JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Multiplikativt tänkande

Olika strategier för beräkningar av uppgifter inom multiplikation och division

KURS: *Examensarbete II, F-3, 15 hp*
FÖRFATTARE: *Matilda Knutsmark*
EXAMINATOR: *Mikael Segolsson*
TERMIN: *VT16*

JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Examensarbete II, F-3, 15 hp
Grundlärarprogrammet med inriktning mot arbete i förskoleklass och grundskolans årskurs 1-3
VT16

SAMMANFATTNING

Matilda Knutsmark

Multiplikativt tänkande
Olika strategier för beräkningar av uppgifter inom multiplikation och division

Antal sidor: 30

Studien fokuserar på multiplikativt tänkande hos elever i årskurs 3. Multiplikativt tänkande är abstrakt (Clark & Kamii, 1996) och innebär användning av strategier för lösningar av multiplikations- och divisionsuppgifter. Syftet med studien är att undersöka hur elever använder sig av olika strategier inom multiplikativt tänkande vid multiplikation och division. Studien har inspirerats av *Grounded Theory*. Utifrån teorierna gjordes en semistrukturerad intervju, observationer samt en analys av data. I studien deltog åtta elever i intervjuerna och en pilotstudie inledde undersökningen. Materialet som samlades in bestod av elevernas lösningar av multiplikations- och divisionsuppgifter, anteckningar från observationer av elevernas lösningar samt ljudinspelade intervjuer. Resultatet visar att nästan alla elever använde sig av en additiv strategi i lösningar av multiplikations- och divisionsuppgifter. Det visade även att det endast var fyra av åtta elever som kunde uppvisa förståelse av ett samband mellan de två räknesätten. Resultatet visar att eleverna har olika strategier och lösningar inom multiplikativt tänkande även om de har haft samma matematikundervisning.

This study focuses on multiplicative thinking among pupils in grade 3. Multiplicative thinking is abstract (Clark & Kamii, 1996), involving applying strategies to solve multiplication and division tasks. The purpose of this study is to examine how pupils use different strategies within multiplicative thinking for multiplication and division. This study was inspired by *Grounded Theory*. From this theory, a number of semi-structured interviews, observations and analysis of data were made. Eight pupils participated in the interviews, after an initial pilot study. The collected material was based on the pupils' solutions of tasks in multiplication and division, notes from observations of the pupils' solutions and audiotaped interviews. The results show that almost every pupil uses an additive strategy in their solutions of multiplication and division tasks. It also show that only four out of eight pupils could show understanding of the connection between the two basic arithmetic operations. From the results, the pupils showed different strategies and solutions within multiplicative thinking, even though they have had the same mathematic education.

Sökord: *multiplikativt tänkande, multiplication, division, strategier*

Keywords: *multiplicative thinking*, *multiplication*, *division*, *strategies*

Innehållsförteckning

1. Inledning

Att kunna använda sig av olika strategier inom matematiken gynnar oss alla. Vi klarar inte vårt vardagliga liv utan matematik. Därför är matematik en viktig del av våra liv. Matematik ska hjälpa eleverna i skolan men även göra dem redo för att vara samhällsmedborgare (Skolverket, 2011). Strategier är inget som kommer naturligt, utan eleverna behöver lärares stöd för att utveckla dessa (Tobias & Andreasen, 2013). Det finns flera strategier för de fyra räknesätten och elever bör därför kunna hantera olika strategier. Strategier innebär, i denna studie, lösningar för att kunna lösa uppgifter. Dessa strategier kan delas upp i två huvudkategorier. En av dessa är additivt tänkande och den andra är multiplikativt tänkande. Denna studie kommer att fokusera på multiplikativt tänkande för att ta reda på hur elever i årskurs 3 löser multiplikations- och divisionsuppgifter. Det finns en brist i forskningsområdet om multiplikativt tänkande vilket gör att det saknas en bredare syn på tänkandet. Därför är det intressant att ta reda på mer om detta forskningsområde då matematik är en stor del av grundskoleåren. Strategier för att lösa multiplikations- och divisionsuppgifter ingår i det multiplikativa tänkandet och därför har en avgränsning gjorts mot dessa två räknesätt. Syftet med studien är att hitta vilka strategier som elever använder sig av, när de löser uppgifter inom multiplikation och division, och för att se om eleverna i årskurs 3 kan använda dessa räknesätt samt om de inser deras samband. I slutet av årskurs 3 ska eleverna kunna välja och resonera kring sitt val av strategi inom ämnet matematik (Skolverket, 2011).

Multiplikativt tänkande är ett abstrakt tänkande (Clark & Kamii, 1996) och det är intressant att göra denna undersökning, då jag i min kommande yrkesroll ska undervisa i matematik i de tidiga grundskoleåren. Eleverna ska i slutet av årskurs 3 kunna lösa multiplikations- och divisionsuppgifter samt förstå sambandet mellan dessa två (Skolverket, 2011). Därför är det av intresse att ta reda på hur elever i årskurs 3 löser multiplikations- och divisionsuppgifter samt om de förstår sambandet mellan dessa två räknesätt. Det är intressant att ta reda på detta då matematik anses vara ett svårt skolämne, enligt mig, och eftersom multiplikativt tänkande är en stor del av matematiken under elevernas hela grundskoletid. Därför intervjuades 8 elever i årkurs 3 genom en semistrukturerad intervju, de fick lösa matematikuppgifter samt gjordes en observation av elevernas lösningar.

2. Syfte och frågeställningar

Syftet med denna studie är att undersöka hur elever i årskurs 3 använder sig av olika strategier inom multiplikativt tänkande vid multiplikation och division.

Detta syfte uppfylls genom att besvara frågeställningarna:

- Hur använder elever olika strategier när de löser multiplikationsuppgifter?
- Hur använder elever olika strategier när de löser divisionsuppgifter?

3. Bakgrund

Multiplikativt tänkande är ett abstrakt tänkande (Clark & Kamii, 1996) och därför kommer bakgrunden att bestå av förklaringar kring detta begrepp samt om det additiva tänkandet. Abstrakt tänkande innebär att det uppfattas endast i tanken, då det inte går att visa konkret. En kort beskrivning av additivt tänkande görs för att möjliggöra en jämförelse med vad multiplikativt tänkande är och för att tydliggöra forskarnas åsikter om vad som karaktäriserar dessa två. Dessutom beskrivs kortfatat de vetenskapliga teorierna som har inspirerat upplägget av undersökningen.

3.1 Styrdokumenten

Skolan ska ansvara för att varje elev ska kunna använda sig av ett matematisk tänkande för vidare studier och i det vardagliga livet efter genomgången grundskola. Skolans ansvar är att eleverna blir en del av samhället och kan utföra välgrundade beslut i det vardagliga livet och i samhället utifrån kunskaper i matematik (Skolverket, 2011).

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att reflektera över valda strategier samt föra matematiska resonemang. I undervisningen ska eleverna få möta de fyra räknesättens egenskaper, samband och användning. I slutet av årskurs 3 ska eleverna ha godtagbara kunskaper i att välja och använda strategi med viss anpassning till problemet (Skolverket, 2011).

3.2 Multiplikativt tänkande

Elever har olika strategier för att lösa uppgifter inom matematik. När de har olika strategier för att lösa multiplikations- och divisionsuppgifter syftar forskare på att eleverna då har ett multiplikativt tänkande (Heiberg Solem, Alseth & Nordberg, 2011). För att elever ska lösa multiplikationsuppgifter med detta tänkande krävs det att eleverna har en abstrakt förmåga (Clark & Kamii, 1996). Eleverna visar att de har ett multiplikativt tänkande genom att de har förståelse av att talen i en operation, inom multiplikation och division, utgör en gemensam enhet (Drake, 2012).

För att eleverna ska lösa additions- och subtraktionsuppgifter behöver de ha ett additivt tänkande. När eleverna sedan ska lösa multiplikations- och divisionsuppgifter behöver de ha ett multiplikativt tänkande (Larsson, 2013). Därför är det av betydelse att skilja dessa två tankesätt åt och vilka strategier som ingår i vilket tankesätt. För att lösa multiplikationsuppgifter förekommer det ofta att eleverna använder sig av strategin *upprepad addition* (Van Dooren, De Brock & Verschaffel, 2010). Exempel på upprepad addition är 50+50+50=150 (Larsson, 2013). Upprepad addition kategoriseras som en del av multiplikativt tänkande, vilket då visar att additivt tänkande är nära relaterat med multiplikation och multiplikativt tänkande (Van Dooren, De Brock & Verschaffel, 2010). Larsson (2013) väljer att skilja på multiplikativt tänkande och additivt tänkande på så vis att om elever löser uppgifter med multiplikation eller division, är det multiplikativt tänkande. Om elever löser samma uppgift men med uträkning i form av upprepad addition, är det additivt tänkande (Larsson, 2013). Det krävs att eleverna har ett grundläggande och avancerat additivt tänkande för att kunna utveckla ett multiplikativt tänkande (Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder & Thompson, 1998). Elever behöver lärares hjälp för att utveckla sitt multiplikativa tänkande utifrån strategier från det additiva tänkandet (Tobias & Andreson, 2013).

