenom flera del-helhetsrelationer blir det även *generalisering*.

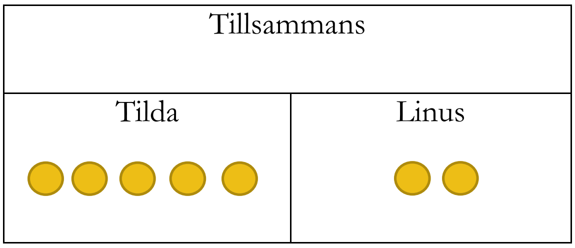


Bilaga 4: Lektionsplanering lektion 3

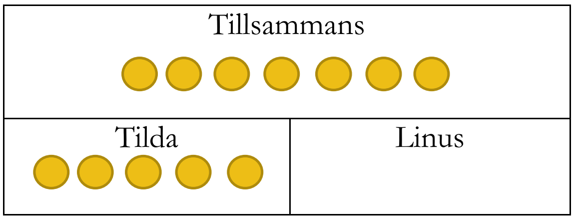
Moment 1

KA: Kunna ta hjälp av två tal i en relation mellan helhet och delar för att finna det tredje talet

Läraren har en genomgång av en kontextuppgift som ritas upp på tavlan. ”Tilda har 5 kulor och Linus har 2 kulor. Hur många har de tillsammans?” Eleverna får uppmaningen att förklara hur de tänker när de löser uppgiften. Hur gör de?



Sedan får eleverna en ny uppgift som ritas upp vid sidan av den första för att skapa *konstrast*. ”Tilda och Linus har tillsammans 7 kulor. Tilda har 5 kulor. Hur många kulor har Linus?” Eleverna får återigen uppmaningen att förklara hur de tänker när de löser uppgiften.



Eleverna får sedan i uppmaning att hitta likheter och skillnader mellan de två olika uppgifterna (i den första saknas hur många Tilda och Linus har tillsammans och i den andra saknas hur många Linus har). Genom att en aspekt hålls konstant (en del) och det andra varierar (synlig helhet eller del) möjliggörs *separation*.

Moment 2

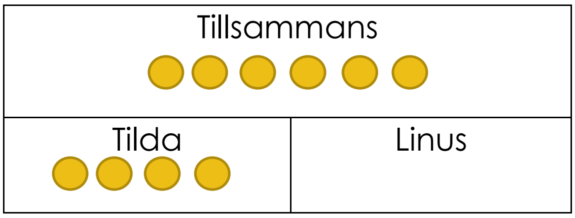
KA: Kunna ta hjälp av helheten och en del för att hitta den andra delen

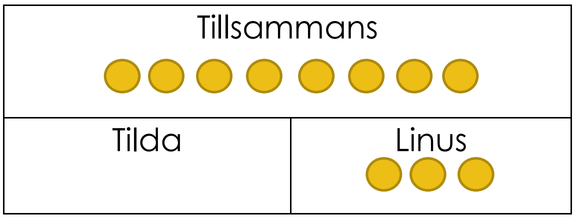
Läraren gör en genomgång. Eleverna får reda på en del (2) och helheten (4) som ritas upp på tavlan som kulor. De får uppmaningen att finna den okända delen. Därefter får de reda på samma som första gången (2) men en ny helhet (5) som också ritas upp som kulor. Så fortsätter övningen med samma första del (2) och en ökande helhet upp till talet 10, som skrivs upp på tavlan med stakettal (helheterna 6 och 7), tärningsprickar (helheterna 8 och 9) samt siffror (helheten 10). I övningen hålls en del konstant medans helheten och den andra delen varierar, vilket möjliggör variationsmönstret *separation*. Eleverna får genom övningen syn på att den okända delen ökar med samma antal som helheten ökar. Genom att gå igenom flera del-helhetsrelationer blir det även *generalisering*. Genom att variera representationsform möjliggörs ytterligare en *generalisering*.

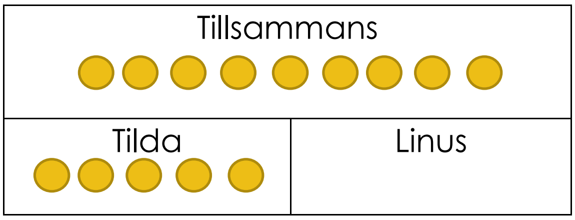
Moment 3

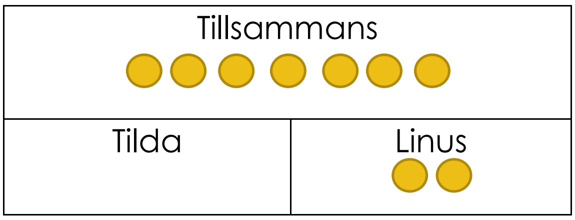
Eleverna får ett arbetsblad med uppgifter som bygger på den första genomgången. Läraren går tydligt igenom hur uppgifterna på arbetsbladet fungerar.

