JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Hur matematikläroböcker presenterar räknelagar och räkneregler

KURS: *Examensarbete II, F-3, 15 hp*

FÖRFATTARE: *Frida Andersson*

EXAMINATOR: *Mikael Segolsson*

TERMIN: *VT16*

JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

Examensarbete II, F-3, 15 hp
Grundlärarprogrammet med
inriktning mot arbete i förskoleklass
och grundskolans årskurs 1-3
VT16

SAMMANFATTNING

Frida Andersson

Hur matematikläroböcker presenterar räknelagar och räkneregler

Antal sidor: 40

Sammanfattning

Läroboken styr till stor del vilket innehåll som behandlas i matematikundervisningen. Med detta i åtanke har fem svenska läroboksserier har utsatts för en latent och manifest innehållsanalys av hur de presenterar de aritmetiska räknelagarna och räknereglerna. I studien framkommer både kvantitativ och kvalitativ data. Den kvantitativa datan indikerar att få läroboksserier tar upp associativa och distributiva lagen explicit. Den kvalitativa datan pekar på att räknelagarna ofta beskrivs i andra sammanhang. Flera exempel i läroböckerna gör generaliseringar som riskerar leda till begränsad förståelse för räknelagarna och räknereglerna.

Abstract

In mathematics education textbooks to a large extent determine what is offered for students to be learnt. With this in mind, in this study, five Swedish textbooks series is reviewed in a latent and manifest content analysis approach where both quantitative and qualitative data is presented. The result of the quantitative data indicate that only a few textbooks series mentions the associative and distributive law in explicit manners. The result of the qualitative data shows that the basic laws of arithmetic is often described in other contexts. Many examples in the textbooks makes generalizations that may lead to limited understanding of the basic laws and rules of arithmetic.

Sökord: Matematikläroböcker, matematikundervisning, räknelagar, räkneregler.

Keywords: Mathematics textbooks, mathematics education, basic laws of arithmetic, rules of arithmetic.

Innehållsförteckning

1 Inledning 1

2 Syfte och frågeställningar 4

3. Bakgrund 5

3.1 Räknelagar och räkneregler i matematikdidaktisk forskning 5

3.2 Lärande med inriktning mot variationsteori 7

4 Metod och material 8

4.1 Analysmetod 8

4.2 Materialinsamling och urval 8

4.3 Materialanalys 10

4.4 Validitet och reliabilitet 12

5 Metoddiskussion 13

6 Frekvensen av räknelagarna och räknereglerna 14

6.1 Diskussion 16

7. Samband och uppdelning av talsorter för räknelagarna 18

7.1 Diskussion 23

7.2 Didaktiska implikationer 24

8. Beskrivning av de generella egenskaperna för räknelagarna och räknereglerna 25

8.1 Diskussion 30

8.2 Didaktiska implikationer 32

9. Sammanfattning 33

10. Referenslista 34

Bilaga 1 - Läroboksreferenser

1 Inledning

Läromedel, och i synnerhet läroböcker, har en central del i undervisningen av matematikämnet. För matematikläraren är läroboken ofta primärkällan för innehåll och progressionen. Dessutom används den ofta av lärare för att säkerställa att undervisningens innehåll är i riktning med rådande kunskapskrav (Bremler, 2013; Reys, Reys & Chavéz, 2004; Danielsson & Selander, 2014; Kongelf, 2015; Kajander & Lovric, 2007). I Sverige fanns mellan åren 1938 till 1991, en statlig granskning av läromedel. Idag finns det ingen institution med ett uppdrag att granska, vilket leder till att kvalitetssäkring av läromedel blir lärarnas ansvar (Bremler, 2013; Richardson, 2010; Skolverket, u.å.). Enligt TIMMS-undersökningen (Skolverket, 2011b) är lärarna i Sverige, jämfört med övriga lärare i EU/OECD-länder, de som i störst utsträckning använder matematikläroboken i undervisningen. Trots att det finns tydligt uttalade kunskapskrav om innehållet för matematikundervisningen i läroplanen, används matematikläroböckerna av lärare, som en slags ”kursplan” i sig (Skolinspektionen, 2009).

I kursplanen för matematik (Skolverket, 2011a) står det att undervisningen ska utveckla elevers möjlighet att känna tilltro i att använda matematiska förmågor i olika sammanhang. Elever ska alltså genom undervisningen utveckla förtrogenhet för matematiska begrepp och användbara metoder som är grundläggande för matematiken. Elever ska också utveckla färdigheter att göra effektiva aritmetiska beräkningar. Enligt styrdokumenten kräver dessa beräkningar förståelse för räknesättens egenskaper (Skolverket, 2011a). Sådana egenskaper för de olika räknesätten brukar, till exempel, hänga tätt samman med kommutativitet, associativitet och distributivitet, som är de grundläggande aritmetiska räknelagarnas egenskaper. Vidare finns det konventioner för hur vi räknar. Dessa konventioner är vänster-till-höger-principen och räknesättens prioritet.

De grundläggande aritmetiska räknelagarnas egenskaper och de konventioner vi följer, är viktiga för den grundläggande matematiken (Kiselman & Mouwitz, 2008). TIMMS undersökning (Skolverket, 2011b) indikerar att den svenska matematikundervisningen till stor del baserar på det matematiska innehållet som presenteras i läroböckerna. Kajander och Lovic (2009), beskriver att läroböcker stödjer undervisningen, men att det sker allt för få undersökningar om vad läroböckerna faktiskt innehåller. Detta är utgångspunkten för denna

studie. Eftersom böckerna spelar så stor roll för undervisningen och räknelagar och räkneregler är centrala för elevers förståelse och förtrogenhet för matematiken. Därför undersöks hur dessa beskrivs i svenska läroböcker för de tidiga skolåren. Fem av de vanligast förekommande svenska läroboksserierna för årskurs 1 till 6 har analyserats, speciellt med avseende hur de presenterar de grundläggande aritmetiska räknelagarna och räknereglerna.

För att ge en tydlig bild av det analyserade materialet, delas resultatet upp i tre delar. I den första delen presenteras den kvantitativa delen av studien (kap. 6). I den andra delen presenteras hur räknelagarna beskrivs genom samband och talsorter (kap. 7). I den tredje delen beskrivs vilka generaliseringar som görs för räknelagarna och räknereglerna (kap. 8). Resultatet beskrivs tematiskt, vilket innebär att till varje tema beskrivs dels data från analysen, dels en diskussion kring hur data kan kopplas till aktuell didaktisk forskning. För att förstå syftet med studien, beskrivs egenskaperna och konventionerna för hur vi räknar, samt samband och talsorter, i detalj nedan.

Kommutativitet

Kommutativa lagen är en egenskap som gäller för räknesätten addition och multiplikation, dessa benämns som kommutativa operationer. Subtraktion och division är inte kommutativa operationer. I operationer som följer den kommutativa lagen spelar inte talens rumsliga ordning någon roll. Oavsett om det första talet opereras med det andra eller om det sker i omvänd ordning blir det samma resultat, om operationen är kommutativ. Kommutativitet beskrivs symboliskt $a + b = b + a$ för addition, och som $a \times b = b \times a$ för multiplikation. Detta algebraiska sätt att uttrycka kommutativa lagen återfinns i flera olika referensverk för terminologi för skolmatematiken, bland annat i Svensson (2001), Kiselman och Mouwitz (2008) och Haylock (2014).

Associativitet

Addition och multiplikation är räknesätt som innefattas av associativa egenskaper. I operationer med associativa egenskaper spelar inte ordningen för hur operationen utförs någon roll. Om ett uttryck innehåller samma associativa operation flera gånger, spelar det alltså inte någon roll vilken av operationerna som man börjar med. Associativa egenskaper beskrivs vanligen som den associativa lagen. Lagen uttrycks symboliskt för addition som $(a + b) + c = a + (b + c)$ och som $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ för multiplikation. Sådana algebraiska beskrivningar återfinns bland annat i Carpenter, Franke och Levi (2003), Kiselman och Mouwitz (2008) och Haylock (2014). Den associativa lagen gäller inte för blandade räknesätt, subtraktion eller division.

Distributivitet

Den distributiva lagen innebär en egenskap hos räknesätten, där multiplikation fördelas över addition eller subtraktion. Det handlar alltså om hur ett räknesätt med högre prioritet fördelas över ett annat (med lägre prioritet). Lagen beskrivs vanligast i uttryck där multiplikation är distributivt över addition, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$. Lagen kan också generaliseras att gälla där multiplikation är distributivt över subtraktion, $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$. Algebraiska beskrivningar av distributiva lagen finns bland annat i Carpenter et al. (2003), Löwing och Kilborn (2003) och Haylock (2014). Man kan lägga märke till att division ibland, men inte alltid, kan fördelas över addition eller subtraktion. Som exempel $a/(b + c) \neq a/b + a/c$, men $(b + c)/a = b/a + c/a$. Man kan alltså säga att division är distributivt från höger (Haylock, 2014), men inte från vänster.

Räkneregler

Vänster-till-höger-principen och prioriteringsregeln är konventioner för hur vi räknar. Vi hade alltså kunnat ha en entydig matematik även med andra konventioner än vänster-till-höger-principen och prioriteringsregeln. Men nu verkar dessa två beskriva hur matematiska uttryck ska tolkas. Prioriteringsregeln innebär att multiplikation och division alltid beräknas innan addition och subtraktion. Om parenteser finns i uttrycket beräknas dessa först. Operationerna inom parentesen följer prioriteringsregeln. Om uttrycket innehåller räknesätt med samma prioritering, beräknas operationen med vänster-till-höger-principen.

Samband/Talsorter

Det finns ett samband mellan räknesätten addition och subtraktion, och mellan multiplikation och division. Dessa samband kallas även för ”talfamiljer”. En talfamilj handlar om att tal tillsammans bildar en helhet, exempelvis, $5, 4$ och 9. Talfamiljen uttrycks på följande sätt $5 + 4 = 9$, $4 + 5 = 9$, $9 - 4 = 5$ och $9 - 5 = 4$. Strukturen är densamma för talfamiljer för räknesätten multiplikation och division. Talfamiljer har också att göra med att tal kan delas upp i del-del-helhet. Denna uppdelning innebär att dela upp exempelvis termen 10 till $8 + 2$, eller faktorn 10 till 5×2. Att dela upp tal i termer beskrivs av Löwing och Kilborn (2003), som att det blir enkelt att beräkna $8 + 5$ som $8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3 = 13$, och detta kan även generaliseras att gälla till $48 + 25 = 48 + (2 + 23) = (48 + 2) + 23 = 50 + 23 = 73$. Löwing och Kilborn (2003) menar att ovanstående exempel med uppdelning av termer görs i kombination med associativa lagen för addition.

2 Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka hur de grundläggande aritmetiska räknelagarna och räknereglerna framställs i matematikläroböcker för grundskolans årskurser 1-6.

Detta syfte uppfylls genom att besvara följande frågeställningar:

- I vilken frekvens beskrivs de olika räknelagarna och räknereglerna explicit?
- På vilka sätt beskrivs samband och uppdelning av talsorter för räknelagarna i matematikläroböckerna?
- På vilka sätt beskrivs de generella egenskaperna för räknelagarna och räknereglerna?

3. Bakgrund

Följande kapitel beskriver i första delen det matematikdidaktiska forskningsfältet kring de grundläggande aritmetiska räknelagarna och räknereglerna. Därefter följer den teoretiska utgångspunkten som studien inspirerats av.

3.1 Räknelagar och räkneregler i matematikdidaktisk forskning

Explicit undervisning om de grundläggande egenskaperna är viktigt för elevers utvecklande inom matematiken (Ding, Li & Capraro, 2013). I grundskolans tidigare år är det huvudsakliga målet att elever har de matematiska baskunskaper som krävs för att operera med standardalgoritmer (Schifter, 1999). Canobi, Reeve och Pattision (2002) beskriver att det finns vissa grundläggande principer som är förknippade med räknesättet addition. Dessa principer är bland annat associativa och kommutativa egenskaper. Förståelse för den kommutativa lagen har enligt Canobi (2005) en nyckelfunktion för del-och-helhetrelationen, gällande addition och subtraktion. För att utveckla barns logiska tänkande bör de enligt Canobi et al. (2002) få möta additionsuttryck som exempelvis $2 + 3 = 3 + 2$, innan de möter den generella symboliska beskrivningen för additionens kommutativa egenskaper $a + b = b + a$. Författarna beskriver vidare att de associativa egenskaperna utgörs av principen att tal, inom addition och multiplikation, kan kombineras och delas upp på olika sätt, utan att förändra ordningen som operationens utförs (Canobi et al., 2002).

Ding och Li (2014) beskriver att det finns viktiga matematiska principer, av dessa viktiga principer är de distributiva egenskaperna, en av dem. Författarna menar däremot att distributiva egenskaper är svåra att förstå och detta beror på att egenskaperna ofta beskrivs som abstrakta och saknar elevnära kopplingar. Schifter (1999) menar att uttryck som $a(b + c) = ac + ab$ är svåra för elever att förstå, om de inte tidigare mött den distributiva lagen i inom aritmetiken. Ding och Li (2014) anser att det är viktigt att lägga en grund i matematikundervisningen, där dessa abstrakta principer görs möjliga för elever att förstå. Genom en areamodell kan distributiva egenskaper illustreras. Denna modell kan beskrivas genom att i en rektangel visa på längden genom $a + b$ och bredden genom c (Ding & Li, 2014).