I Figur 1 har nivåerna kategoriserats efter några forskares olika syn på de utvecklingsnivåer som finns inom det multiplikativa tänkandet. Det är intressant att ställa dessa mot varandra då forskarna inte har en enhetlig syn på vad multiplikativt tänkande är, då vissa forskare anser att upprepad addition är additivt tänkande. De är inte heller överens om vilka nivåer som utgör multiplikativt tänkande.

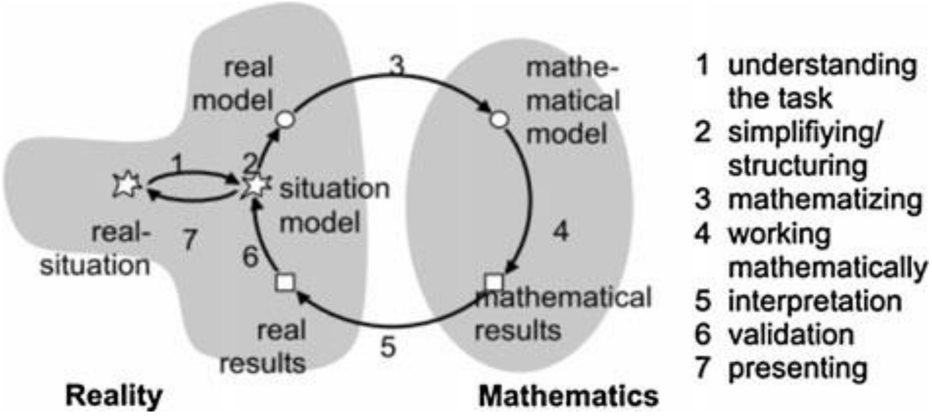
Författare	Mulligan & Mitchelmore (1997)	Carrier (2014)	Uhden, Karam, Pietrocola & Pospiech (2012)
Nivå 1	Konkret material	Elever chansar	Förstå uppgiften
Nivå 2	Upprepad addition	Additiv strategi	Strukturera uppgiften
Nivå 3	Multiplikativ operation	Multiplikativ strategi utan rätt svar	Matematisk beräkning med konkret material
Nivå 4		Multiplikativ strategi med rätt svar	(Matematisk modell)
Nivå 5		Proportionell strategi	(Lösa uppgiften)

Figur 1. Visar likheter och skillnader mellan forskarnas syn på olika utvecklingsnivåer av matematiskt tänkande och multiplikativt tänkande.

Mulligan och Mitchelmore (1997) beskriver att varje multiplikationsuppgift kan lösas med divisionsstrategier. Detta visar på hur viktigt det är att ha ett multiplikativt tänkande och en förståelse av sambandet mellan multiplikation och division. Utifrån sin studie kom Mulligan och Mitchelmore (1997) fram till 3 nivåer som visar på utveckling av multiplikativt tänkande (Figur 1). Nivå 1 innebär att elever använder sig av konkret material för att lösa uppgiften. Nivå 2 innebär att elever använder sig av upprepad addition och den sista nivån, nivå 3, innebär att elever använder sig av multiplikativ operation.

Carrier (2014) beskriver två typer av multiplikativt tänkande, där additiva strategier är en del av lösningen. Den första är att elever använder sig av upprepad addition för att lösa multiplikationsuppgifter. Det andra är att de använder sig av additiva strategier för att kunna lösa multiplikationsuppgifter. Eleverna har då ett multiplikativt tänkande eftersom de har en förståelse för siffrornas värde i operationen, även om det är en additiv strategi som används vid lösningen. Utifrån detta och genom studier kom Carrier (2014) fram till fem nivåer som visar utvecklingen av multiplikativt tänkande (Figur 1). På nivå 1 chansar elever på ett svar utan att utföra en uträkning. På nivå 2 använder elever en additiv strategi för att lösa uppgiften. På nivå 3 använder elever en multiplikativ strategi utan att komma fram till rätt svar och på nivå 4 använder elever en multiplikativ strategi men kommer då fram till rätt svar. Sista nivån, nivå 5, utmärks av att elever har en generell och överförbar strategi för att lösa uppgiften.

Uhden, Karam, Pietrocola och Pospiech (2012) beskriver sina nivåer utifrån en matematisk modell där en del av lösningen är att koppla uppgiften till sin verklighet (Figur 2). Det sker alltså en "översättning" från verkligheten till en matematisk utformad uppgift, vilket innebär en kognitiv tankeprocess.



Figur 2. Visar hur en matematisk modell ser ut med koppling till verkligheten (Blum and Leiß, 2005, refererad i Uhden, Karam, Pietrocola & Pospiech, 2012).

Utifrån modellen som visas i Figur 2 har Uhden, Karam, Pietrocola och Pospiech (2012) kommit fram till 5 nivåer som elever kan använda när de löser matematiska problem. Dessa nivåer utgör tillsammans en helhet av matematiskt tänkande. Nivå 1 innebär att eleverna först förstår uppgiften, sedan går de över till nivå 2, vilket innebär att de ska strukturera upp uppgiften, exempelvis vad det är som ska lösas i problemet. På nivå 3 ska eleverna kunna göra en matematisk beräkning med hjälp av konkret material, vilket sedan utvecklas till nivå 4, där eleverna ska välja en matematisk modell för att kunna lösa uppgiften. Nivå 5, den sista nivån, innebär att eleverna kan lösa uppgiften genom att de har kunskap om och förståelse av de föregående nivåerna.

Matematisk modellering och matematisk tänkande som Uhden, Karam, Pietrocola och Pospiech (2012) beskriver dem kan förenklas ner i de nivåer som åter finns i Figur 1 och kan därför användas som en del av denna studie. Nivå 1 till 3 är de som är intressanta för den åldern som studien utgår ifrån och därför står nivå 4 och 5 inom parenteser i Figur 1, högra kolumnen. Dessa nivåer är fortfarande intressanta att jämföra med de andra nivåerna, även om de främst avser matematisk modellering. Det är av intresse för studien då eleverna måste genomföra nivå 1 och 2 för att kunna lösa de uppgifter som eleverna i studien ska besvara.

Studien görs för att ta reda på om de valda eleverna har ett multiplikativt tänkande och multiplikativa strategier för att lösa multiplikations- och divisionsuppgifter. Nivåerna i Figur 1 finns med för att visa att det finns olika nivåer inom multiplikativt tänkande. Multiplikativt tänkande är något som behövs för att kunna lösa mer abstrakta uppgifter och är en grund för studier i matematik i senare årskurser. I de senare åren möter elever ekvationer som inte kan visas med konkret material då uppgifterna är abstrakta.

3.3 Teorier

Studien är inspirerad av *Grounded Theory*, där studiens fokus är på hur eleverna tillämpar multiplikativt tänkande inom multiplikations- och divisionsuppgifter. *Grounded Theory* innebär att de som inspireras av denna kodar data i samband med att den samlas in. Genom att bryta ner data så kan dessa delas in i olika kategorier, vilket kan ses som kodning. Detta görs strax efter att material har samlats in eftersom kodningen sker i samband med insamlingen. Under insamlingen av data och kodningen av dessa kan vissa hypoteser/antaganden göras. Det innebär att det kan göras vissa aningar om relationer mellan de begrepp som kommer fram i kategoriseringen (Bryman, 2011).

Grounded Theory innebär att det som händer sker i den insamlade datans fas, vilket tyder på ett induktivt arbetssätt. Men forskare hittar olika förklaringar till svaret eller beteendet som respondenten har visat på vilket är ett deduktivt arbetssätt. *Grounded Theory* kan beskrivas genom olika steg och första steget är att datainsamling sker med syfte att samla information om ämnet. I andra steget görs en förklaring av svaret så att vidare frågor kan ställas. I det tredje steget intervjuas de deltagare som kan svara de frågor som uppkom i andra steget. I fjärde steget och femte steget kan göras som beskrivs i andra och tredje steget. Sista steget är att teorin stöttad och att stöds av delagarnas svar (Harris, 2015).