Namn:____


Tillsammans
Tilda
Linus


Tillsammans
Tilda
Linus


Tillsammans
Tilda
Linus


Tillsammans
Tilda
Linus

Bilaga 5: Eftertest

1. Visa att du har 7 knappar tillsammans i händerna. Visa eleven 3 knappar i en hand. Visa den andra handen sluten. ”Hur många är det i den stängda handen? Hur tänker du?”

   Visa eleven 5 knappar. ”Hur många är det i den stängda handen? Hur tänker du?”

2. Visa att du har 8 knappar tillsammans. Visa eleven 4 knappar. ”Hur många är det i den stängda handen?”

   Visa eleven 2 knappar. ”Hur många är det i den stängda handen? Hur tänker du?”

3. Visa att du har 6 knappar tillsammans i händerna. Håll båda händerna stängda. Låt eleverna gissa hur många knappar det kan vara i varje hand. ”Hur tänker du?”

4. Visa att du har 7 knappar tillsammans i händerna. Håll båda händerna stängda. Låt eleverna gissa hur många knappar det kan vara i varje hand. ”Hur tänker du?”

Bilaga 6: Resultat förtest

	Fråga 1		Fråga 2		Fråga 3		Fråga 4	
	10 knappar, ta bort 4, hur många kvar?		9 knappar, ta bort 3, hur många kvar?		Antalskonservation talet 9/8		8 knappar, visa 3, hur många göms?	
	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat
Elev 1	Räknar (ser 4)		Räknar (ser 3)			Måste räkna om	Räknar bort 8,7,6	
Elev 2	Ser (räknar 10)		Räknar (ser 3)		3:e försöket		Fingerräkning	
Elev 3	Ser (räknar 6)		Ser (räknar 9)		1:a försöket			Gissar 6
Elev 4	Ser (räknar 6)		Räknar		1:a försöket			Fingerräkning, 7
Elev 5	Räknar		Räknar			Räknar längre avstånd		Tror först 3, sen 2, sen 1
Elev 6	Räknar (ser 6)		Ser (räknar 9)		1:a försöket		Kan inte förklara	
Elev 7	Ser		Ser (räknar 6)		1:a försöket		Fingerräkning	
Elev 8	Ser		Ser		1:a försöket		Räknar bort 3	
Elev 9	Räknar (ser 5, 4)		Ser (räknar 6)		1:a försöket			Tror först 8, sen 6
Elev 10	Räknar		Räknar		2:a försöket			Gissar 7
Elev 11	Ser (räknar 10)		Ser (räknar 9)		1:a försöket		Fingerräkning	
Elev 12	Räknar		Räknar (ser 6)		2:a försöket			Gissar 7
Elev 13	Ser		Ser (räknar 9)		2:a försöket	Räknar längre avstånd		Gissar 8

	Fråga 5		Fråga 6		Fråga 7	
	Dela talet 7 på olika sätt		Kontext: 7-3=_		Kontext: 2+4=_	
	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat
Elev 1	3-4,7-0,6-1	Dela lika. Minns ej helheten	Räknar bort 7,6,5		4+2	
Elev 2	3-4,1-6,7-0,5-2,4-3	Minns ej helheten	Fingerräkning (ej korrekt)		Fingerräkning (ej korrekt)	
Elev 3	4-3, 6-1,0-7,2-5	Dela lika. Minns ej helheten	Fingerräkning		Fingerräkning (ej korrekt)	
Elev 4	3-4,4-3,5-2,2-5,6-1,1-6,0-7,7-0	Minns ej helheten		Finger-räkning, först 6 sen 10	Fingerräkning (ej korrekt)	
Elev 5	3-4,5-2,1-6,4-3,2-5,6-1	Dela lika. Minns ej helheten		Finger-räkning, 2	Fingerräkning (ej korrekt)	
Elev 6	3-4,2-5,1-6,4-3,5-2		Räknar bort 3		Huvudräkning	
Elev 7	4-3,2-5,1-6,6-1		Huvudräkning		Huvudräkning	
Elev 8	4-3,6-1,5-2			Huvud-räkning Först 5 sen 10 sen 3	Huvudräkning	
Elev 9	4-3,5-2,6-1	Dela lika.		7	Fingerräk-ning(ej kor-rekt)	
Elev 10	4-3,5-2,1-6	Minns ej hel-heten.	Fingerräkning (ej korrekt)		Fingerräkning (ej korrekt)	
Elev 11	3-4,1-6,2-5,6-1,5-2,4-3		Fingerräkning		Fingerräkning	
Elev 12	6-1,3-4,4-3,5-2,7-0,1-6	6-1 byter knapp	Knappar		2+2=4 4+2=6	
Elev 13	4-3,3-4,5-2,6-1,6-1,7-0,0-7,2-5	Minns ej helheten		Räknade, 6	2+4=6	