Prioriteringsregeln är en viktig del för elevers matematiska förståelse. Den vanligaste förklaringen av prioriteringsregeln presenteras som: Parenteser, potenser, multiplikation och

division (från vänster till höger), addition och subtraktion (från vänster till höger) (Glidden, 2008; Groth, 2013). Det sätt som prioriteringsregeln vanligtvis beskrivs på, genom minnesramsor, kan ge eleverna felaktig förståelse för i vilken ordning operationer utförs (Glidden, 2008; Groth, 2013). Detta beskrivs genom minnesramsan *PEMDAS,* vilket är en förkortning för *Parentheses, Exponents, Multiplication, Division, Addition* och *Subtraction*. För att behärska prioriteringsregeln menar Glidden (2008) att elever måste ha förståelse för att multiplikation och division har samma prioritet och att det samma gäller för addition och subtraktion. Glidden (2008) och Groth (2013) menar att minnesstrategier riskerar att leda till felaktiga tolkningar, då multiplikation och addition alltid förklaras före division och subtraktion. Groth (2013) beskriver vidare att dessa tolkningar kan leda till att elever tror att i uttryck som $7 - 4 + 3$ ska vänster-till-höger-principen frångås, vilket gör att additionen beräkna före subtraktionen.

Jacobs, Franke, Carpenter, Levi och Battey (2007) beskriver att i uttryck som $25 + 58 + 75$ är det mer effektivt att frångå vänster-till-höger-principen, och istället ta tillvara på talkombinationen $25 + 75$. För att kunna frångå den traditionella vänster-till-höger-principen måste eleven kunna se uttrycket som en helhet, för att därefter identifiera passande talrelationer (Jacobs et al., 2007). Att se matematiska uttryck som helheter beskriver Jacobs et al. (2007) som ett relationellt tänkande. Relationellt tänkande innebär att reflektera över olika talrelationer i uttryck och ekvationer. Enligt Kieran (1979) finns det en uppfattning hos elever att matematiska operationer alltid måste utföras från vänster till höger. Jacobs et al. (2007) hävdar att genom ett relationellt tänkande, kan elever utveckla förmågor att frångå den traditionella vänster-till-höger-principen.

Att använda och behärska de associativa egenskaperna för multiplikation ger enligt Ding et al. (2013) stor flexibilitet för beräkningar. Ett exempel på denna flexibilitet är genom att granska uttrycket $3 \times 4 \times 25$. Vid beräkning med vänster-till-höger-principen beräknas uttrycket på följande sätt $(3 \times 4) \times 25 = 12 \times 25$. Om eleven behärskar de associativa egenskaperna är det möjligt att se uttrycket på följande sätt $3 \times (4 \times 25) = 3 \times 100$ och finner vid denna uträkning svaret på ett mer effektivt sätt (Ding et al, 2013; National Research Council, 2001). Enligt Zaslavsky och Peled (1996) kan den associativa lagen beskrivas som att tal i ett uttryck kan beräknas parvis, även då från höger till vänster. Ding et al. (2013) menar att både associativa egenskaper och kommutativa egenskaper vanligtvis används tillsammans, exempelvis i uttrycket $(5 \times 2) \times 3 = (3 \times 2) \times 5$. Både kommutativitet och associativitet medför på ett eller annat sätt en ändring i operationsordningen och är jämförelsevis lika. Kommutativa

egenskaper gör det möjligt att förändra ordningen på talen och associativa egenskaper innebär att ordningen i vilken uttrycket utförs, inte spelar någon roll. Det finns missuppfattningar kring dessa likheter (Zaslavsky & Peled, 1996). Om kommutativa och associativa egenskaper beskrivs samtidigt, utan att tydligt skilja på de olika egenskaperna, menar Zaslavsky och Peled, (1996) att missuppfattningar hos elever kan befästas.

Resultatet av Warrens (2003) studie, visar på att det finns indikationer att elever upplever den associativa lagen som svårare än den kommutativa lagen. Anledningen till vad som framgick i resultatet, att elever anser att den associativa lagen är svårare, jämförelsevis med den kommutativa lagen, kan vara på grund av att de uppgifter som innehöll associativa egenskaper var svårare och innehöll parenteser (Warren, 2003). Enligt Wasserman (2014) blandar många elever, men också lärare ihop associativa och kommutativa egenskaper. Att skilja på dessa egenskaper är enligt författaren också svårt för lärare och elever. Wasserman (2014) beskriver att dessa svårigheter visas genom att i associativa uttryck, byter lärare och elever plats på elementen, istället för att enbart beräkna uttrycket i en annan ordning. Det är enligt Warren (2003) vanligt att elever i de högre årskurserna inte känner igen kommutativa lagen eller den associativa lagen i generella termer. Detta leder till att elever får en begränsad medvetenhet kring aritmetiska operationer (Warren, 2003).

3.2 Lärande med inriktning mot variationsteori

Studien har tagit inspiration från det variationsteoretiska sättet att se på lärande. Detta sätt att se på lärande beskrivs enligt Lo, (2014), Lam, (2013) och Marton och Booth, (2000) som att vi inte kan prata om lärande om det inte är klargjort vad som lärs. Variationsteorins grundtanke är att lärande är avsiktligt, och att du inte kan veta vad någonting är, om du inte har erfarit kunskap om vad det inte är. Variationsteorin har sitt ursprung från fenomenografi, där fokus ligger på de olika skilda sätt människor upplever samma fenomen (Lam, 2013; Lo, 2014). Olika sätt att uppleva ett fenomen kan beskrivas som olika sätt att uppleva en specifik aspekt av fenomenet. Är den varierande aspekten explicit, då är den tydligt uttalad och synlig. Om variationen är implicit, lägger vi märke till hur någonting är, men att den underförstådda betydelsen kan vara någon annan (Marton & Booth, 200). Lo (2014) beskriver lärande som en funktion av urskiljning, som i sin tur, förutsätter en upplevd variation. För att uppleva variation krävs det att någonting varierar och någonting är konstant. Lam (2013) och Watson och Mason (2006) beskriver på olika sätt, att det inte bara är viktigt att urskilja vad som varierar utan också det som är konstant.

4 Metod och material

Syftet med studien är att undersöka hur de grundläggande aritmetiska räknelagarna och räknereglerna framställs i matematikläroböcker för grundskolans årskurser 1-6. För att besvara syftet är studien utformad efter en innehållsanalys. Innehållsanalysen utgörs av kvantitativa och kvalitativa inriktningar.

4.1 Analysmetod

Innehållsanalys är en metod innebär en systematisk läsning av verbalt, tryckt eller visuellt material, och kan användas med både kvalitativa och kvantitativa inriktningar (Elo & Kyngäs, 2007; Krippendorff, 2004). En viktig del i innehållsanalysen är kodningen, där texten kategoriseras inom olika teman och ämnesområden (Bergström & Boréus, 2012; Bryman, 2011). Studien utgick från en innehållsanalys, med en kvantitativ inriktning och en kvalitativ inriktning. Det finns enligt Lindgren (2011) i analys av texter, inga direkta skiljelinjer mellan kvantitativ och kvalitativ analys. Författaren beskriver att när man jobbar strikt kvalitativt där fokus ligger på att finna de underliggande betydelserna i texterna, leder ändå spåret in till kvantitativa termer, genom att exempelvis olika teman förekommer ofta. Lindgren, (2011) beskriver vidare att det är lika svårt att enbart arbeta med en ensidig kvantitativ textanalys. Ord kan räknas och bearbetas i en stor mängd, men i slutändan är det alltid meningsskapande och språk som analyseras. I den här studiens kvalitativa komponent av analysen tolkades innebörden och meningen i de olika texterna. Eftersom att denna tolkning gjordes, var studien en latent innehållsanalys, som i enlighet med Bryman (2011) och Hsieh och Shannons (2005) beskrivningar innebär en tolkning av innehållet. I den kvantitativa komponenten var analysen inriktad på vad det direkta innehållet visade, vilket enligt Bryman (2011) kan beskrivas som en manifest innehållsanalys.

Den här läromedelsanalysen utgick från det variationsteoretiska sättet att se på lärande i kombination med en latent och manifest innehållsanalys.

4.2 Materialinsamling och urval

Det insamlade materialet var matematikläroböcker för årskurserna 1-6. Insamlingen avgränsades till att analysera matematikläroböcker från fem olika läromedelsförlag. Studien avgränsas dessutom till att enbart undersöka baslärомedel för matematik från årskurserna 1-6. Med baslärомedel, menar jag, enbart matematikläroböcker som är avsedda som

huvudläromedel för matematikundervisningen, alltså inte böcker som fungerar som extraböcker, stenciler eller lärarhandledningar. Dessutom avgränsas studien till att enbart analysera tryckt material.

Urvalet för materialinsamlingen skedde i flera olika steg. I det första steget valdes fem läromedelsförlag ut. Förlagen var: Liber, Gleerups, Natur & Kultur, Studentlitteratur och Sanoma utbildning. Som jag tidigare beskrivit avgränsades studien till att enbart gälla tryckt material och baslärоböcker som ingår i serier för skolår 1-6. I ett andra urval valdes fem olika matematikläroboksserier ut, en serie per förlag. Detta urval gjordes med stöd från respektive förlags hemsida och information via mejl ifrån varje förlag. En annan aspekt som togs hänsyn till under detta urval var vilket material som jag skulle ha möjlighet att få tillgång till. En ytterligare och viktig aspekt att ta hänsyn till var att matematikläroboksserierna i största mån, utgår från rådande styrdokument. Följande matematikläroboksserier valdes ut:

- Eldorado, 1-6 (Natur & Kultur).
- Prima matematik, 1-3, och Prima Formula, 4-6 (Gleerups).
- Uppdrag: Matte – Mattedetektiverna, 1-3, och Uppdrag: Matte – Mattespanarna, 4-6 (Liber).
- Matte direkt, Borgen, 4-6 (Sanoma utbildning).
- Favorit Matematik, 1-5 (Studentlitteratur).

Tabell 1. Visar vilka böcker gällande årskurser som inkluderas i studien.

	1	2	3	4	5	6
Eldorado	x	x	x	x	x	x
Prima						
Prima Matematik	x	x	x			
Prima Formula				x	x	x
Uppdrag: Matte						
Mattedetektiverna	x	x	x			
Mattespanarna				x	x	x
Matte Direkt						
Safari						
Borgen				x	x	x
Favorit Matematik	x	x	x	x	x	

I Eldoradoserien fanns det tre böcker som inte följer rådande kursplan. Dessa böcker är Eldorado 2B, 3A och 3B. Efter kontakt med förlaget Gleerups fick jag informationen om att nya upplagor är på väg, men inte i bruk ännu. Eftersom att de nya upplagorna vid studiens början inte var utgivna, ansågs böckerna vara av relevans och har därför trots detta, inkluderats i studien. Mer detaljerad tabell finns i bilaga 1.

Analysen utifrån det utvalda materialet skedde i två steg. I det första steget granskades alla sidor i varje matematiklärobok översiktligt. I det andra steget närlästes materialet utifrån ett antal kriterier för inklusion. Kriterierna för inklusion var följande:

- Beskriva den kommutativa, associativa och/eller distributiva lagen, explicit eller implicit.
- Beskriva vänster-till-höger-principen och/eller prioriteringsregeln, explicit alternativt implicit.

Togs något av ovanstående upp i matematikläroboken, markerades sidnumret för att möjliggöra en senare analys där jag återgick till sidan för vidare granskning av materialet. Sidorna färgkodades för att få en tydlig överblick över vilka områden som var mest frekventa i de olika matematikläroboksserierna. Den kommutativa, associativa och distributiva lagen samt räkneregler fick i kodningen var sin färg.

4.3 Materialanalys

I den första analysen kategoriserades innehållet på respektive sida. Kategorierna för detta steg i analysen var följande: räknelag/räkneregler, uppgift, implicit/explicit, beskrivning, representation, dimension av variation, generalisering, matematisktområde

Den första kategorin *räknelag/räkneregler* innebar en beskrivning om vilken räknelag alternativt vilken räkneregel som beskrevs på sidan. I kategorin *uppgift,* analyserades hur och i vilket sammanhang räknelagen alternativ räkneregeln beskrevs, exempelvis att beräkna multiplikation. I kategorin *implicit/explicit,* ingick hur räknelagarna och räknereglerna beskrevs, om de är explicit beskrivna eller inte. Med explicit menar jag om de benämns med korrekt begrepp, och med implicit beskrivna, menar jag i ett annat sammanhang eller indirekt. I kategorin *beskrivning,* beskrivs hur uppgiften gällande räknelagen/räkneregeln framställs. Framställningen beskrivs i ett sammanhang tillsammans med ett numeriskt uttryck och/eller ett symboliskt uttryck. Beskrivningen kan även enbart innehålla text, numeriska uttryck eller genom symboliska uttryck. I kategorin *representation* menas att sammanfatta hur

räknelagen/räkneregeln beskrivs. I kategorin *generalisering* beskrivs i vilken mån räknelagen/räkneregeln generaliseras att gälla. *Dimension av variation* kategorin syftar till att analysera vilka variabler i beskrivningarna som varierades och vilka som var konstanta. Syftet med den sista kategorin *matematiskt område* var att finna mönster i vilka matematiska sammanhang de olika lagarna alternativ reglerna beskrivs och exemplifieras. I tabell 2 visas ett exempel på hur analysen gjordes utifrån kategorierna.