Bryman (2011) beskriver att tillämpningen av *Grounded Theory* sker i vissa steg. I steg 1 börjar forskaren med en frågeställning eller beskrivning av problemområdet. I steg 2 väljs relevanta personer ut. I steg 3 samlas data in och i steg 4 kodas data. I steg 5 jämförs data och begrepp, vilket leder till att det genereras kategorier och i steg 6 mättas kategorierna under kodning. I steg 7 utforskas relationerna mellan kategorierna. Bryman (2011) beskriver fler steg inom *Grounded Theory*, men för denna studie är endast dessa sju steg relevanta. I steg 1 började jag med att beskriva mitt problemområde och frågeställningar. I steg 2 valde jag de elever som skulle delta i studien. Steg 3 gjordes genom intervjuer, insamling av elevernas lösningar av matematikuppgifter och observationer som sedan i steg 4 kodades. Steg 5 genomfördes genom att jämföra insamlat material för att hitta likheter och skillnader som kunde kategoriseras. I steg 6 mättas dessa kategorier. Sedan i steg 7 gjordes en jämförelse mellan kategorierna och relationen mellan dessa utforskades.

Eftersom studien har inspirerats av *Grounded Theory*, kategoriseras elevernas svar, efter analysen, i de strategier som eleverna använde i sina lösningar. För att det ska bli tydligt vilka nivåer som ingår i det multiplikativa tänkandet används Figur 1 som stöd i studien. Figur 1 används endast som stöd och inte som färdiga kategorier till studiens resultat. De begrepp som kom fram genom elevernas lösningar ställs i relation till de strategier som eleverna visade.

4. Metod och material

Detta kapitel kommer att presentera studiens urvalskriterier, hur studien har genomförts och hur materialet analyserades. Utgångspunkten för studien var de teorier som beskrivs i avsnitt 3.3.

4.1 Metod och materialinsamling

Innan studien genomfördes förklarades syftet med studien för eleverna, varför de kommer att bli intervjuade och hur det skulle gå till. Eleverna tillsammans med vårdnadshavare bestämde om de ville delta i intervjuerna, och två elever valde att tacka nej. Eleverna blev informerade om att uppgifterna endast skulle innehålla multiplikation och division. Det fanns tid för eleverna att ställa frågor om intervjun och de blev tydligt informerade både innan och under intervjun att ljudinspelning skulle ske. Elever och vårdnadshavare fick hem ett brev (Se Bilaga 2), där både elev och vårdnadshavare fick ge sitt samtycke till intervjun. Eleverna fick vara delaktiga i beslutet, för att de skulle känna sig trygga med att bli intervjuade och att få lösa matematikuppgifter.

För att åstadkomma en hög grad av validitet (Se avsnitt 4.5) inleddes studien med en pilotstudie, för att se om frågorna i intervjun var relevanta och inte riskerade att misstolkas av eleverna som medverkade i studien. I studien har jag intervjuat eleverna utifrån en semistrukturerad intervju. Bryman (2011) förklarar att i en semistrukturerad intervju finns det några öppna frågor, det kan tillkomma nya frågor och det kan ställas följdfrågor. För att förstå hur eleverna tänkt valdes denna struktur, eftersom det fanns möjlighet att lägga till frågor och ställa följdfrågor utifrån elevernas muntliga och skriftliga svar.

4.2 Genomförande

Studien genomfördes först genom att eleverna fick lösa uppgifter (Bilaga 1). Under tiden som eleverna löste uppgifter gjordes observationer av mig, som antecknades. Efter det intervjuades eleverna utifrån deras lösningar. Dessa tillfällen skedde en och en i ett grupprum på elevernas skola. Intervjuerna genomfördes på elevernas skola under mars och april månad, 2016. Elevernas lösningar av uppgifterna samlades in och under tiden de löste uppgifterna fördes anteckningar över gjorda observationer. Observationer gjordes för att få in mer material om hur eleverna tänkt och för att det skulle vara lättare att förstå lösningarna i efterhand. När observationerna gjordes, upptäcktes det att flera elever suddade ut sina tankesätt/lösningar, vilka nu alltså finns antecknade av mig. På så vis har validiteten (se avsnitt 4.5) i undersökningen kunnat höjas. Efter observationerna gjordes intervjuer baserade på elevernas lösningar för att kunna ställa följdfrågor. För att höja validiteten i denna studie gjordes både observationer och intervjuer för att tolka elevernas svar på ett korrekt sätt. Frågor ställdes för att elever kan ha svårigheter att skriva ner sina tankar och lösningar. Genom en intervju fick eleverna chansen att berätta hur de hade gjort och tänkt för att lösa uppgifterna.

4.3 Analys

När alla intervjuer och observationer var genomförda gjordes en analys. Analysen gav tre kategorier utifrån den insamlade datan. Från intervjuerna och observationerna kunde dessa tre kategorier urskiljas:

- Eleverna använde additivt strategi när de löste multiplikationsuppgifter.
- Eleverna använde en annan strategi.
- Eleverna verkade förstå sambandet mellan multiplikation och division.

4.4 Urval

I studien var det åtta elever som intervjuades och urvalet som gjordes gick ut på att eleverna skulle gå i årskurs 3, för att de skulle ha mött både multiplikation och division i matematikundervisningen. Elva elever tillfrågades om intervju, en användes till pilotstudien, två ville inte delta och åtta elever valde att delta i studien. Ett kriterium som jag hade vid urvalet av elever var att jag skulle känna eleverna för att på så vis ha en god relation till dem, när intervjuerna gjordes, så att de skulle känna sig säkra och att jag skulle förstå deras språk och uttryck och vice versa. Det är viktigt att vi förstår varandra för att få ett så korrekt svar som möjligt. I studien valde jag därför att intervjua de elever som jag hade på min verksamhetsförlagda utbildningsperiod under vårterminen 2016. Jag valde att inte ha en koppling till deras matematikundervisning, för att inte kunna påverka dem innan intervjuerna gjordes. Hade jag varit del av deras matematikundervisning hade jag kunnat påverka dem omedvetet vilket hade kunnat påverka studiens resultat.

De kriterier som uppställdes för uppgifterna som eleverna skulle lösa var att de skulle vara tillräckligt svåra, så att eleverna inte bara skulle ”se” svaret utan de skulle behöva använda någon strategi för att lösa dem.

Kriterier för uppgifterna i undersökningen var att:

- Multiplikations- och divisionsuppgifterna skulle innehålla svårare uppgifter än vad eleverna möter i den dagliga matematikundervisningen.
- Två öppna frågor skulle finnas, där eleverna kunde använda både multiplikation och division i lösningen.

Uppgifterna bestod av tre multiplikationsuppgifter, tre divisionsuppgifter och slutligen två öppna frågor, där lösningen kunde bestå av både multiplikation och division (Se Bilaga 1). Frågorna inspirerades av elevernas matematikböcker för att de skulle vara svårare än de som eleverna möter i undervisningen. Frågorna är utformade på detta sätt för att frågeställningarna skulle kunna besvaras genom att eleverna fick redovisa strategier som de använder när de löser multiplikations- och divisionsuppgifter. Eleverna fick även frågan om de kunde lösa de öppna frågorna på ett annat sätt än vad de redan hade gjort. Genom de öppna frågorna såg jag om de förstod sambandet mellan multiplikation och division, eftersom de kunde lösa uppgifterna med olika strategier. Det ställdes även frågor på de sista två uppgifterna, om eleverna kunde lösa uppgifterna på andra sätt, vilket då gav dem möjlighet att visa på sambandet mellan dessa två räknesätt.

4.5 Validitet och reliabilitet

Validitet betyder trovärdighet, vilket innebär att det är ett mått för att se, om undersökningen mäter det som är syftet att mäta (Bryman, 2011). Trovärdighet skapas genom att studien följer de regler som finns samt att resultaten rapporteras på ett korrekt sätt. En hög grad av validitet fås genom att använda en pilotstudie. Detta görs för att missuppfattningar av frågor och uppgifter ska undvikas. Hög validitet fås även genom att utgå ifrån frågeställningarna i resultatredovisningen, då direkta svar på frågeställningarna erhålls. Även uppföljningsfrågor för att undersöka om frågor missuppfattas, är en åtgärd för att höja validiteten.

Reliabilitet betyder pålitlighet, vilket är ett mått på mätningarnas och måttens pålitlighet. Pålitligheten i en studie bedöms utifrån om forskaren har ett granskande synsätt, då det krävs för att undersökningen ska vara tillförlitlig. För att testa reliabiliteten kan en undersökning och återföljande observationer göras. Vid ett senare tillfälle kan forskaren låta samma grupp göra om testet ytterligare en gång och sedan jämföra resultaten av undersökningarna. God reliabilitet innebär att om andra forskare upprepar studien, eller om den utförs vid en senare tidpunkt, ska samma resultat erhållas (Bryman, 2011). Dessa två begrepp kommer att diskuteras mer i metoddiskussionen i kapitel 6.