	Fråga 8		Fråga 9		Fråga 10	
	Kontext: 7-_=5		Kontext: _-5=2		Kontext: 7+_=9	
	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat
Elev 1	Räknar bort 7,6			5	Kan inte förklara	
Elev 2	Fingerräkning			Först 5 sen 3	Fingerräkning	
Elev 3	Fingerräkning			5	Fingerräkning	
Elev 4	Fingerräkning			5	Fingerräkning	
Elev 5	Fingerräkning			5		Fingerräkning, först 3 sen 4
Elev 6	Räknar bort 5			Kan inte	Huvudräkning	
Elev 7	Huvudräkning		Fingerräkning 5+2		Huvudräkning	
Elev 8	Huvudräkning			5	Huvudräkning, 2 mer	
Elev 9	Huvudräkning			5		9
Elev 10	Fingerräkning		Fingerräkning 5+2		Fingerräkning	
Elev 11	Fingerräkning		Fingerräkning 5+2		Huvudräkning	
Elev 12	Räknade upp (6,7)		Knappar		Räknade upp (8,9)	
Elev 13		Gissar 3		5	Huvudräkning	

Bilaga 7: Resultat eftertest

	Fråga 1		Fråga 2		Fråga 3	
	Sju totalt. Visa tre. Hur många okända?		Sju totalt. Visa fem. Hur många okända?		Åtta totalt. Visa fyra. Hur många okända?	
	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat
Elev 1	Räknar bort 7,6,5		Räknar bort 7,6,5,4,3		Räknar bort 8,7,6,5	
Elev 2	Utgår visuellt från helheten (såg de två ta-len i helheten)		Utgår från tidi-gare uppgift (1 mer/1 färre)		Fingerräkning (ej korrekt)	Gissar 6
Elev 3	Fingerräkning		Fingerräkning		Fingerräkning	
Elev 4	Utgår från me-morerad addit-ion (3+3)		Räknar upp		Fingerräkning	
Elev 5	Gissar		Utgår från me-morerad addit-ion (5+1)		Memorerad addition	
Elev 6	Huvudräkning	Tror först 3	Memorerad ad-dition		Fingerräkning	
Elev 7	Använder sam-bandet addit-ion-subtraktion (3+4=7, 7-3=4)		Räknar upp		Memorerad addition	
Elev 8	Utgår visuellt från helheten (såg de två ta-len i helheten)		Utgår visuellt från helheten (såg de två ta-len i helheten)		Memorerad addition	
Elev 9	Utgår visuellt från helheten (såg de två ta-len i helheten)		Utgår visuellt från helheten (såg de två ta-len i helheten)			Tror 5
Elev 10	Räknar upp		Memorerad ad-dition		Räknar upp	
Elev 11	Fingerräkning (ej korrekt)		Räknar upp		Fingerräkning	
Elev 12		Kan inte	Räknar upp		Räknar upp	
Elev 13	Gissar		Räknar upp		Räknar upp	

	Fråga 4		Fråga 5		Fråga 6	
	Åtta totalt. Visa två. Hur många okända?		Gissningslek. Sex totalt. Hur många kan det vara i varje hand?		Gissningslek. Sju totalt. Hur många kan det vara i varje hand?	
	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat	Klarat	Ej klarat
Elev 1	Räknar bort 8,7		3-3, 4-2	Ett fel: 3-2	7-0, 3-4	
Elev 2	Fingerräkning (ej korrekt)		3-3, 6-0, 5-1, 2-4	Två fel: 3-2, 2-5	5-2, 4-3	Två fel: 4-2, 1-5
Elev 3	Fingerräkning		3-3, 2-4		5-2, 3-4, 1-6	
Elev 4	Fingerräkning		3-3, 4-2		3-4, 5-2	
Elev 5		Tror först 5, sen 7	5-1, 2-4		7-0, 5-2, 1-6	Två fel: 4-2, 3-5
Elev 6	Fingerräkning		4-2, 3-3		7-0, 5-2, 4-3, 6-1	
Elev 7	Räknar upp		3-3, 4-2		4-3, 5-2, 6-1	Ett fel: 3-3
Elev 8	Utgår från tidigare uppgift (2 mer/2 färre)		3-3, 5-1, 4-2		4-3, 5-2, 6-1	
Elev 9		Tror först 7, sen 5, sen 7	3-3, 4-2	Ett fel: 4-4		Tre fel: 2-3, 4-5, 6-7
Elev 10		Tror först 5, sen 4	6-0, 3-3, 2-4		3-4.	
Elev 11	Räknar bort 8,7	Tror först 7	3-3, 1-5, 2-4	Ett fel: 1-4	4-3, 6-1	
Elev 12		Räknar upp fel (5)	3-3, 4-2 (med hjälp)	Ett fel: 4-4	6-1 (med hjälp)	Ett fel: 5-3
Elev 13	Räknar upp		3-3, 4-2		2-5, 3-4	Två fel: 2-7, 3-7