Tabell 2 Exempel på hur analysschemat tillämpats på Prima 1A

	Räknelag/Räkneregel	Uppgift	Implicit/Explicit	Beskrivning	Representation	Generalisering	Dimension av variation	Matematiskt område
s. 84	Kommutativa lagen	Addition	Implicit	Räkna med den största termen först	Genom text och tal. Term+term=summa Du kan addera termerna i vilken ordning du vill. Summan är lika. 1 + 2 = 3 2 + 1 = 3 Störst först!	Exempel. Genom att beskriva att termer kan beräknas i vilken ordning man vill.	Variation: termernas positioner. Konstant: Addition.	Addition, Talområde 0-10

Den kvantitativa analysen utgjordes av att beräkna frekvensen av hur den kommutativa, associativa och distributiva lagen och räknereglerna beskrivs explicit. Kriterierna för explicit benämning på sidan är att orden: *räknelagar, kommutativa lagen, kommutativitet, associativa lagen, associativitet, distributiva lagen, distribuera, räkneregler, prioriteringsregel,* ska nämnas. Ändelser på orden har det inte tagits hänsyn till. Orden kan benämnas som rubrik på sidan, som innehåll i en uppgift, som en beskrivning, som en pratbubbla för att påvisa något, som en faktaruta, som en viktigt att kunna ruta eller längst ner på sidan som stöd för läraren. I kategorin prioriteringsregel ingår även parenteser. När parenteser nämns i ett sammanhang som kan antas är i relation till prioriteringsregeln, räknas ordet, i den här studien, som en explicit benämning av prioriteringsregeln. Om parenteser nämns i ett annat sammanhang än vad som kan tolkas som prioriteringsregeln eller i förklaringen av prioriteringsregeln, räknas inte ordet in i studien. Frekvensen är sammanställd i tabell 3.

Tabell 3. Exempel på frekvensen av den explicita benämningen av de olika räknelagarna och räknereglerna för Eldoradoserien. Siffrorna i tabellen står för hur många gånger räknelagarna respektive räknereglerna nämns explicit. Vidare visas denna frekvens i diagram, då är böckerna e hopslagna för respektive årskurs. 1A och 1B blir 1, 2A och 2B, blir 2, 3A och 3B, blir 3, 4A och 4B, blir 4, 5A och 5B, blir 5, 6A och 6B,

	Räkne-lagar	Kommutativa lagen	Associativa lagen	Distributiva lagen	Räkneregler	Prioriterings-regel
1A	-	-	-	-	-	-
1B	-	-	-	-	-	-
2A	-	8	-	-	-	-
2B	-	2	-	-	-	-
3A	-	1	-	-	-	-
3B	-	-	-	-	-	-
4A	-	3	3	-	-	-
4B	-	2	2	3	1	-
5A	-	-	-	-	6	-
5B	-	-	-	-	-	-
6A	1	-	-	-	1	1
6B	-	-	-	-	-	1

4.4 Validitet och reliabilitet

Eftersom studien har koppling till både kvantitativ och kvalitativ forskning, till övervägande del är kvalitativ, beskrivs begreppen validitet och reliabilitet. Reliabilitet innebär kortfattat, enligt Bryman (2011), tillförlitlighet. Reliabilitet berör på något sätt frågan om undersökningen blir densamma om den genomförs igen (Bryman, 2011). I studien har reliabilitet eftersträvats i den mån att tydligt förklara vilka steg som har gjorts i urval, datainsamling och analys. Eftersom att studien till stor del har sin grund i en kvalitativ forskningsansats är det svårt att garantera fullständig reliabilitet. Detta på grund av analys av det valda materialet, utgörs av mina tolkningar. I den kvantitativa delen av undersökningen, där frekvensen av explicita benämningar av räknelagar, kommutativa lagen, associativa lagen, distributiva lagen, räkneregler och prioriteringsregeln, är det hög reliabilitet. Detta på grund av att det inte ska vara tolkningsbart vad som menas med den explicita benämningen, och samma resultat och frekvens ska synliggöras vid en annan undersökning. Begreppet validitet som innebär en säkerställning av att det som mäts stämmer med det som avses att mätas (Bryman, 2011). Även här är det svårt att fastställa total validitet, då mätning i en kvalitativ forskning, enligt Bryman (2011) inte är forskarens huvudsakliga fokus.

5 Metoddiskussion

Materialet i den här studien har analyserats genom en manifest och latent innehållsanalys. Att komma fram till vilken analysmetod som passade bäst för studien var inte enkelt. Genom processens gång har olika metoder som exempelvis diskursanalys, undersökts men inte passat för studiens syfte. Genom att den kvantitativa analysen utgjordes av en manifest innehållsanalys, blev det kvantitativa resultat av beskrivande karaktär utifrån det som direkt uttrycks i texten. En manifest innehållsanalys, passade dock bara in på den kvantitativa delen av studien. Efter en tolkning krävdes av beskrivningarna i matematikläroböckerna innebar det att den kvalitativa delen utgjordes av en latent innehållsanalys. Fördelarna med en latent innehållsanalys i den kvalitativa delen av studien, är att det har varit möjligt att tolka meningarna och eftersom att det inte går att utläsa den exakta meningen med vad läroboksförfattarna vill uttrycka i sina beskrivningar, var det en förutsättning att kunna tolka innebörden.

Att göra en kvantitativ och kvalitativ studie, var till en början inte en självklarhet. Studiens inriktning var till en början att göra en kvalitativ innehållsanalys, utan inslag av en kvantitativ analys. Desto längre processen gick, desto tydligare blev det att det var i princip omöjligt att inte utforma undersökningen genom att även att analysera kvantitativ data. Detta är precis det som Lindgren (2011) beskriver om att det inte finns några direkta skiljelinjer mellan kvantitativ och kvalitativa analyser av text. Oavsett om ursprungstanken är att göra en kvantitativ eller kvalitativ textanalys, är det svårt att enbart hålla sig strikt till en i analyser av text.

Genom en kodning av ett större material, har ett resultat vuxit fram. Materialet har delats in i olika kategorier. Dessa kategorier har under processens gång förändrats, nya har vuxit fram och andra har tagits bort och jag försökt att finna olika mönster som är övergripande för alla läroböcker. Utifrån de olika kategorierna, skapades slutligen två teman, som också är två av resultatets rubriker. Dessa teman är samband och uppdelning samt generaliseringsformer. Det kan diskuteras hur studien uppfyller reliabilitet. Jag anser att reliabilitet uppfylls i den kvantitativa delen av studien, om kriterierna för den explicita benämningen följs. För den kvalitativa delen av studien, är det svårt att säga att fullständig reliabilitet uppnåddes. För urvalet av datainsamlingen, kan reliabilitet anses gälla, då det finns kriterier för inklusion. Däremot, eftersom att jag i studien använde mig av en latent innehållsanalys, har tolkning av materialets innebörd och mening gjorts. En tolkning är väldigt individuell, och går inte att utföras på exakt samma sätt.

6 Frekvensen av räknelagarna och räknereglerna

Nedanför följer fem diagram. Diagrammen visar en sammanställning över hur ofta de olika räknelagarna och räknereglerna explicit uttrycks i respektive läroboksserie. För att göra diagramet tydligt har frekvensen från de olika böckerna för varje årskurs satts samman.

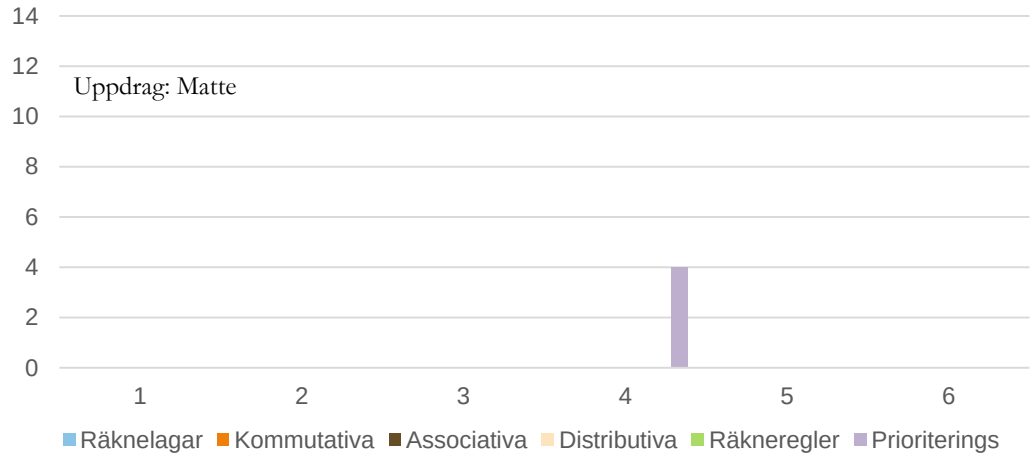


Diagram 1. Beskriver den explicita benämningen av matematikläroboksserien Uppdrag: Matte. Diagram i färg.

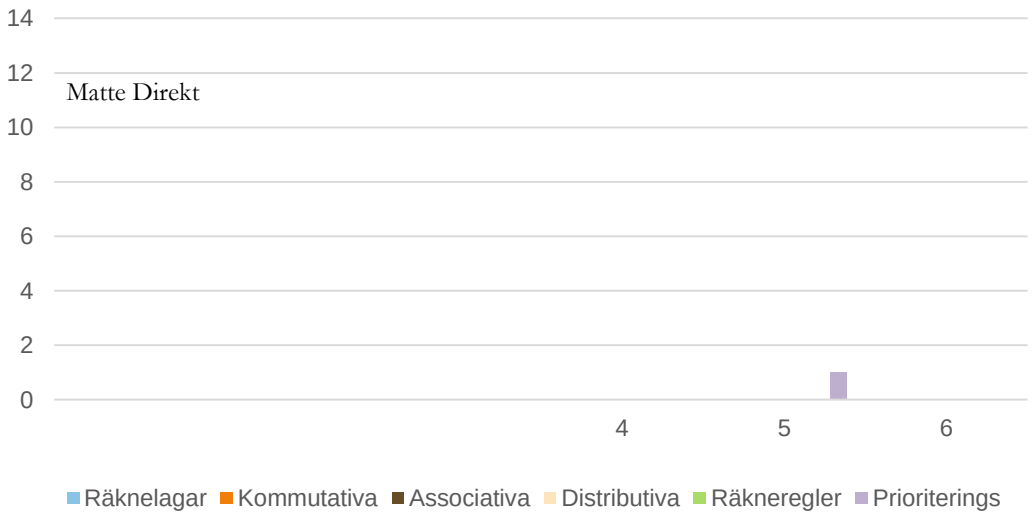


Diagram 2. Beskriver den explicita benämningen av räknelagar och räkneregler för matematikläroboksserien Matet Direkt. Här är årskurserna 1-3 borttagna, då dessa böcker inte höll på kriterierna för inklusion. Diagram i färg.

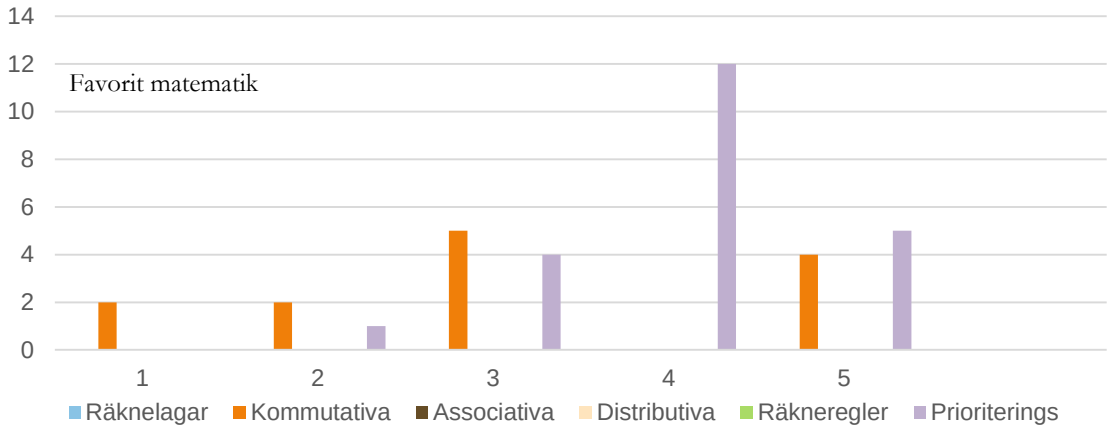


Diagram 3. Beskriver den explicita benämningen av räknelagar och räkneregler i matematiklärobokserien Favorit Matematik. I diagrammet har årskurs 6 tagits bort, då dessa inte har analyserats på grund av att de vid tillfället av studien, inte var utgivna. Diagram

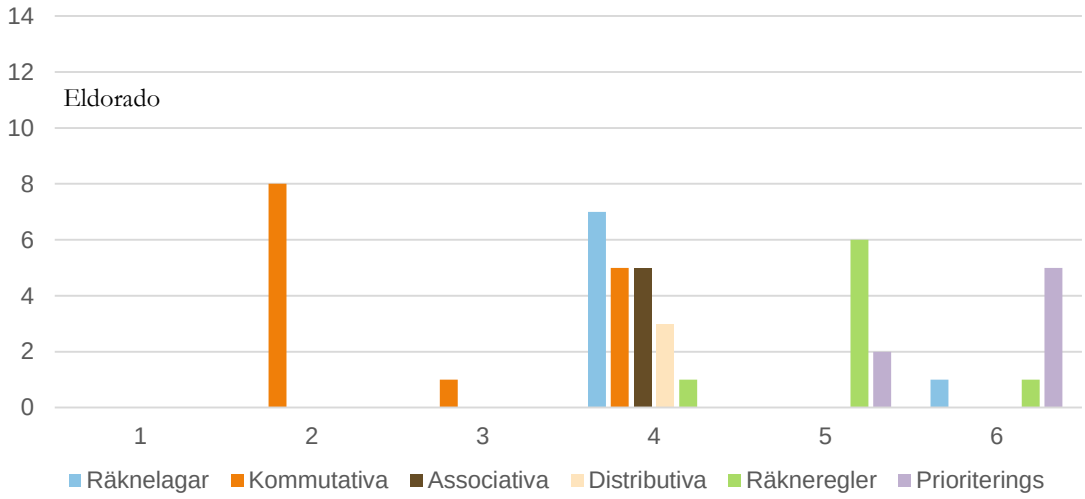


Diagram 4. Visar på den explicita benämningen av räknelagar och räkneregler i läroboksserien Eldorado. Diagram i färg.