4.6 Etiska övervägande

Svensk forskning ska följa fyra etiska principer som rör frivillighet, konfidentialitet, integritet och anonymitet, för de som är inblandade i forskningen (Bryman, 2011). En av de fyra etiska principerna är *informationskravet,* vilket innebär att forskaren ska informera berörda personer om undersökningens syfte. De ska också få veta att det kan välja att avbryta sitt deltagande och att det är frivilligt samt att de ska vara informerade om vilka moment som ingår i undersökningen. En annan princip är *samtyckeskravet,* vilket innebär att deltagaren har rätt att själv bestämma över sin medverkan i undersökningen och när det gäller minderåriga krävs godkännande av vårdnadshavare. *Konfidentialitetskravet* är en annan princip, som innebär att de uppgifter om personerna som medverkar i undersökningen ska vara konfidentiella och inga obehöriga ska kunna ha tillgång till uppgifterna. Den sista principen är *nyttjandekravet,* vilket innebär att uppgifter om personerna som ingår i undersökningen endast får användas till forskningsändamålet (Bryman, 2011).

Dessa används i studien genom att eleverna fick reda på studiens syfte, hur den skulle genomföras samt att de alltid hade möjlighet att avbryta sin medverkan. Detta gjordes genom samtal med eleverna flera gånger innan studien genomfördes. Efter det skickade jag ut information till föräldrar och elever där de skulle godkänna om de ville delta i studien (Se Bilaga 2). Eleverna fick tillsammans med vårdnadshavare bestämma om de ville delta i studien, vilket visade att två elever inte ville delta, även om jag hade föräldrarnas godkännande. Dessa två elever deltog inte i studien. Alla uppgifter om eleverna är konfidentiella och det är endast jag som har tillgång till elevernas uppgifter.

5. Resultat

I detta avsnitt kommer resultatet från intervjuerna och observationerna att presenteras. Det var åtta elever som var delaktiga i intervjuerna och observationer gjordes när de löste uppgifterna. Uppgifterna kan ses i Bilaga 1 där även intervjufrågorna står med. Resultatet diskuteras utifrån frågeställningarna och i kapitel 6.2 kommer det att diskuteras vidare. Resultatet består av elevernas lösningar, ibland i form av bilder samt delar av intervjuerna. I intervjun är *I* en förkortning för intervjuaren och *E* följt av en siffra står för vilken elev som intervjuades. Vid analysen av materialet kunde kategorier urskiljas, dessa bestod av olika strategier som eleverna använder vid multplikativt tänkande. Kategorierna är ett resultat av *Grounded Theory*, som arbetet har inspirerats av. Kategorierna skapades av det insamlade materialet och det fanns inga kategorier innan data samlades in.

Avsnittet är indelat efter de kategorier som uppkom av analysen. Forskningsfrågorna svaras därför inte på ett tydligt sätt för att multiplikation och division är två räknesätt som ligger nära varandra inom matematiken. Resultatet visade att vissa elever förklarar multiplikation med division och förklarar division med multiplikation. Resultatet gav även att en stor del av eleverna använder additiv strategi för att lösa både multiplikation och division vilket gör att det är en kategori.

5.1 Additiv strategi

Additiv strategi och upprepad addition är nivå 2 i Figur 1. Carrier (2014) och Mulligan och Mitchelmore (1997) ser detta som en del av multiplikativt tänkande. Additiv strategi syftar till att eleverna valde att använda upprepad addition när de löste uppgifterna. Elev 1 uppvisade upprepad addition i lösningarna av deluppgifterna i uppgift 1. Elev 1 sa ” jag tog sju åtta gånger” vilket är upprepad addition, då sjuan adderas åtta gånger.

Under intervjun förklarade Elev 2 att hen löste uppgift 2 genom att tänka 7+7+7+7=28, vilket gör att sjuan har räknats fyra gånger och därför är $\frac{28}{7}$ =4. Elev 2 ser ett samband mellan siffrorna som används i upprepad addition och i division. När upprepningen av talet i nämnaren har gjorts tills det blir lika med talet i täljaren ser Elev 2 att svaret är lika med antalet gånger som nämnaren har räknats. Denna strategi med upprepad addition var den som Elev 2 använde för att lösa deluppgifterna i uppgift 2. Elev 2 valde att lösa även uppgifterna 3 och 4 genom upprepad addition.

Elev 4 använde upprepad addition för att lösa deluppgifterna i uppgift 2 samt i lösningarna av uppgifterna 3 och 4. Under intervjun framkom det att Elev 5 löste uppgift 1 med strategin upprepad addition, där hen räknade deluppgift 7×8 genom att räkna siffran sju åtta gånger. Eleven svarade att denna strategi var lättast när multiplikationsuppgifter skulle lösas.

För att lösa uppgift 1 använde sig Elev 6 av upprepad addition genom att skriva 6, 12, 18, 24, 30, 36 för att lösa uppgiften 6×6. Eleven använde detta räknesätt vid lösningar av alla multiplikationsuppgifter, vilket framgick under intervjun. I uppgift 2 kunde Elev 6 se sambandet mellan multiplikation och division, även om hen inte kunde förklara det. Eleven svarade att $\frac{25}{5}$=5 för att $5 \times 5 = 25$, vilket även observerades, genom att eleven skrev upp multiplikation som lösning av divisionsuppgiften. Under intervjun förklarade eleven att hen hade tagit 5 i taget tills hen var uppe i 25, alltså 5, 10, 15, 20, 25 och insåg då att det var fem ”steg” som hade räknats. Här användes strategin upprepad addition i lösningen. Därför kategoriserar jag detta som upprepad addition.

I: En etta. Mm. Och sen här nere på uppgift 2. Där har du skrivit att 25 delat på 5 är lika med 5.
E6: Mm.
I: Hur visste du det? *paus* Eller hur kom du fram till det?
E6: 5 gånger 5 är 25.
I: Du vet att 5 gånger 5 är 25.
E6: Mm.
I: Mm. Hur vet du att du kan använda multiplikation där alltså 5 gånger 5 är 25 för att veta divisionen?
E6: Eh för att det dom hör ihop lite.
I: Dom hör ihop lite.
E6: Mm.
I: Kan du förklara det mer?
E6: Eh där står det 25 (pekar på division)
I: Aa.
E6: Och där börjar man med 25, 5 gånger 5.

För att lösa uppgift 1 använde sig Elev 7 av upprepad addition genom att exempelvis skriva ut sju stycken åttor för att sedan räkna ihop dem (Se Bild 1). Elevens lösning är inte korrekt, utan det är lösningen som är intressant.

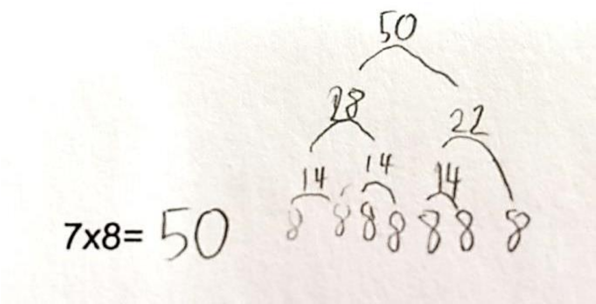


Bild 1. Visar hur Elev 7 har räknat ut en av multiplikationsuppgifterna.

Under intervjun förklarade Elev 8 att hen använde division i lösningarna av uppgifterna 2, 3 och 4 och för att lösa dessa använde sig hen av upprepad addition. Eleven testade även olika alternativ i de uppgifter som hen var osäker på men det var fortfarande strategin upprepad addition som användes. Samma strategi användes i lösningarna av uppgifterna 3 och 4, vilket framkom under intervjun.

I: Mm. Och här nere har vi ju division uppgift 2.
E8: Mm.
I: Där har du skrivit att 25 delat på 5 är lika med 5. Hur visste du att det skulle vara en femma där?
E8: Jag räknade 5 gånger.
I: Hur räknade du 5 gånger? *paus* Tog du 5?
E8: Mm sen 10…
I: Försök förklara.
E8: Eh… Jag började med 5 sen tog jag 10, 15, 20, 25. Och då var det 5.
I: Så du hade räknat det 5 gånger?
E8: Mm.

5.2 Multiplikation i samband med division

Under observationen visade Elev 1 en förståelse av sambandet mellan multiplikation och division i lösningarna som hör till uppgift 2, vilket framgår av Bild 2. Här har eleven visat att hen vet att division kan förklaras med multiplikation och under intervjun förklarade eleven att hen tänkte att ”något gånger fem ska bli 25”, svaret blev då fem. Lösningarna till varje deluppgift i uppgift 2 förklarade eleven med att multiplikation har ett samband med division. Elev 1 skiljer sig ifrån Elev 6 (se sidan 14) för att eleven ser detta som en multiplikation vilket inte Elev 6 gjorde.