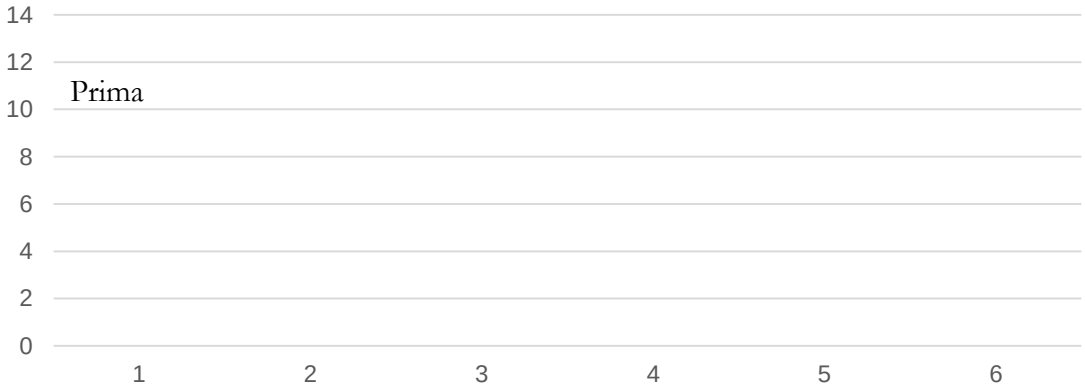


Diagram 5.. I läroboksserien Prima förekommer ingen explicit beskrivning av räknelagarna eller räknereglerna.

Resultatet visar, utifrån den kvantitativa analysen av matematikläroböckerna att prioriteringsregeln dominerar den explicita benämningen. Där prioriteringsregeln nämns ett fåtal gånger, och inga andra explicita benämningar görs, är det ofta i andra sammanhang, än direkta beskrivningar av prioriteringsregler. Förekomsten i *Matte direkt – Borgen* (diagram 2) är intressant att nämna. Prioriteringsregeln nämns som ett begrepp i introduktionen av ett kapitel, men utan förklaring vad regeln innebär. Utifrån sammanhanget kan prioriteringsregeln anses vara viktig för kapitlet i boken och prioriteringsregelns egenskaper nämns och beskrivs, men beskrivningarna utelämnar den explicita benämningen av regeln. I *Uppdrag: Matte* (diagram 1) har parenteser räknats in i prioriteringsregeln då de nämnts som att ha högst prioritet. I *Favorit Matematik* (diagram 3) är även så fallet, parenteser har räknats in till prioriteringsregeln.

Resultatet av den kvantitativa analysen, visar att den mest förekommande räknelagen är den kommutativa lagen. Det är däremot, endast *Favorit Matematik* och *Eldorado* som nämner den kommutativa lagen explicit. Lagen nämns, sammantaget, flest gånger i årskurs 2, och minst gånger i årskurs 1. Den kommutativa lagen nämns i böckerna för årkurs 6. Vanligast är den explicita benämningen från årskurserna 1-4, men förekommer även i böckerna för årskurs 5 (Favorit Matematik). Att beskriva räkneregler och prioriteringsregler är vanligast i böckerna för årskurserna 4 och 5, men nämns också i böcker för årskurserna 2, 3 och 6. Som diagrammen 1-5 visar nämns den associativa lagen explicit enbart i en läroboksserie (Eldorado), och där enbart i en årskurs. I samma serie och årskurs nämns också den distributiva lagen. Även den distributiva lagen nämns enbart i denna serie. Den läroboksserie som inte beskriver något av de olika räknelagarna eller räknereglerna explicit är Prima Matematik, se diagram 5.

6.1 Diskussion

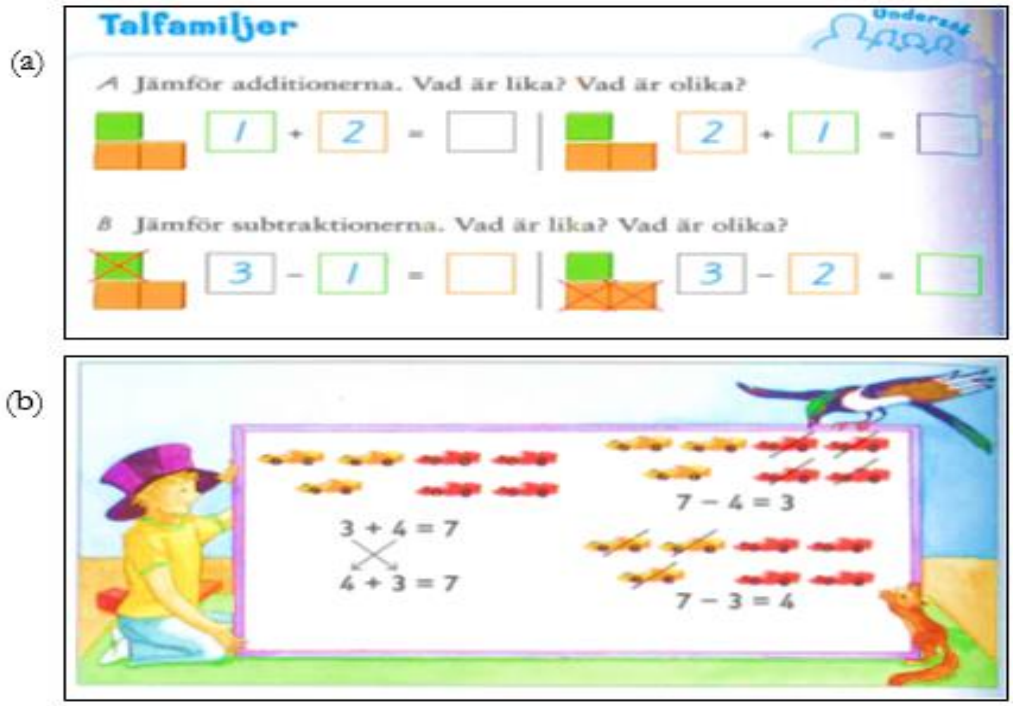
Det går självklart alltid ifrågasätta om det är relevant att beskriva den explicita benämningen av de olika räknelagarna och räknereglerna, och vilket syfte det fyller för studien. Men, med tanke på vad TIMSS undersökningen (Skolverket, 2011b) visar på angående vilken relevans matematikläroboken har för matematikundervisningens innehåll, anser jag att det är viktigt att undersöka i vilken utsträckning läroböckerna faktiskt explicit nämner de olika lagarna och reglerna. Man kan befara att elever inte får erfara explicit undervisning om den associativa och distributiva lagen om de inte ens nämns vid namn i läroböckerna. Prioriteringsregeln nämns dock uttryckligen flera gånger (de ljuslila spalterna i diagram 1-5). Man kan därför ställa frågan

om den skall anses som mer relevant, eller om den förekommer oftare i böckerna för att den är enklare att förklara i text och numeriska uttryck. Att den kommutativa lagen är den mest frekventa uttrycka räknelagen, var dock inte förvånande. Av de tre grundläggande räknelagarna är det den kommutativa lagen som det finns mest forskning kring. En anledning till bristen av att associativa lagen inte beskrivs uttryckligen, kan bero på att de associativa egenskaperna enligt Canobi et al. (2002) är svårare att förklara.

7. Samband och uppdelning av talsorter för räknelagarna

I denna del presenteras resultatet av hur de olika aritmetiska räknelagarna beskrivs som samband och genom uppdelningar av tal. De exempel som beskrivs är vanligt förekommande strukturer för liknande beskrivningar.

Att beskriva samband mellan addition och subtraktion genom att benämna detta samband som ”talfamiljer” är i de analyserade böckerna, ett vanligt förekommande sätt. Beskrivningarna kan tolkas som att ha samma innebörd som del-del-helhet, triader och samband mellan räknesätt.

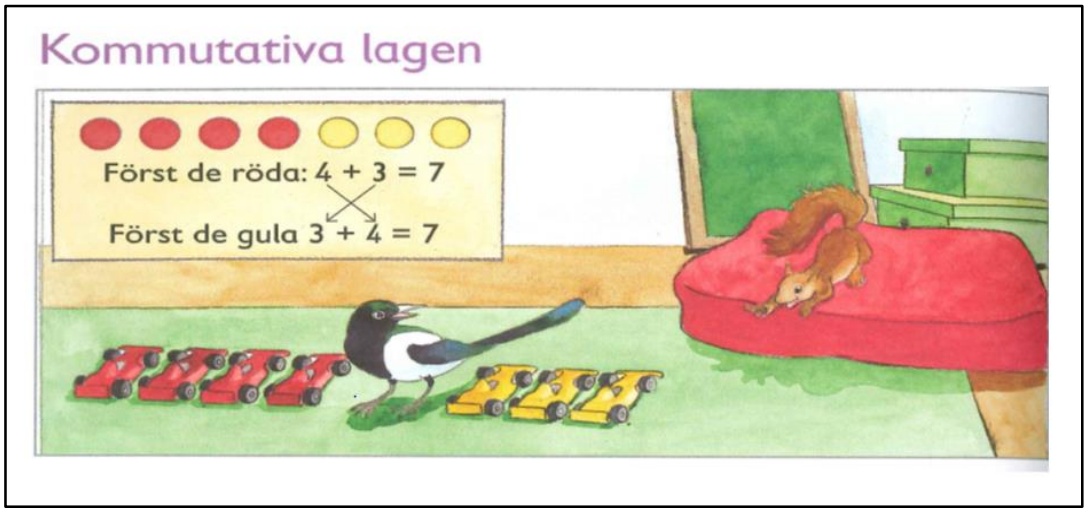


Figur 1. Beskriver sambandet mellan addition och subtraktion på två olika sätt. (a) Exempel ur Eldorado 1A (Olsson & Forsbäck, 2015, s.62). (b) Exempel ur Mera Favorit Matematik 1A (Haapaniemi, Mörsky, Tikkanen, Vehmas & Voima, 2013a, s. 98). Figur i färg.

Figur 1 beskriver sambandet mellan addition och subtraktion. I detta samband kan kommutativa egenskaper urskiljas för additionsuttrycken. Beskrivningen i figur 1a är genom talfamiljer. I talfamiljen i beskrivningen ingår talen $1, 2$ och 3. Att additionen uppfyller kommutativa egenskaper är inget som beskrivs i ord, men genom de kuber som är staplade på varandra, ges möjligheten att urskilja att staplarna och kuberna är konstanta oavsett vilket

additionsuttryck som räknas först. I figur 1b är sambandet mellan addition och subtraktion, men även här är det beskrivet genom talfamiljen, 3, 4 och 7. Det som är intressant i figur 1, är att i de numeriska uttrycken för addition, byter termerna plats. I beskrivningen förändras däremot inte ordningen på hur konkretiseringen av, i detta exempel, kuberna och bilarna är positionerade. I figur 1a, förblir staplarna konstanta i additionsuttrycken. I figur 1b är bilarna strukturerade på samma sätt, och förändras inte när termerna i additionsuttrycket gör det. I beskrivningarna för samband mellan addition och subtraktion, oavsett om det benämns som talfamiljer eller inte är den gemensamma nämnaren additionens kommutativitet.

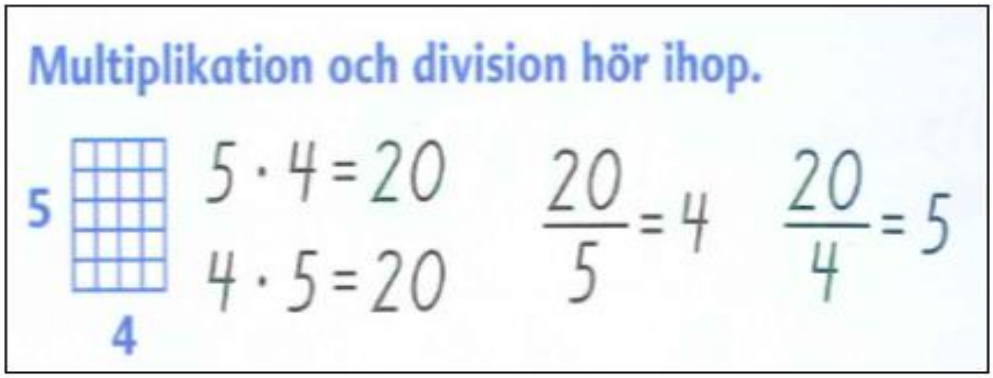
De sätten som beskrivs i figur 1, är exempel på vanligt förekommande sätt att beskriva sambandet mellan addition och subtraktion, i de analyserade matematikläroböckerna. Sambandet mellan multiplikation och division, beskrivs på liknande sätt och kan även här härledas till talfamiljer och del-del-helhessrelationen.



Figur 2. Exempel ur Mera Favorit Matematik 1A (Haapaniemi, Mörsky, Tikkanen, Vehmas & Voima, 2013a, s.90). Figuren beskriver den kommutativa lagen för addition genom konkretisering och numeriska uttryck. Figur i färg.

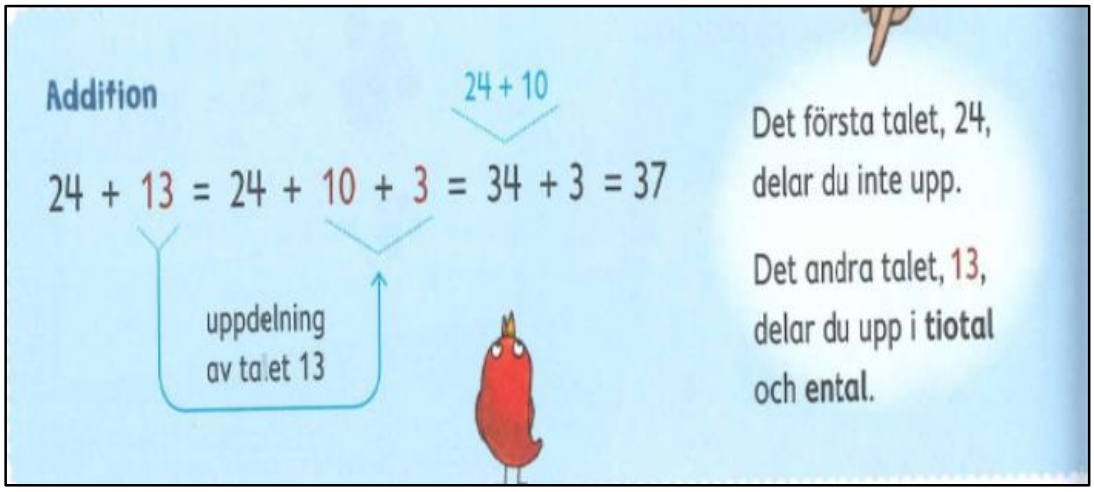
Det finns likheter mellan beskrivningarna i figur 1b och vad som beskrivs i figur 2. Likheten mellan figurerna är att termerna och summan är desamma i de olika uttrycken och att det är samma talfamilj som beskrivs. Skillnaden ligger i att figur 1b, beskriver talfamiljen som sambandet mellan addition och subtraktion. I figur 2 beskrivs enbart addition, och detta uttryck kopplas samman med den explicita benämningen av den kommutativa lagen. Exemplen i båda figurerna kommer från samma bok (Mera Favorit Matematik, 1A). Figur 2, kommer i boken före figur 1b. Med den ordningen i åtanke, tolkar jag det som att det finns

en tanke med att beskriva strukturen för den kommutativa lagen, och sedan använda samma struktur för sambandet mellan addition och subtraktion.



Figur 3. Exempel ur Prima Matematik 3A (Brorsson, 2010, s.16) som visar på sambandet mellan multiplikation och division.

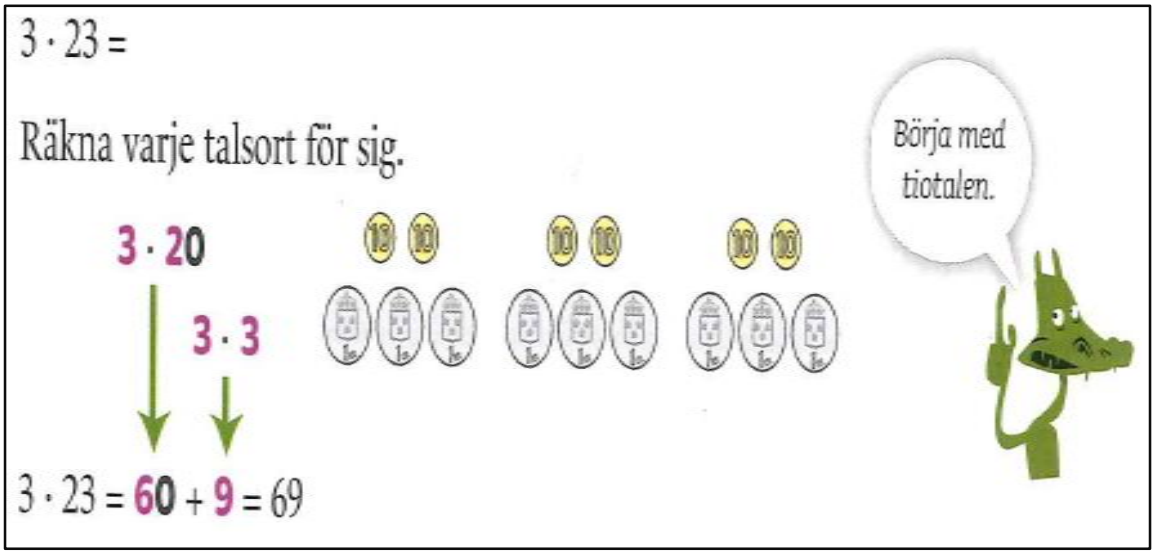
Det som illustreras i figur 3, är sambandet mellan multiplikation, vilket också kan benämnas som en talfamilj för talen 4, 5 och 20. Det som beskrivs är multiplikationens kommutativitet Detta beskrivs genom ett rutnät och genom att faktorerna byter plats. Beroende av vilket håll rutnätet betraktas från, ses rutorna i olika ordning, men antalet rutor är detsamma. På samma sätt, beskrivs det numeriska uttrycket för multiplikation, faktorernas ordning spelar ingen roll, produkten är densamma. Beskrivningen innefattar sambandet mellan talen i en talfamilj, vilket i studien tolkas som att påvisa kommutativa egenskaper för multiplikation. Detta sätt att beskriva multiplikation, är i studien, vanligt förekommande.



Figur 4. Exempel ur Mattedetektiverna 2A (Kavén & Persson, 2011c, s.66). Figuren visar på hur additionsuttryck kan delas upp och omgrupperas för att förenkla beräkningen. Figur i färg.

Figur 4 beskriver ett additionsuttryck där en av termerna delas upp i tiotal och ental. Detta sätt att beskriva förutsätter enligt min tolkning, kunskap om att tal över tiotal kan delas upp i talsorter och omgrupperas för att utföra en enklare beräkning. Genom uppdelning av termer och omgruppering används additionens associativitet $24 + 13 = 24 + (10 + 3) = (24 + 10) + 3$. I de analyserade matematikläroböckerna, är det vanligt att beskriva beräkning av additionsuttryck med större tal genom uppdelning av talsorter och omgrupperingar. Beskrivningar finns även i matematikläroböckerna, där uppdelningen av termer är större än ett tiotal.

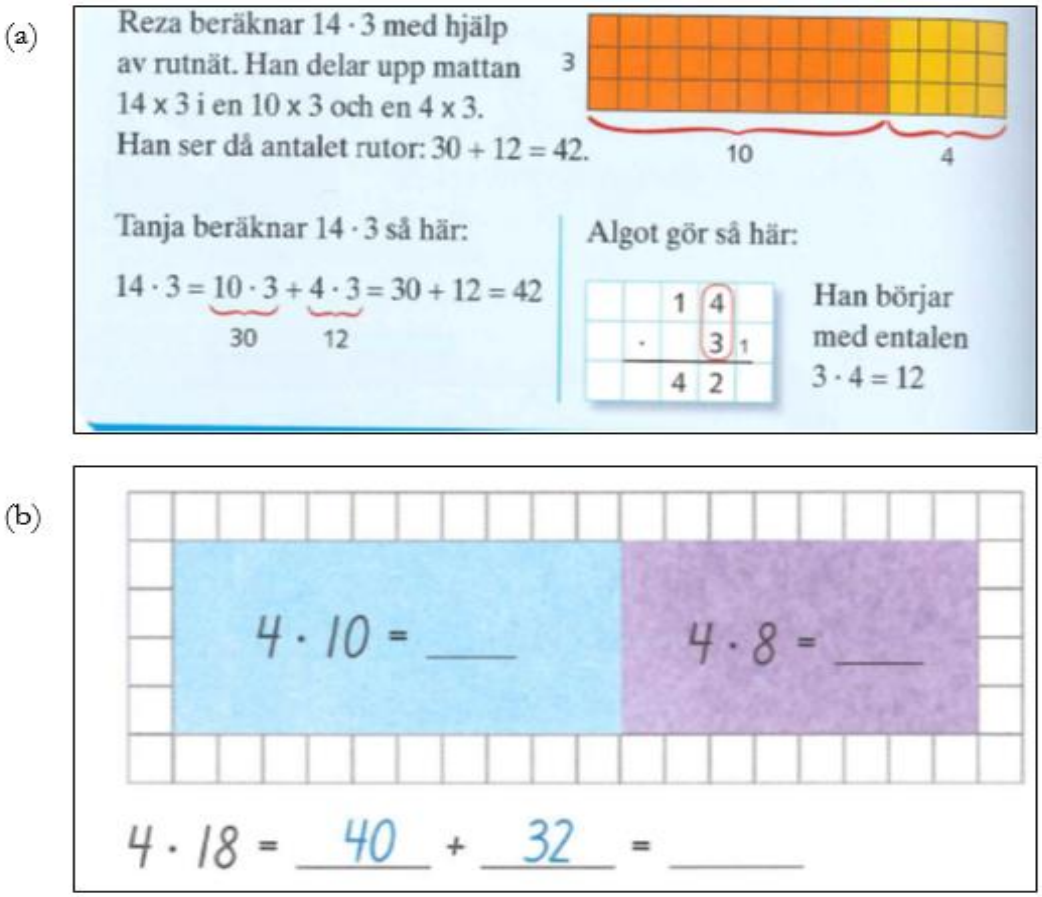
Att beskriva en uppdelning av talsorter görs även vid multiplikationsuttryck. Vid uppdelning av talsorter i multiplikation byggs uttrycket ut ytterligare genom att använda addition. Vid beräkningar där en faktor delas upp i olika talsorter tillämpas distributiva egenskaper. Figur 5 beskriver beräkning med uppdelning i talsorter i ett uttryck med multiplikation.



Figur 5. Exempel ur Matte direkt – borgen 4A (Falck, Picetti & Sundin, 2011, s.110) där ett multiplikationsuttryck beräknas genom uppdelning av talsorter. Figur i färg.

Figur 6 visar ytterligare exempel på hur exemplifieringar av multiplikation, där en av faktorerna är ett tiotal, delas upp i talsorter. I figur 6a, är det ”Tanja” som beräknar med distributiva egenskaper. I beräkningen delar hon upp faktorn 14 till tiotal och ental, och beräknar sedan uppgiften som $14 \times 3 = (10 + 4) \times 3 = 10 \times 3 + 4 \times 3 = 30 + 12 = 42$. Beskrivningen av hur ”Tanja” räknar visar dock inte på det andra ledet. Min tolkning är att det andra ledet förekommer, men synliggörs inte i exemplet i boken. Även den beräkning som ”Reza” gör,

innefattar distributiva egenskaper. ”Reza” använder ett rutnät för att dela upp talet 14, till tiotal och ental. Beräkningen är i princip densamma som den som ”Tanja” gör, men uttrycks inte på samma sätt. Det som kan urskiljas i beskrivningen är att faktorn 3 distribueras över termerna 10 och 4.



Figur 6. (a) exempel ur Prima 4 (Sjöström, Sjöström & Johansson, 2011, s.130). (b) exempel ur Eldorado 3B (Olsson & Forsbäck, 2010b, s.72). Figuren visar hur multiplikation delas upp i talsorter. Figur i färg.

Att beräkna multiplikation genom att dela upp i talsorter i ett rutnät beskrivs också i figur 6b. I beskrivningen görs uppdelningen i ”mattor” som är placerade i ett rutnät. Enligt min tolkning, som i beskrivningen inte tydligt synliggörs, är att följande beräkning görs $4 \times 18 = 4 \times (10 + 8) = 4 \times 10 + 4 \times 8 = 40 + 32$. Det andra ledet, är i min tolkning, underförstått, och påvisar hur faktorn 4, kan tänkas distribueras. Det tredje ledet görs i respektive matta, och det sista ledet står tillsammans med det första ledet i uttrycket. Den beskrivningen som görs i figur 6b, med uppdelning till talsorter och exemplifiering av en areamodell inbegriper distributiva egenskaper.

7.1 Diskussion

Analysen av hur läroböckerna beskriver sambandet mellan tal och uppdelning av tal indikerar att på att kommutativitet, associativitet och distributivitet beskrivs i sammanhang med samband mellan räknesätten och uppdelning av talsorter på olika sätt. Det vanligaste sättet att beskriva kommutativitet, är framförallt genom att påvisa sambandet mellan addition och subtraktion som ofta benämns som talfamiljer (se figur 1). Sambandet mellan addition och subtraktion samt mellan multiplikation och division, och talfamiljer, bygger på samma princip som del-del-helhetsrelationen. Man skulle kunna hävda att talfamiljer är ett naturligt sätt att tala om kommutativitet. Så har, till exempel, Canobi (2005) gjort genom att peka på det nära sambandet mellan talfamiljer och kommutativa lagen.

Det andra sättet räknesätten addition och multiplikation beskrivs genom är att dela upp tal större än tio i talsorter (figur 4 och 5). När tal delas upp i talsorter i matematikläroböckerna, beskrivs inte associativa eller distributiva egenskaper. De exempel som framkommit i studien, som använder uppdelning av talsorter inom addition, innefattar en förändring i operationsordningen. Detta sätt att beskriva menar Canobi et al. (2002) hänger samman med additions associativa egenskaper, då addition kan delas upp och kombineras på olika sätt. I första ledet, om uttrycket enbart innehåller en operation, exempelvis $7 + 13$, är det mer lämpligt att använda kommutativa egenskaper så att störst kommer först. Men om man istället vill dela upp talet 13 behöver uttrycket förändras till att innehålla tre termer $7 + 13 = 7 + (10 + 3)$ och associativa egenskaper är användbara.