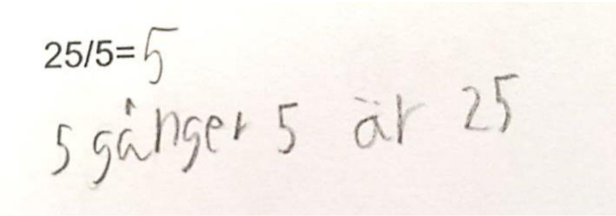


Bild 2. Visar hur Elev 1 kunde visa upp en förståelse av sambandet mellan multiplikation och division under lösningen av uppgift 2.

I elevens lösning till uppgift 3 valde eleven att rita ut åtta stora ringar, där hen sedan placerade en liten ring i taget i de stora ringarna, tills eleven hade kommit upp till 40 stycken små ringar. Eleven förklarade först sin lösning med multiplikation, vilket framgår av Bild 3 och ritade sedan dit ringar.

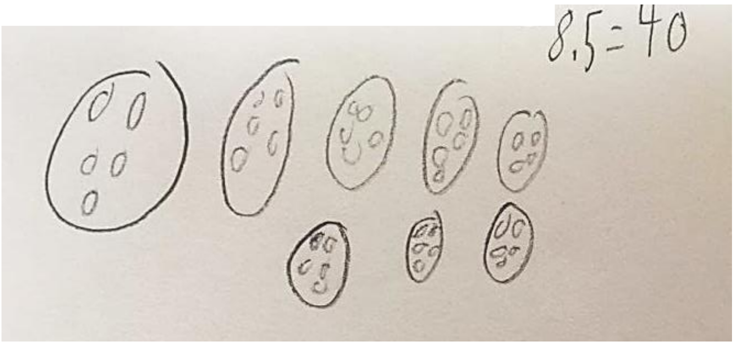


Bild 3. Visar hur Elev 1 ritade ut sina ringar för att lösa uppgift 3.

Här under är ett utdrag från intervjun där eleven förklarar hur hen tänkte vid lösningen av uppgift 3, vilket framgår av Bild 3.

I: Mm. Om du vänder på sidan *liten paus* hur gjorde du för att lösa uppgift 3?
E1: Mm, de var åtta stycken.
I: Aa.
E1: Och så tog jag… eller jag räknade hur många de skulle få.
I: Mm, hur mycket blev det?
E1: 5.
I: 5 var?
E1: Mm.
I: Mm. När du räknade ut det i huvudet först. Hur gjorde du då? *paus*
Hur… Tog du då i huvudet när du räknade ut det?
lång paus (50 sekunder)
I: För du skrev ju åtta gånger 5 först är lika med 40 innan du målade.
E1: Ja.
I: Mm. Hur gjorde du för att veta att det skulle vara just åtta gånger fem.
E1: Em, jag tänker nog åtta stycken…
I: De var åtta stycken?
E1: Åtta stycken så 40 gånger för att det skulle räcka till alla eller så blir det (pekar på pappret).

Under intervjun framgick det även att Elev 1 visste att hen kunde ha löst uppgift 3 genom division istället för multiplikation, som eleven valde att använda som strategi. Under observationen vid lösningen av uppgift 4 började eleven att skriva upp lösningen som division. Elev 1 såg direkt att hen kunde rita ut fyra stycken tior i fyra olika högar. Efter det ritade eleven ut enkronor för att summan i de fyra högarna skulle bli 48. Detta gjorde att svaret blev 12 och av Bild 4 framgår elevens lösning. Under intervjun framgick det att eleven visste att någonting gånger fyra skulle bli 48 och det visar att eleven ser ett samband mellan division och multiplikation då hen använder sambandet för att förklara sin strategi.

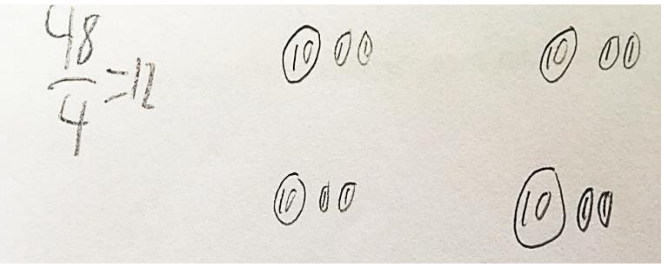


Bild 4. Visar hur Elev 1 löste uppgift 4.

Elev 5 löste uppgift 2 med säkerhet och under intervjun framgick det att eleven förstod att det förekommer ett samband mellan division och multiplikation.

E5: Eh jag… jag räknade ut 5, 5, 5… 5 gånger 5 är 25 och därför tänkte jag att det skulle vara 5.
I: Okej. Och sen på nästa uppgift, 28 delat på 7 är 4.
E5: Då gjorde jag samma sak fast 7 gånger 4.

Under observationen av Elevs 5 lösning av uppgift 3 framgick att hen skrev upp både divisions- och multiplikationsstrategier (Se Bild 5). Eleven försökte förklara sambandet under intervjun genom att peka och prata om att samma siffror förkom i båda algoritmerna. Eleven såg både talet 40 och talet sju och eftersom hen visste att $7 \times 4 = 40$, även om det inte stämmer, var det alltså därför som $\frac{40}{7}$=4. Eleven såg ett samband mellan siffrorna i multiplikation och division.

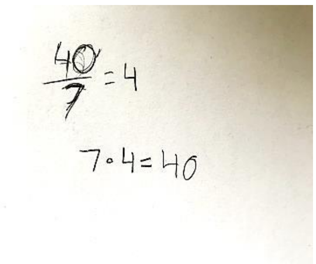


Bild 5. Visar Elevs 5 lösning av uppgift 3, där både multiplikation och division användes.

Under intervjun förklarade Elev 6 att hen hade löst uppgift 4 genom att ställa upp uppgiften i en division. I intervjun förklarade eleven att hen hade kunnat lösa samma uppgift fast med multiplikation genom att ”fyra gånger någonting ska bli 48”. Detta visar också att eleven ser ett samband mellan multiplikation och division fast hen inte kan förklara hur.

Elev 7 visade att det finns ett samband mellan multiplikation och division genom att lösningarna av uppgifterna 3 och 4 förklarades med multiplikation och division i förhållande till varandra. Eleven kunde inte förklara sambandet mer än att om division användes var det andra alternativet multiplikation.

5.3 Andra strategier

Vid lösningen av uppgift 2 ritade Elev 3 ut streck i olika högar, exempelvis löstes uppgiften $\frac{25}{5}$, genom att börja dra streck i fem högar tills hen kom upp i siffran 25 (Se Bild 6).

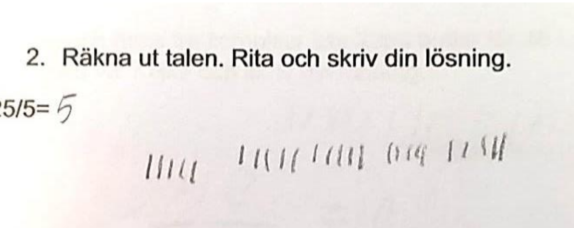


Bild 6. Visar hur Elev 3 ritade upp strecken i olika högar för att lösa uppgift 2.

Detta var en återkommande strategi som Elev 3 använde vid lösningarna av uppgifterna 3 och 4. Elevens resonemang, under intervjun, var att hen tänkte att *konkret material* behövdes och när det inte fanns, löste eleven det genom att dra streck, Denna strategi har ett samband med en additiv strategi, men eftersom eleven inte använde strategin som en additiv strategi, kategoriseras den som en annan strategi. Elevens resonemang var att räkna ett streck i taget, vilket inte kategoriseras i upprepad addition som exempelvis Elev 8 har gjort på sidan 15. En intervjufråga var om Elev 3 visste om hen kunde lösa uppgifterna 3 och 4 med en annan strategi och eleven var helt säker på att det inte gick. Utifrån intervjun tyder detta på att eleven inte ser något samband mellan multiplikation och division. Under intervjun framgick det även att den strategi som Elev 3 hade kunnat tillämpa var att använda ”pluppisar”, vilket innebar samma strategi som eleven använde under intervjutillfället med att dra streck. Intervjun går att se här nedan och lärarens namn är utbytt för att studien ska följa *Konfidentialitetskravet* (Se kap. 4.6).