Utifrån den generella beskrivningen av distributivitet, anser jag att när det kommer till uppdelning av talsorter för multiplikation, inbegriper förklaringarna distributiva egenskaper. Om vi till exempel tittar på uttrycket 3×23. Genom att dela upp faktorn 23 till tiotal och ental, förändras uttrycket och beräknas på följande sätt $3 \times (20 + 3) = 3 \times 20 + 3 \times 3 = 60 + 9 = 69$. När distributiva egenskaper beskrivs antingen implicit eller explicit är det genom mer abstrakta förklaringar och i många fall enbart som räkneuppgifter. De konkretiseringar som görs för distributiva egenskaper är ofta genom en areamodell, ett sådant exempel visas i figur 6. Detta sätt är ofta beskrivet i matematikforskning där till exempel Ding och Li (2014) beskriver att ett effektivt sätt att beskriva distributivitet är genom areamodeller.

En intressant aspekt jag funnit under analysen av materialet, men till en början inte uttryckligen inte var ute efter, har att göra med *hur* räknesättens egenskaper beskrivs. För de kommutativa

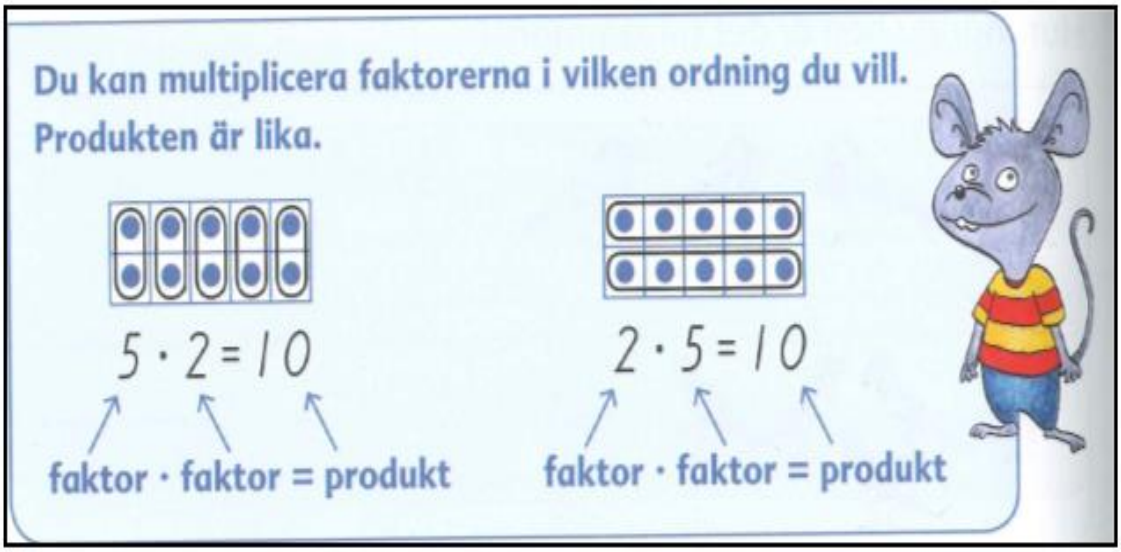
egenskaperna, är det generellt sett, mycket konkretisering med hjälp av elevnära föremål. Dessutom hålls talen låga, se figur 1. Däremot när det gäller exemplifieringen av associativa och distributiva egenskaper beskrivs de med tal större än tio och med mindre konkreta, bildmässiga exempel, se figur 4 och 6. Kanske är det avsaknaden av elevnära bilder som gör att förklaringarna, trots att de inte är abstrakta, nog ändå kan betraktas som mer abstrakta än de förklaringar som presenteras för kommutativa egenskaper. Warren (2003) beskriver att elevers svårigheter gällande den associativa lagen kan beror på att de uppgifter som behandlar associativitet, är svårare. Det kanske är precis det som jag också kan se i min data, förklaringarna är mer abstrakta och kanske därför kan anses svårare för associativa lagen än för kommutativa lagen. De uppgifter elever möter i matematikläroböcker som kan antas innehålla associativa egenskaper är i regel mer komplexa, och innehåller vanligtvis åtminstone ett tiotal, medan uppgifter gällande kommutativitet där resultatet sällan överstiger tiotal. På samma sätt beskriver Ding och Li (2014) att distributiva egenskaper ofta beskrivs i sammanhang som är mer abstrakta och genom representationsformer som saknar kopplingar till elevers vardag.

7.2 Didaktiska implikationer

Utifrån resultatet kan jag urskilja ett antal didaktiska implikationer. De är att man i matematikundervisningen kan diskutera räknelagarna, utan att fokus behöver ligga till en början, på att lära eleverna de symboliska förklaringarna, eller de till synes krångliga namnen. Det kan gynna elevers förståelse för räknelagarna om lagarna generellt beskrivs genom numeriska uttryck, innan de lär sig den symboliska beskrivningen. Eftersom att räknelagarna kan härledas till olika bekanta räknestrategier för eleverna, går det att diskutera lagarnas egenskaper och nämna dem explicit vid namn, men fokus bör ligga på det som eleverna redan vet. Det som kan vara viktigt att lyfta fram, är att när räknelagarna explicit beskrivs, är att tänka på *hur* de beskrivs. Den associativa lagen och den distributiva lagen, kan i likhet med den kommutativa lagen, beskrivas genom konkretisering och bildmässiga exempel. Detta kan leda till att den associativa och distributiva lagen framstår som mindre abstrakta och enklare att förstå.

8. Beskrivning av de generella egenskaperna för räknelagarna och räknereglerna

Följande kapitel är en beskrivning är hur de olika räknelagarna och räknereglerna generaliseras att gälla. Jag skiljer på beskrivningsformerna på två olika sätt. Det ena sättet är om lagarna eller reglerna beskrivs som generella. Med generella menar jag att lagen/regeln beskrivs gälla för alla uttryck med liknande struktur. Det andra sättet är om räknelagarna eller räknereglerna beskrivs som ett exempel för en uppgift. Med exempel, menar jag att lagen/regeln beskrivs gälla enbart för ett visst uttryck.

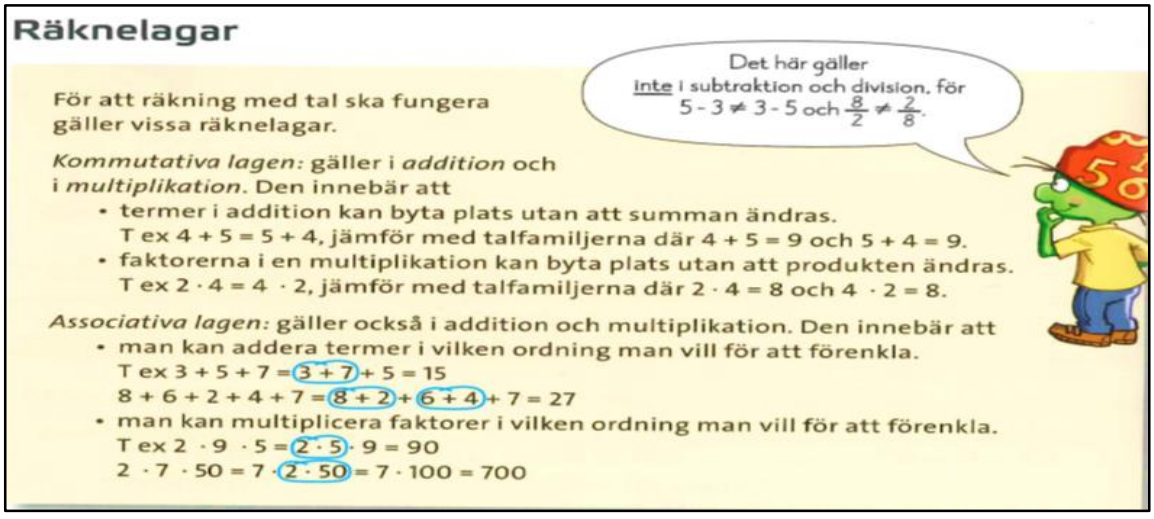


Figur 7. Exempel ur Prima 2b (Brorsson, 2013d, s.62) som visar implicit på kommutativitet i multiplikation.

Figur 7 visar ett vanligt förekommande sätt att beskriva kommutativa egenskaper för multiplikation, utan att explicit benämna kommutativa lagen, kommutativa egenskaper eller kommutativitet. Kommutativa egenskaper för multiplikation beskrivs genom att faktorer kan multipliceras i vilken ordning som helst, produkten är ändå densamma. Detta konkretiseras genom att visa på hur man kan räkna antingen antal rader gånger antalet kolumner eller räkna antalet kolumner gånger antalet rader. Produkten är samma oavsett vilken sätt man väljer. Detta sätt att beskriva multiplikation på, gör att kommutativa egenskaper kan antas gälla generellt för räknesättet multiplikation.

Figur 8. Exemplet ur Eldorado 2A (Olsson & Forsbäck, 2015c, s.108), visar på kommutativa lagen för multiplikation och addition explicit.

Figur 8 visar på samma princip, genom förklaringen, som i figur 7. Beskrivningen innehåller faktorernas och termernas oberoende av ordning, att produkten respektive summan är lika. Det som skiljer figurerna åt, är att i figur 8 beskrivs den kommutativa lagen explicit, och addition ingår i beskrivningen. Det som beskrivs som kommutativa lagen, kan genom beskrivningarna antas vara generella för alla räknesätt med antingen multiplikation eller addition.



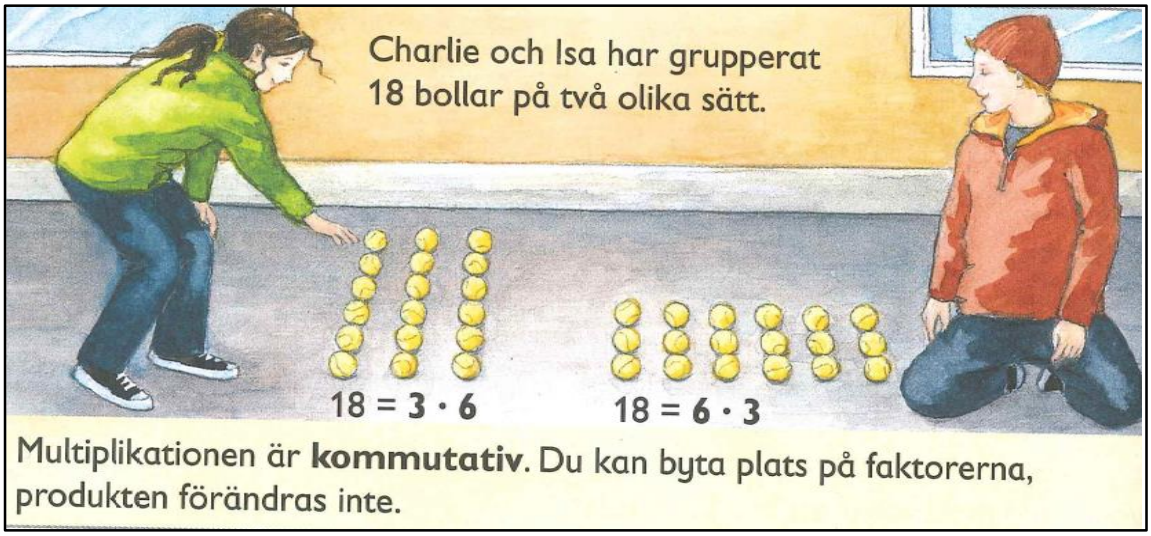
Figur 9. Exempel ur Eldorado 4A (Olsson & Forsbäck, 2011a, s.52) där den kommutativa och associativa lagen beskriva explicit.

Räknelagar står som rubrik i figur 9. I exemplet beskrivs den kommutativa lagen och den associativa lagen. Den kommutativa lagen förklaras gälla för addition och multiplikation. I addition kan termer byta plats utan att det förändrar summan $4 + 5 = 5 + 4$. Denna förklaring hänvisas till talen inom talfamiljen 4, 5 och 9. Ytterligare beskrivning görs, men för multiplikation där faktorerna kan byta plats, utan att produkten ändras $2 \times 4 = 4 \times 2$. Även

här hänvisas förklaringen till talen inom talfamiljen, 2, 4 och 8. När den kommutativa lagen beskrivs görs det utan att varken termer, faktorer, summan eller produkten är ett tiotal.

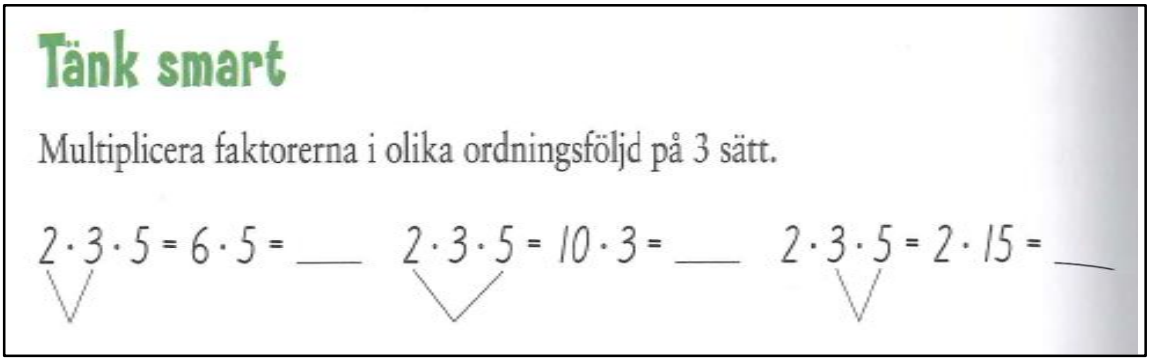
Den associativa lagen beskrivs också gälla för addition och multiplikation. Lagen beskrivs som en egenskap som förenklar uttrycket, genom att operera med termer eller faktorer i vilken ordning man vill. Det här beskrivs som för addition $3 + 5 + 7 = (3 + 7) + 5 = 15$ och $8 + 6 + 2 + 4 + 7 = (8 + 2) + (6 + 4) + 7$. För multiplikation är det liknande princip som beskrivs $2 \times 9 \times 5 = (2 \times 5) \times 9 = 90$ och $2 \times 7 \times 50 = 7 \times (2 \times 50) = 7 \times 100 = 700$. Den beskrivningen som görs i additionsuttrycken och multiplikationsuttrycken inbegriper också kommutativa egenskaper, då termerna och faktorerna byter plats i uttrycken. I beskrivningen av den associativa lagen är produkten och summan alltid större än ental.

Beskrivningarna som görs i figur 9 beskrivs som generella egenskaper för räknesätten addition och multiplikation.



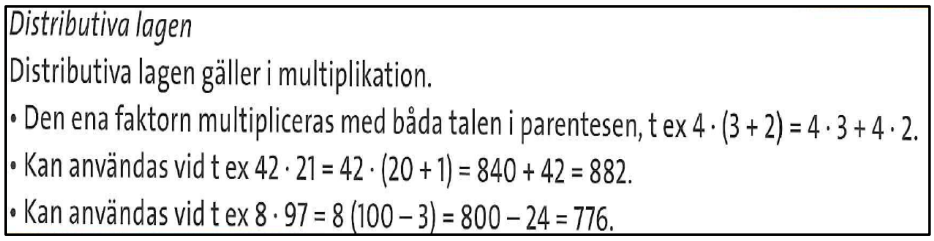
Figur 10. Exemplet ur Favorit Matematik 3A (Karppinen, Kiviluoma & Urpiloa, 2013, s.74) beskriver multiplikationens kommutativitet. Figur i färg.

I figur 10 beskrivs multiplikationen som kommutativ. Beskrivningen och konkretiseringen liknar den beskrivning som görs i figur 7. I multiplikation kan faktorer multipliceras i vilken ordning som helst. Konkretiseringen i figur 10, görs genom att visa genom rader med bollar, och att oavsett på från vilket håll man räknar ifrån, är bollarna lika i antal, vilket är likhet med hur konkretiseringen görs i figur 7. Figur 10 beskriver däremot i sin förklaring att multiplikationen är kommutativ. Denna beskrivning sker i bestämd form, vilket kan antas innebära att multiplikationen $18 = 3 \times 6$ och $18 = 6 \times 3$, är kommutativ, inte räknesättet multiplikation. Lagen beskrivs inte som att gälla generellt för räknesättet multiplikation.



Figur 11. Exemplet ur Eldorado 3A (Olsson & Forsbäck, 2010a, s.106) beskriver hur faktorer kan multipliceras i olika ordningsföljd på tre olika sätt.

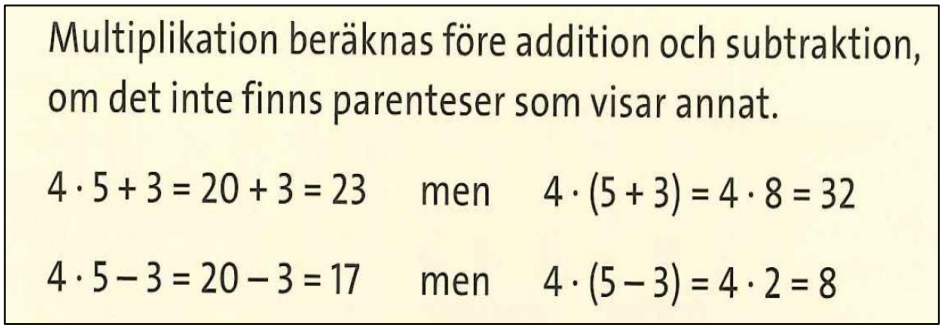
Det som beskrivs i figur 11 är att operationsordningen inte spelar någon roll för beräkningen av uttrycket $2 \times 3 \times 5$. Dessutom förändras inte ordningen på faktorerna. I beskrivningen för figur 11 är min tolkning att tanken är att påvisa associativa egenskaper hos multiplikation, att ordningen inte spelar någon roll. Detta är tydligt i det första uttrycket $(2 \times 3) \times 5 = 6 \times 5 = 30$, och i det sista uttrycket $2 \times (3 \times 5) = 2 \times 15 = 30$. Här förändras inte ordningen, varken i första ledet eller i andra ledet. I det mittersta uttrycket $2 \times 3 \times 5 = 10 \times 3 = 30$, är det inte möjligt att synliggöra i vilken ordning som operationen utförs i genom parenteser. Det som sker i uttrycket är att faktorernas position inte förändras i första ledet. Men eftersom att det är faktorn 2 och faktorn 5 som multipliceras, sker på något vis en ändring. Det som sker är i nästa led är att 10 är en produkt av faktorn 2 och 5, vilket kan tänkas innebära en förflyttning av talen.



Figur 12. Exemplet ur Eldorado 4B (Olsson & Forsbäck, 2011b, s. 154), beskriver den distributiva lagen explicit.

I figur 12, beskrivs den distributiva lagen gälla för både multiplikation med addition och multiplikation med subtraktion, men detta beskrivs enbart i de numeriska uttrycken. Den förklaring som ges är att distributiva lagen gäller i multiplikation. Förklaringen beskriver att den ena faktorn multipliceras med både talen i parentesen. I de två andra exempeluttrycken som beskrivs i figuren, beskrivs uttrycken i ett ytterligare steg, med två faktorer. I andra steget

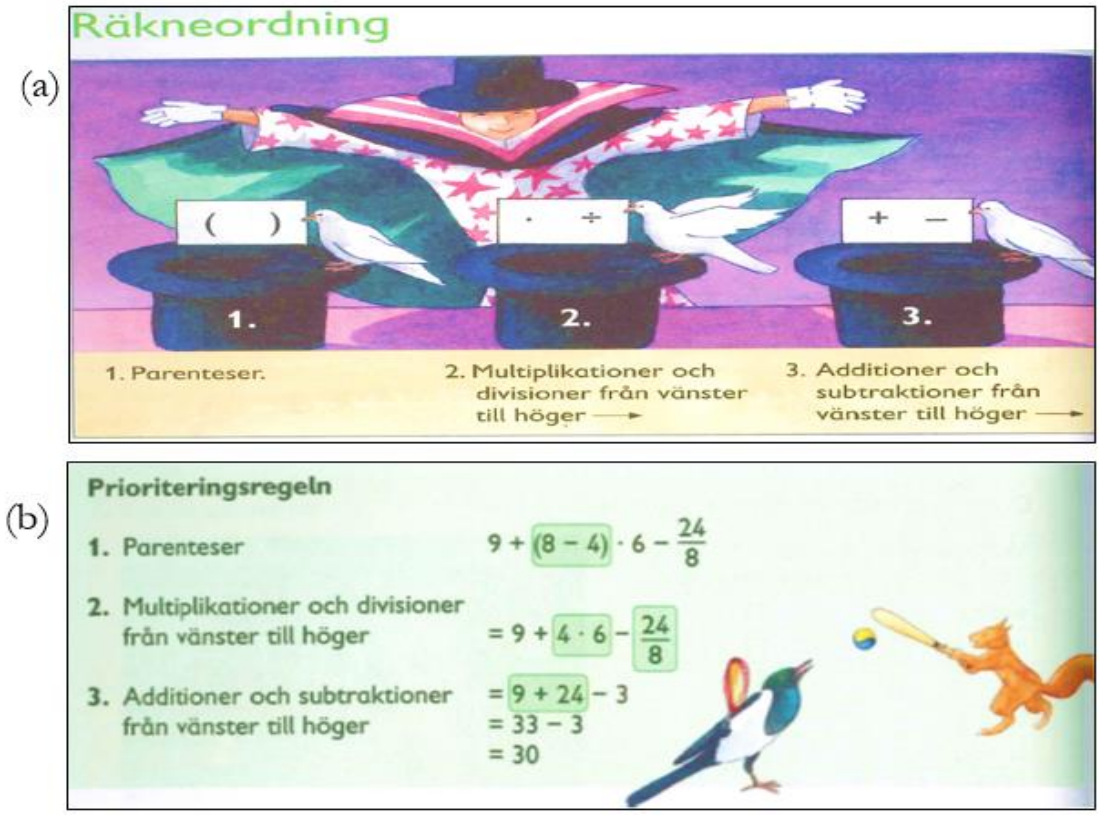
delas faktorn upp i talsorter, för att förenkla beräkningen och sätts in i en parentes. Den distributiva lagen, beskrivs gälla för multiplikation, inte för multiplikation med addition eller för multiplikation med subtraktion. Den här principen är något som kan utläsas genom att se på uttrycken.



Figur 13. Exemplet ur Eldorado 4B (Olsson & Forsbäck, 2011b, s.10), beskriver räknesättens prioritet.

Det som beskrivs i figur 13 är att multiplikationer räknas före addition och subtraktion, om inte parenteser finns, då beräknas parentesen först. Detta sätt är vanligt att beskriva räknesättens prioritet i de analyserade matematikläroböckerna. I figur 13 beskrivnings innefattas dock inte division, vilket det vanligen gör. I de uttryck som inte innefattar parenteser, behöver inte multiplikationens prioritet användas. Uttrycket går att räkna med vänster-till-höger-principen, då multiplikationen kommer först i uttrycket. Det figur 13 visar, är parentesens prioritet, inte räknesättens prioritet.

I figur 14, beskrivs parenteser och de olika räknesättens prioritet, med olika sätt att benämna samma princip. I figur 14a, beskrivs principen som räkneordning. I figur 14b, beskrivs principen som prioriteringsregeln. I övrigt är det inget som skiljer beskrivningarna textmässigt. I strukturen och konkretiseringen skiljs de åt.



Figur 14. Exempel ur (a) Bas Favorit Matematik 4A (Asikainen, Nyrhinen, Rokka & Vehmas, 2014b, s.38) och (b) Bas Favorit Matematik 5A (Karppinen, Kiviluoma & Urpiloa, s.22). Figur i färg.

Prioriteringsregeln beskrivs på olika sätt genomgående i matematikläroböckerna, både explicit och implicit. Det som däremot är konstant att alltid beskriva multiplikation före division, och addition alltid före subtraktion.

8.1 Diskussion

De flesta exemplen beskriver räknelagarna som generella för de olika räknesätten. Men räknereglerna och räknelagarna generaliseras på olika sätt i läroböckerna. Kommutativitet beskrivs ofta genom att visa att man kan addera eller multiplicera i vilken ordning man vill. När dessa beskrivningar görs, är det genom olika kombinationer av numeriska uttryck, men också ofta genom konkretiseringar av olika vardagsnära föremål. Detta sätt att beskriva kommutativa egenskaper hos räkneoperationer är i enlighet med Canobi et al. (2002) som beskriver att barn bör få möta numeriska uttryck innan de möter den kommutativa lagen i symboliska beskrivningar. Kommutativa egenskaper, att beräkna uttryck i vilken ordning man vill i addition och multiplikation, beskrivs dessutom vid några tillfällen som att enbart gälla vid ett uttryck. Ett sådant exempel visas i figur 10 som beskriver en multiplikation som

kommutativ, fast formuleringen som används är *multiplikationen*. Genom att använda bestämd form kan kommutativa lagen tolkas som att det enbart gäller för uttrycket 3×6 och 6×3. Man kan befara att genom att beskriva något i bestämd form, när man kanske egentligen menar att det gäller generellt för alla tal, det vill säga i obestämd form, inte erbjuder eleven att få en fullständig förståelse för vad egenskapen egentligen innebär. Som Ding och Li (2010) beskriver det, ger förståelse för kommutativa, associativa och distributiva egenskaper stor flexibilitet för matematiska beräkningar. Det kan på grund av detta, anses vara av stor vikt, att räknesättens egenskaper, förklaras och exemplifieras som *generella* och gäller för alla tal (för detta specifika räknesättet).

Enligt Zaslavsky och Peled (1996) kan missuppfattningar befästas genom beskrivningar som innehåller både kommutativa och associativa egenskaper och utan att tydligt skilja på egenskaperna. Det kan kännas olyckligt att, enda gången i datamaterialet som den associativa lagen beskrivs explicit, är det genom att blanda ihop associativa egenskaper med kommutativa egenskaper (figur 9). Det är visserligen inte ovanligt att associativa egenskaper blandas ihop med kommutativa egenskaper (Wasserman, 2014). Samma tendens till att blanda de två olika egenskaperna syns även i figur 11 där den associativa lagen blandas med den kommutativa lagen. Med tanke på hur den associativa lagen formellt beskrivs i matematikläroböcker, kan det antas att den är svår att beskriva i numeriska uttryck utan att förklaringen inbegriper parenteser. Jag ställer mig frågande till hur uttrycken för den associativa lagen är ihopsatta, exempelvis uttrycket $3 + 5 + 7$, som i figur 9. För att kunna visa de associativa egenskaperna bör termerna $3 + 5$ eller $5 + 7$, beräknas först. Men att beräkna dessa termer, gör inte uträkningen enklare. Den beräkning som gör uttrycket enklare att operera med, är om man lägger ihop första och sista termen, $3 + 7$. Det är precis så författarna till detta läromedel har gjort. Men för att i uttrycket kunna visa på att det är dessa termer som beräknas i beskrivningen, krävs en förflyttning av termerna, vilket då inbegriper kommutativitet. Fast då har man ju inte längre visat på associativitet.

Det är lätt att få missuppfattningen att multiplikation har högre prioritet än division, och addition har högre prioritet än subtraktion (Glidden, 2008; Groth, 2013). I de läroböcker som ingick i denna studie beskrivs alltid multiplikation före division, trots att man också skriver att de har samma prioritet. Samma gäller för addition och subtraktion. På det sättet som prioriteringsregeln beskrivs i matematikläroböckerna, kan därför de missuppfattningar som Glidden (2008) beskriver, antas finnas hos elever. Det finns räkneexempel i läroböckerna, liknande som förklaringen i figur 13, där syftet är att använda prioriteringsregeln. I några fall,

behöver dock inte prioriteringsregeln användas, då operationen går lika bra att beräkna från vänster till höger. Om man visar reglerna med uppgifter med denna struktur kan man befara att eleverna får uppfattningen att operationer alltid ska beräknas från vänster till höger. Man har också sett att vänster-till-höger-uppfattningen är vanlig hos elever (Kieran, 1979).