I: Till 40. Hade du kunnat lösa den här uppgiften på ett annat sätt? *paus* Än så du har gjort?
E3: Aa. Eller… Vi brukar få ha pluppisar.
I: Pluppisar.
E3: Ja, så…
I: Vad är pluppisar för något? *paus* Är det små pluppar?
E3: Ja som man sätter på varandra.
I: Okej.
E3: Så gör man så. Så brukar vi ha på lektionen eller på matten.
I: När ni har matte? Så då hade du kunnat använda dom egentligen, när du löste den uppgiften.
E3: Alltså så säger [Eva] att om man inte har dom kan man rita såhär.
I: Så kan man göra så ja. *paus* Hade du kunnat lösa uppgiften om du inte hade gjort division på den här uppgiften, hur hade du då kunnat göra? *paus* Vet du det? *paus*
E3: *skakar på huvudet*

Under intervjun med Elev 4 ändrade hen svaret på deluppgiften 7×8 i uppgift 1 flera gånger. Till slut kom eleven fram till svaret 75 utifrån att från 6×6 till 7×8 ökade det med tiotal och femtal. Elev 4 kunde själv inte ge någon förklaring till sitt svar. Under observationen av lösningen till uppgift 2 framgick det att Elev 4 kunde använda olika strategier för att lösa deluppgifterna (Se Bild 6). Elev 4 använde *tidigare kunskap* som att $4 \times 5 = 20$ för att kunna veta vad $\frac{25}{5}$ är.

I: Okej. Mm. Då vet jag hur du tänkte. Och här skrev du att 25 delat på 5 är lika med 5. Hur gjorde du här för att räkna ut det?
E4: 4 gånger 5 är 20 och så tog man plus 5 så blir det 25.

Sedan använde Elev 4 även upprepad addition där 6+6+6=18 vilket då motsvarar $\frac{18}{3}$ (Se Bild 7). Eleven visade även under intervjun att hen förstod sambandet mellan multiplikation och division genom att svara med multiplikation på två deluppgifter i uppgift 2, som innehöll division.

I: På 28 delat på 7 är 4. Hur visste du att du skulle ta 4?
E4: För att 4 gånger 7 så ska det stå. 7 nej för att 4 gånger 7 är 14… eller om man tar 7 4 gånger så blir det 28.
I: Så blir det 28? Okej. Och här nere skrev du något annat. 6 plus 6 plus 6 är lika med 18. Var det så du kom fram till… Hur visste du att du skulle använda siffran 6 där? Att det var 6 plus 6 plus 6?
E4: För att det är 6 plus 3 eller 6 gånger 3 är…
I: 6 gånger 3 är…
E4: 18.

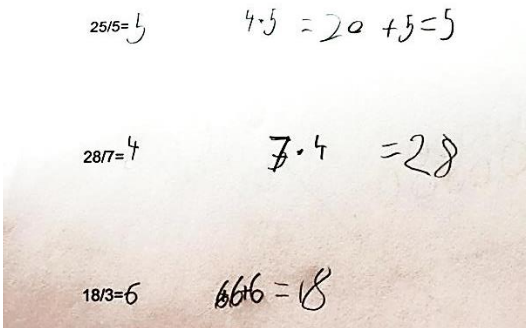


Bild 7. Visar lösningar av Elev 4 till uppgift 2.

Under intervjun sa Elev 5 att för att lösa uppgift 4 användes en algoritm, vilket innebär att eleven använde sig av strategin upprepad addition (Se Bild 8). Eleven har tolkat uppgiften fel men förstod att uppgiften byggde på fyra personer. Eleven har dock tolkat uppgiften att de ska betala 48 kr var och inte att de ska betala 48 kr tillsammans. Elev 5 har inte räknat ut algoritmen korrekt, men visar på en förståelse av hur en den används. Eleven sa att uppgift 4 kunde beräknas med multiplikation, men kunde inte förklara hur.

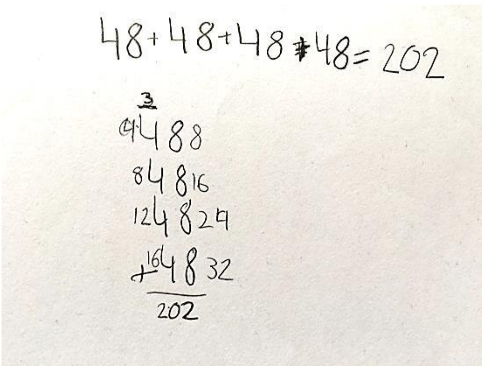


Bild 8. Visar hur Elev 5 löste uppgift 4.

Elev 6 skrev upp en division vid lösningen av uppgift 3 och sedan när hen skulle lösa uppgiften kände eleven att hen hade för lite kunskap om åttans ”gångertabell”. Detta gjorde att eleven ritade upp 40 stycken prickar, efter det provade eleven att dela in prickarna med sex stycken i varje hög och insåg då att det blev för få kvar och kunde då se att det skulle vara fem stycken prickar i varje hög, som framgår av Bild 9 och av intervjun.

I: Mm. Först skrev du delat på 8 och så har du ritat lite cirklar här. Kan du förklara hur du gjorde?
E6: Jag gjorde 40 cirklar.
I: Mm.
E6: Och så försökte jag dela upp dem i… provade lite.
I: Mm.
E6: Provade först med 6 men det blev för lite för den sista.
I: Mm.
E6: Så då la jag över lite från dom här och då blev det 5.

I: Jaha, så då blev det 5 i varje?
E6: Ja.

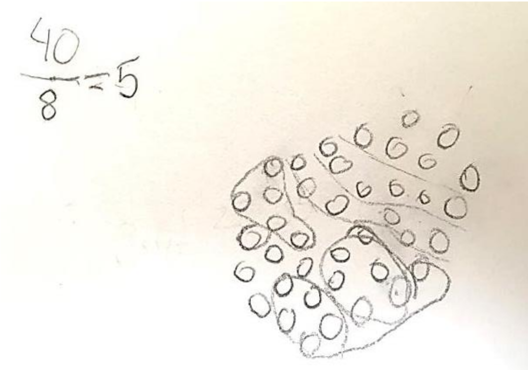


Bild 9. Visar hur Elev 6 ritade upp 40 stycken prickar för att lösa uppgift 3.

Under observationen märktes det att Elev 7 använde sig av en speciell strategi för att lösa divisionsuppgifter. Eleven ritade upp prickar i form av ett ”rutsystem” där siffran som står i nämnaren prickades av horisontellt, exempelvis fem prickar horisontellt om siffran fem står i nämnaren. Efter det upprepade eleven proceduren tills siffran som står i täljaren är utprickad genom att placera prickar horisontellt över den första linjen (Se Bild 10). Sedan räknar eleven bara hur många prickar det är lodrätt. Under intervjun förklarade eleven att detta var en strategi hen använde för att lösa divisionsuppgifter.

I: Mm. Och här när vi kommer till divisionsuppgift 2. 25 delat på är lika med 5 har du skrivit.
E7: Mm.
I: Men du har ritat lite prickar här, kan du förklara hur du gjorde?
E7: Jag räknade jag gjorde typ först 5 sånna (prickar horisontellt).
I: Aa.
E7: Och sen gjorde jag över så.
I: Mm.
E7: Prickar tills det var till slutet tills det var aa det inte var några mer prickar.
I: Så hur många blev det? Hur många prickar har du ritat?
E7: Eh… 25.
I: 25 prickar. Mm. Och hur har hur visste du att det skulle vara 5 svaret sen då?
E7: För att jag räknar upp så (pekar på prickarna som går lodrätt).
I: Aa. Okej och då blev det 5?
E7: Mm.

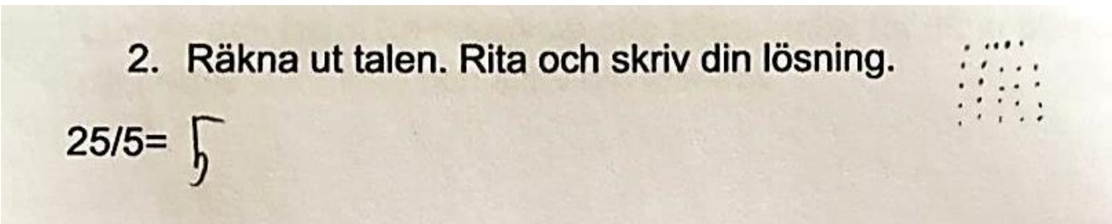


Bild 10. Visar hur Elev 7 placerar ut prickar i ett ”rutsystem".

Under intervjun förklarade Elev 8 hur hen hade löst uppgift 1. Eleven hade en annan strategi, som gick ut på att räkna exempelvis första deluppgiften 6×6enom att först ta 6+6 och sedan det svaret gånger 6. I uppgift ett klarade eleven av att lösa uppgiften 4×3 utan att använda sig av någon strategi, eleven kunde svaret från tidigare matematikundervisning. Elevens förklaring till lösningen stämmer dock inte med svaret hen har skrivit. Elev 8 sa ”jag tog 4 plus 4 tre gånger” under intervjun, vilket gör att svaret inte blir 12, vilket hen har skrivit, utan enligt elevens förklaring blir uträkningen $8 \times 3 = 24$. Denna strategi tillämpade eleven även i de andra multiplikationsuppgifterna, vilket gjorde att eleven fick fel svar samt att det visade att hen saknar grundläggande kunskaper i multiplikation.

I: På första uppgiften.
E8: Mm.
I: Då skrev du att 6 gånger 6 är lika med 62. Hur gjorde du för att räkna ut det?
E8: Jag tog 6 plus 6 två gånger och så blev det 12 och sen räknade jag det 6 gånger.
I: Mm. Jaha. Jättebra. Och då fick du det till 62?
E8: Mm.
I: Mm. Och 4 gånger 3 har du skrivit är 12. Hur hur gjorde du då?
E8: *paus* Jag tog 4 plus 4 tre gånger.
I: Och då fick du det till 12?
E8: Mm.

5.4 Resultatsammanfattning

Elevernas resultat varierar lite, utifrån de strategier som de har använt. Flera använde upprepad addition i sina lösningar både i multiplikations- och divisionsuppgifter. Vissa strategier var återkommande hos några elever, medan andra var unika och endast tillämpades av en elev (Se Tabell 1).

Tabell 1. Visar vilka elever som tillämpar en additiv strategi, ser samband mellan multiplikation och division eller om de använder en annan strategi.

Elev	Additiv strategi	Samband mellan multiplication och division.	Annan strategi
Elev 1	X	X	
Elev 2	X		
Elev 3			X
Elev 4	X	X	X
Elev 5	X	X	X
Elev 6	X		X
Elev 7	X	X	X
Elev 8	X		X

Dessa kategorier har kunnat urskiljas vid analys av elevernas individuella svar. Kategoriseringen gjordes eftersom studien bygger på teorin *Grounded Theory*, där insamlat material kategoriseras. Det som kan ses i Tabell 1 är att nästan alla elever tillämpar en additiv strategi och att sex av åtta elever använder sig av en annan strategi. Det var fyra elever som kunde uppvisa en förståelse av sambandet mellan multiplikation och division, vilket utnyttjades i divisionsuppgifter.

6. Diskussion

I detta kapitel kommer metoden och resultatet att diskuteras. Kritiska bedömningar görs av metodval och genomförande. Vidare diskuteras resultatet och förslag på vidare forskning presenteras.

6.1 Metoddiskussion

Multiplikativt tänkande är ett ”smalt” begrepp och det saknas i stor utsträckning forskning på detta område. Detta medförde att det föreligger få referenser och många av dem som används i studien är huvudkällor. Larsson (2013) är en av de forskare som har använt samma referenser som används i denna studie. Bristen på forskningsområdet har gjort det problematiskt att få ett bredare perspektiv på ämnesområdet.

Studiens fokus ligger på årskurs 3, för att eleverna ska ha mött både multiplikation och division i matematikundervisningen. Detta är en fördel jämfört med om studien hade fokuserat på elever i förskoleklass och upp till årskurs 3. Urvalskriteriet var därför att eleverna ska gå i årskurs 3. För att respondenternas svar inte ska feltolkas under intervjuerna och observationerna är det av vikt att eleverna har en god relation till forskaren. Elever uttrycker sig på olika sätt och genom en relation till forskaren skapas det därför en ömsesidig förståelse. En styrka med en god relation till forskaren är att eleverna vågar visa hur de gör och tänker vilket höjer validiteten och reliabiliteten, enligt mig, i studien. Ett annat kriterium var att forskaren inte skulle ha någon relation till eleverna inom matematikundervisningen. Även detta stärker både validiteten och reliabiliteten, då forskaren inte kan påverka eleverna omedvetet, genom undervisningen i matematik, innan intervjuerna och observationerna genomfördes.

En svaghet med studien är att det endast var åtta elever som deltog i intervjuerna och observationerna. Detta gör att resultatet inte kan generaliseras utan det är ett resultat av de strategier som dessa elever väljer att använda sig av. Eleverna går i samma klass, vilket kan vara en svaghet, då det kan leda till att variationen inte blir lika stor som om studien hade undersökt elever i årskurs 3, i olika skolor. Det är samtidigt en styrka att eleverna går i samma klass, då det visar att eleverna har fått samma undervisning men ändå har olika strategier för lösningar av multiplikations- och divisionsuppgifter. Studien påbörjades med en pilotstudie med en elev från årskurs 3, för att se om frågorna och uppgifterna var relevanta för studiens syfte och frågeställningar, vilket höjer validiteten. Pilotstudien används inte som en del av resultatet.

Observationerna gav även forskaren en större möjlighet att fråga eleverna under intervjuerna, om specifika lösningar som dök upp under observationerna. Genom observationer och anteckningar, fanns det möjlighet att ställa eleverna mer specifika frågor och forskaren kan få svar på sina funderingar samt om eleverna har sagt något under observationerna. Eftersom observationerna inte ljudinspelades fick följdfrågor ställas under intervjuerna, om eleverna hade sagt något under observationen.

Uppgifterna som eleverna skulle svara på var medvetet utformade så att det fanns tydliga multiplikations- och divisionsuppgifter, där eleverna direkt kunde visa vilken eller vilka strategier de använder vid lösningar av uppgifter inom dessa räknesätt. De sista två uppgifterna var utformade så, att eleverna själva kunde välja strategi och räknesätt, då detta inte var givet. Det ökar valideten i studien, eftersom eleverna får välja strategi på egen hand. Genom att en intervjufråga var om uppgiften kunde lösas på något annat sätt fick eleverna en möjlighet att visa på förståelse av samband mellan multiplikation och division.

Studien är inspirerad av *Grounded Theory*, vilket stärker studiens validitet och reabilitet då det skapades tydliga kategorier utifrån materialet, som samlades in. Studien genomfördes förutsättningslöst och tolkningen av resultatet ledde till de funna strategierna. Om studien hade haft bestämda kategorier från början, finns det risk att resultatet tolkas så, att det ska passa de förbestämda kategorierna. Genom att inte ha bestämda kategorier var fokus på hur eleverna löste uppgifterna och deras tankesätt, eftersom intresset var att ta reda på hur eleverna gör. Intervjuerna och observationerna går inte i någon förutbestämd riktning, när forskaren inte har bestämda kategorier att utgå ifrån, vilket bygger på att ledande frågor inte ställs omedvetet som kan påverka resultatet. Studien har en styrka, enligt min uppfattning, att kategorierna skapades utifrån insamlat material.

För att höja validiteten i studien gjordes observationer under tiden som eleverna löste uppgifterna. Det gjordes för att forskaren skulle ha kontroll över att eleverna inte missförstod uppgifterna. En styrka med att detta genomfördes var att om några elever skrev ner en strategi som de sedan kanske suddade ut, fanns observationerna av elevernas lösningar dokumenterade. Det hände att eleverna ibland svarade med en annan strategi än den de har använt i lösningen, vilken då finns dokumenterad.

6.2 Resultatdiskussion

Teorin *Grounded Theory* har varit fruktbar för studien genom att resultatet har kategoriserats i de kategorier som har framkommit av analysen och inte av förbestämda kategorier. Genom kategoriseringen blev resultatet tydligt för hur eleverna löser uppgifter inom multiplikation och division. Det var sju av åtta elever som använde en additiv strategi, genom att de använde upprepad addition i lösningarna. Enligt Larsson (2013) är upprepad addition additivt tänkande och inte multiplikativt tänkande. Carrier (2014) säger att additiva strategier ingår i det multplikativa tänkandet, vilket innefattar upprepad addition. Detta visar att Larsson (2013) och Carrier (2014) inte är överrens om vad multiplikativt tänkande innebär. Mulligan och Mitchelmore (1997) och Van Dooren, De Brock och Verschaffel (2010) beskriver att upprepad addition är en del av det multiplikativa tänkandet. Jag håller med Carrier (2014), Mulligan och Mitchelmore (1997) och Van Dooren, De Brock och Verschaffel (2010) att additiv strategi är en del av multiplikativt tänkande. Detta för att eleverna visar att de har en förståelse för multiplikation och division även om de väljer att löser de genom additiva strategier.

Av de sju elever som använde upprepad addition i sina lösningar och befann sig på nivå 2 i Figur 1 enligt Carrier (2014), var det fyra av dessa som kunde tillämpa samband mellan multiplikation och division. Dessa fyra elever har en förståelse av att talen i en operation utgör en gemensam enhet och enligt Drake (2012) har de ett multplikativt tänkande enligt nivå 4 i Figur 1. Mulligan och Mitchelmore (1997) beskriver att elever som har förståelse av samband mellan multiplikation och division visar att de har ett multiplikativt tänkande, eftersom varje multiplikationsuppgift kan lösas med divisionsstrategier. De elever som inte har förståelse av samband mellan multiplikation och division har också ett multplikativt tänkande om de använder upprepad addition. Utifrån Larssons (2013) uppfattning visar resultatet att endast fyra av åtta elever har ett multiplikativt tänkande.

Om elever kan tillämpa sambandet mellan multiplikation och division kategoriseras de som att de har ett multiplikativt tänkande. Eleverna befinner sig på nivåerna 3 eller 4 i Figur 1, enligt Carrier (2014), beroende på om de löser uppgifterna på fel respektive rätt sätt.

Sowder, Armstrong, Lamon, Simon, Sowder och Thompson (1998) säger att för att utveckla ett multiplikativt tänkande krävs ett utvecklat additivt tänkande, utöver grundläggande kunskaper inom additivt tänkande. En av eleverna saknar kunskaper för att kunna uppvisa multiplikativt tänkande, då det saknades kunskaper i genomförande av multiplikation samt avsaknad av förmåga att se samband mellan multiplikation och division. De andra sju eleverna har grundläggande kunskaper inom det addititva tänkandet, vilket gör att de har börjat utveckla ett multiplikativt tänkande. Elever behöver lärares hjälp för att utveckla sitt multiplikativa tänkande utifrån strategier för det additiva tänkandet (Tobias & Andreson, 2013). Utifrån studiens resultat visade sju av eleverna att de använde additiva strategier i sina lösningar. Eftersom det var fyra elever som uppvisade förståelse av samband mellan multiplikation och division, kan det kategoriseras som att de också har ett multiplikativt tänkande.

Uhden, Karam, Pietrocola och Pospiech (2012) skriver om matematisk modellering och att det där finns olika utvecklingsnivåer och där syftet är att koppla matematikuppgifterna till sin verklighet. I Figur 2 finns tre nivåer hämtade från matematisk modellering som ställs mot nivåer inom multiplikativt tänkande. Alla eleverna, i denna studie, följde dessa tre nivåer i sina olika lösningar, då de förstod uppgiften, strukturerade uppgiften och till sist löste den med konkret material. Eleverna hade inte tillgång till konkret material men några av strategierna som eleverna använde var en skriftlig variant av konkret material.

I slutet av årkurs 3 ska eleverna kunna välja och använda strategier med anpassning till problemet (Skolverket, 2011). Studiens resultat visar att eleverna uppnår detta kunskapskrav eftersom alla kunde visa upp en användbar strategi utifrån problemets karaktär. Enligt Skolverket (2011) ska eleverna i undervisningen få möta de fyra räknesätten samt deras samband. Studiens resultat visar att det finns brister i detta, då det endast var fyra elever som kunde förklara samband mellan multiplikation och division. Multiplikativt tänkande innebär att se samband mellan multiplikation och division

(Mulligan & Mitchelmore, 1997), därför är det av relevans att undersöka detta, då eleverna går i årkurs 3 och ska kunna uppnå de mål som kunskapskraven ställer.

Syftet med studien var att undersöka hur elever använder sig av olika strategier inom multiplikativt tänkande vid multiplikation och division. Detta uppfylldes med hjälp av frågeställningarna om hur elever använder olika strategier för att lösa multiplikations- och divisionsuppgifter, samt om eleverna förstår sambandet mellan dessa två räknesätt. I enlighet med *Grounded Theory* hittades strategier som elever använde i sina lösningar, vilka utgör de funna kategorierna. Resultatet visade att sju av de åtta eleverna använde additiva strategier i lösningar av multiplikations- och divisionsuppgifter. Resultatet visade också att fyra av åtta elever förstår sambandet mellan dessa två räknesätt. Frågeställningarna har besvarats genom de funna kategorierna visar vilka strategier som eleverna använder sig av inom multiplikativt tänkande, respektive om de förstår sambandet mellan multiplikation och division.

6.3 Vidare forskning

Som vidare forskning skulle det vara intressant att se hur lärarens undervisning påverkar elevernas utveckling av multiplikativt tänkande. Detta beror, enligt min uppfattning, på att elever behöver kunna strategier och förstå samband mellan de fyra olika räknesätten, då detta är ett krav som ställs på elever, när de slutar i årskurs 3. Det skulle även vara intressant att undersöka varför elever med samma matematikundervisning väljer olika strategier och vilken skillnad det har för elevernas utveckling av det multiplikativa tänkandet. Studiens resultat visade alltså att elevernas strategier och tankar skiljer sig åt, även om de har haft samma matematikundervisning. Därför skulle det vara av intresse att ta reda på hur undervisningen påverkar elevernas utveckling av det multiplikativa tänkandet.

Referenslista

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. 2., [rev.] uppl. Malmö: Liber.

Carrier, J. (2014). Student Strategies Suggesting Emergence of Mental Structures Supporting Logical and Abstract Thinking: Multiplicative Reasoning. *School Science and Mathematics, 114*(2), 87-96. doi: 10.1111/ssm.12053

Clark, F., & Kamii, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 41-51.

Drake, M. (2012). On the trail of multiplicative thinking. *Mathematics Teaching, 228, 45-49.*

Harris, T. (2015). Grounded Theory. *Nursing Standard (Royal college of Nursing (Great Britain: 1987), 29(35),* 32-29

Heiberg Solem, I., Alseth, B., & Nordberg, G. (2011). *Tal och tanke - matematikundervisning från förskoleklass till årskurs 3*. Lund: Studentlitteratur.

Larsson, K. (2013). Multiplicative thinking in relation to commutativity and forms of representation. I J. Novotná & H. Moraová (Red.), *Tasks and tools in elementary mathematics* (s.179-187). Prague: Charles University.

Mulligan, J., & Mitchelmore, M. (1997). Young Children's Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011. Lgr 11*. Stockholm: Fritzes.

Tobias, J., & Andreasen, J. (2013). Developing Multiplicative Thinking from Additiva Reasoning. *Teaching Children Mathematics, 20*(2), 102-109.

Uhden, O., Karam, R., Pietrocola, M., & Pospiech, G. (2011). Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education. *Science & Education, 21*(4), 485-506. doi:10.1007/s11191-011-9396-6

Van Dooren, W., De Brock, D., & Ver-schaffel, L. (2010). From Addition to Multiplication… and Back: The Development of Students´ Additive and Multiplicative Reasoning Skills. *Cognition and In-struction*, *28*(3), 360-381. doi:10.1080/07370008.2010.488306

Bilaga 1

Intervjufrågor och uppgifter

Uppgifter

1. Räkna ut talen. Rita och skriv din lösning.

6x6=

4x3=

7x8=

2. Räkna ut talen. Rita och skriv din lösning.

25/5=

28/7=

18/3=

3. Problemlösning.

Maja har 40 stycken godisbitar som hon ska dela mellan sig själv och sju andra. Hur många godisbitar får de var? Rita och skriv din lösning.

4. Problemlösning.

Ludvig och hans tre kompisar ska köpa bullar för 48 kr tillsammans. Hur mycket ska de betala var? Rita och skriv din lösning.

Frågor

Hur gjorde du för att lösa uppgiften?

Varför gjorde du så?

Finns det andra sätt att lösa uppgiften på?

Bilaga 2

Till vårdnadshavare och elev

Hej!

Mitt namn är Matilda Knutsmark och jag läser till F-3 lärare på lärarhögskolan i Jönköping. Jag är inne på min sista termin och ska strax börja med mitt examensarbete. Min fråga till er är om det är OKEJ om jag intervjuar till examensarbetet. Intervjun kommer att dokumenteras genom ljudinspelning och anteckningar. Eleverna kommer vara anonyma i arbetet och jag kommer vara den enda som har tillgång till ljudfilerna och anteckningarna.

Mitt examensarbete handlar om multiplikativt tänkande vilket innebär att jag vill ta reda på hur löser multiplikations- och divisionsuppgifter. Jag kommer därför inte ställa några personliga frågor utan de kommer endast vara kopplade till ämnet matematik. Om ni godkänner detta med så kryssa i rutan för JA.

Har ni frågor så var inte rädda att höra av er till mig. Min mejladress är [redacted] och är det lättaste sättet för er att få tag på mig.

Med vänliga häsningar

....

Namnteckning

Vårdnadshavare JA ☐ NEJ ☐

____

Elev

____