8.2 Didaktiska implikationer

Utifrån resultatet kan ytterligare några didaktiska implikationer dras. Det är viktigt att i matematikundervisningen och i matematikläroböcker skilja på de olika räknelagarna. Särskilt viktigt är det att den kommutativa lagen och den associativa lagen tydligt skiljs åt. Det kan vara fördelaktigt att beskriva den kommutativa lagen för sig, den associativa lagen för sig och den distributiva lagen för sig så att lagarna ska kunna ses som fristående från varandra och dess olika egenskaper urskiljas. När eleverna behärskar lagarnas egenskaper som fristående, kan likheter och olikheter mellan lagarna diskuteras.

Prioriteringsregeln beskrivs på varierande sätt i matematikläroböckerna, men ett sätt är alltid konstant. Det som alltid är konstant är i vilken ordning räknesätten beskrivs, vilket kan leda till att multiplikation anses ha högre prioritet än division, och samma gäller för addition, som kan uppfattas ha högre prioritet än subtraktion. För att undvika dessa felaktiga uppfattningar, kan det vara av relevans att beskriva räknesättens olika prioritet, men variera ordningen i vilket räknesätten med samma prioritet beskrivs. Exempelvis, beskriva att division och multiplikation, har högre prioritet än subtraktion och addition.

9. Sammanfattning

Det jag i den här studien har sett, är att räknelagarna och räknereglerna väldigt sällan nämns vid sitt namn. Vid försök att förklara räknelagarnas egenskaper, används ord i bestämd form, som kan leda till missuppfattningar för egenskapens generella gällande. När den associativa lagen försöks att beskrivas, innefattas förklaringen av kommutativa egenskaper, vilket då inte visar på associativitet. Förklaringar leds även till att använda talfamiljer eller uppdelning av talsorter, istället för att använda räknelagarna. Eftersom läroböckerna till stor del styr innehållet för matematikundervisningen, kan ovanstående missuppfattningar och beskrivningar, leda till bristande förståelse för de grundläggande egenskaperna hos elever.

Men, det finns utrymme för stora förändringar, med jämna mellanrum revideras läroböcker. Dessa revideringar kan påverka innehållet för hur räknelagarna och räknereglerna lyfts fram. En förhoppning är att lärare framöver kan känna sig mer fria från att använda läroböckerna som primärkällan och istället använda den som ett komplement i undervisningen. Och, viktigast av allt, att läraren litar till sin egen förmåga.

10. Referenslista

Asikainen, K., Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P., & Voima, J. (2013). *Mera favorit matematik 2A*. Lund: Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2014a). *Bas favorit matematik: 4A*. Lund: Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2014b). *Mera favorit matematik: 3B*. Lund: Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2014c). *Mera favorit matematik: 4A*. Lund: Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2014d). *Mera favorit matematik: 4B*. Lund: Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2015). *Mera favorit matematik: 5A*. Lund: Studentlitteratur.

Asikainen, K., Nyrhinen, K., Rokka, P., & Vehmas, P. (2016). *Mera favorit matematik: 5B*. Lund: Studentlitteratur.

Bergström, G., & Boréus, K. (2012). Innehållsanalys. I G. Bergström, & K. Boréus (Red) *Textens mening och makt: metodbok i samhällsvetenskaplig text- och diskursanalys* (3. uppl., s. 49- 91). Lund: Studentlitteratur.

Bremler, N.(2013). *Matteboken som redskap och aktör: en studie av hur derivata introduceras i svenska läroböcker 19*. Stockholm: Institutionen för undervisningsprocesser.

Brorsson, Å. (2010). *Prima matematik: 3A*. Malmö: Gleerups.

Brorsson, Å. (2011). *Prima matematik: 3B*. Malmö: Gleerups.

Brorsson, Å. (2013a). *Prima matematik: 1A*. Malmö: Gleerups.

Brorsson, Å. (2013b). *Prima matematik: 1B*. Malmö: Gleerups.

Brorsson, Å. (2013c). *Prima matematik: 2A*. Malmö: Gleerups.

Brorsson, Å. (2013d). *Prima matematik: 2B*. Malmö: Gleerups.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder.* (2.,[rev] uppl.) Malmö: Liber.

Canobi, K.H. (2005). Children's profiles of addition and subtraction understanding. *Journal of Experimental Child Psychology*, 92(2005), 220-246. doi: 10.1016/j.jecp.2005.06.001

Canobi, K.H. (2004). Individual differences in children's addition and subtraction knowledge. *Cognitive development 19*(2004), 81-93. doi:10.1016lj.cogdev.2003.10.001

Canobi, K.H., Reeve, R.A., & Pattison, P.E. (2002). Young Children's Understanding of Addition Concepts. *Educational Psychology, 22*(5), 513-532. doi:10.1080/0144341022000023608

Carlsson, S., Falck, P., Liljegren, G., & Picetti, M. (2012). *Matte Direkt Borgen: 6A.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Carlsson, S., Falck, P., Liljegren, G., & Picetti, M. (2013). *Matte Direkt Borgen: 6B.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Carpenter, T.P, Loef Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic & Algebra in Elementary School.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Danielsson, K., & Selander, S. (2014). *Se texten! Multimodala texter i ämnesdidaktiskt arbete.* Malmö: Gleerups utbildning AB.

Ding, M., & Li, X. (2010). A comparative analysis of the distributive property in U.S. and Chinese Elementary Mathematics textbooks. *Cognition and instruction* 28(2), 146-180. doi: 10.1080/07370001003638533

Ding, M., & Li, X. (2014). Transition from concrete to abstract representations: the distributive property in a Chinese textbook series. *Educational Studies in Mathematics* 87(1) 103-101. doi: 10.1007/s10649-014-9558-y

Ding, M., Li, X., & Capraro, M.M. (2013). Preservice elementary teachers' knowledge for teaching the associative property of multiplication: A preliminary analysis. *The Journal of Mathematical Behavior, 32,* 36-52. doi:10.1016/j.jmathb.2012.09.002

Elo, S. & Kyngäs, H. (2008). The qualitative content analysis process. *Journal of Advanced Nursing,* 62(1), 107-115. doi: 10.1111/j.1365-2648.2007.04569.x

Falck, P., Picetti, M., & Sundin, K. (2011). *Matte Direkt Borgen: 4A.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Falck, P., & Picetti, P. (2012a). *Matte Direkt Borgen: 4B.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Falck, P., & Picetti, P. (2012b). *Matte Direkt Borgen: 5A.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Falck, P., & Picetti, P. (2013). *Matte Direkt Borgen: 5B.* Stockholm: Sanoma Utbildning AB.

Glidden, P. (2008). Prospective elementary teachers' understanding of order of operations. *School science and mathematics 108*(4), 130-136. School science and mathematics.

Groth, R.E. (2013). *Teaching mathematics in grades 6-12: Developing research-based instructional practices.* Thousand Oaks: SAGE Publications.

Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P., & Voima, J. (2013a). *Mera favorit matematik: 1A.* Lund: Studentlitteratur.

Haapaniemi, S., Mörsky, S., Tikkanen, A., Vehmas, P., & Voima, J. (2013b). *Mera favorit matematik: 1B.* Lund: Studentlitteratur.

Haylock, D. (2014). *Mathematics explained for primary teachers (5.uppl.).* Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Hsieh, H.F. & Shannon, S.E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research,* 15(9), 1277-1288. doi:10.1188/1049732305276687

Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Jacobs, V.R., Loef Franke, M., Carpenter, T.P., Levi, L., & Battey, D. (2007). Professional Development Focused on Children's Algebraic Reasoning in Elementary School. *Journal for Research in Mathenatics Education, 38*(3), 258-288.

Kajander, A., & Lovric, M. (2009). Mathematics textbook and their potential role in supporting misconceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(2), 173-181. doi:10.1080/00207390701691558

Karlsson, N., & Kilborn, W. (2014). *Grundläggande algebra, funktioner, sannolikhetslära och statistik: Matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur AB.

Karppinen, J., Kiviluoma, P., & Urpiloa, T. (2013). *Favorit matematik: 3A.* Lund: Studentlitteratur.

Karppinen, J., Kiviluoma, P., & Urpiloa, T. (2015). *Bas favorit matematik: 5A.* Lund: Studentlitteratur.

Kavén, A., & Persson, H. (2011a). *Uppdrag: Matte, Mattedetektiverna: 1A.* Stockholm: Liber.

Kavén, A., & Persson, H. (2011b). *Uppdrag: Matte, Mattedetektiverna: 1B.* Stockholm: Liber.

Kavén, A., & Persson, H. (2011c). *Uppdrag: Matte, Mattedetektiverna: 2A.* Stockholm: Liber.

Kavén, A., & Persson, H. (2011d). *Uppdrag: Matte, Mattedetektiverna: 2B.* Stockholm: Liber.

Kavén, A., & Persson, H. (2012a). *Uppdrag: Matte, Mattedetektiverna: 3A.* Stockholm: Liber.

Kavén, A., & Persson, H. (2012b). *Uppdrag: Matte, Mattedetektiverna: 3B.* Stockholm: Liber.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. I D. Tall (Red.), *Proceedings of the third international conference for the psychology of mathematics education, England,* 128-133.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationell centrum för matematikutbildning, NCM.

Kongelf, T.R. (2015). Introduksjon av algebra i matematikkbøker for ungdomstrinnet i Norge. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 20(3-4), 83-109.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2:uppl.). Thousand oaks, Calif.: Sage.

Kryger, G., Hernvald, A., Persson, H., & Zetterqvist, L. (2011a). *Uppdrag: Matte, Mattespanarna: 4A.* Stockholm: Liber.

Kryger, G., Hernvald, A., Persson, H., & Zetterqvist, L. (2011b). *Uppdrag: Matte, Mattespanarna: 4B.* Stockholm: Liber.

Kryger, G., Hernvald, A., Persson, H., & Zetterqvist, L. (2012a). *Uppdrag: Matte, Mattespanarna: 5A.* Stockholm: Liber.

Kryger, G., Hernvald, A., Persson, H., & Zetterqvist, L. (2012b). *Uppdrag: Matte, Mattespanarna: 5B.* Stockholm: Liber.

Kryger, G., Hernvald, A., Persson, H., & Zetterqvist, L. (2013a). *Uppdrag: Matte, Mattespanarna: 6A.* Stockholm: Liber.

Kryger, G., Hernvald, A., Persson, H., & Zetterqvist, L. (2013b). *Uppdrag: Matte, Mattespanarna: 6B.* Stockholm: Liber.

Lam, H. C. (2013). On Generalization and Variation Theory. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 57(4), 343-356. doi:10.1080/00313831.2012.656277

Lindgren, S. (2011). Textanalys. I K. Fangen & A. Sellerberg (Red.), *Många möjliga metoder.* (s. 269-287). Lund: Studentlitteratur.

Lo, M.L. (2014) *Variationsteori – för bättre undervisning och lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: Matematikdidaktik för lärare*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M., & Kilborn, M. (2003). *Baskunskaper i matematik för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.

National Research Council. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Reys, B.J., Reys, R.E., & Chavéz, O. (2004). Why mathematics textbooks matter. *Educational Leadership,* 61(5), 61-66.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2009). *Matte Eldorado: 2B*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2010a). *Matte Eldorado: 3A*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2010b). *Matte Eldorado: 3B*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2011a). *Matte Eldorado: 4A*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2011b). *Matte Eldorado: 4B*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2011c). *Matte Eldorado: 5A*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2012). *Matte Eldorado: 5B*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2013a). *Matte Eldorado: 6A*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2013b). *Matte Eldorado: 6B*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2015a). *Matte Eldorado grundbok: 1A*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2015b). *Matte Eldorado grundbok: 1B*. Stockholm: Natur & Kultur.

Olsson, I., & Forsbäck, M. (2015c). *Matte Eldorado grundbok: 2A*. Stockholm: Natur & Kultur.

Ristola, K., Tapaninaho, T., & Vaaraniemi, L. (2012). *Favorit matematik: 2B*. Lund: Studentlitteratur.

Richardson, G. (2010). *Svensk utbildningshistoria: Skola och samhälle förr och nu*. (8. rev. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Schifter, D. (1999). Reasoning about Operations: Early Algebraic Thinking in Grades K-6. I L.V. Stiff., & F.R. Curcio (Red.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (s. 62-81). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Sjöström, B., Sjöström, J., & Johansson, A. (2011). *Prima Formula Matematik: 4*. Malmö: Gleerups.

Sjöström, B., & Sjöström, J. (2012). *Prima Formula Matematik: 5*. Malmö: Gleerups.

Sjöström, B., Sjöström, J., Johansson, A., & Sörensson, K. (2013). *Prima Formula Matematik: 6*. Malmö: Gleerups.

Skolinspektionen. (2009). *Undervisningen i matematik – utbildningens innehåll och ändamålsenlighet* (Kvalitetsgransknings rapport nr. 2009:5). Hämtad från Skolinspektionen: https://www.skolinspektionen.se/globalassets/publikationssok/granskningsrapporter/kvalitetsgranskningar/2009/matematik/granskningsrapport-matematik.pdf

Skolverket. (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11*. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *TIMSS. Svenska grundskolelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv* (Skolverkets rapport nr 380). Stockholm: Skolverket

Skolverket. (u.å.). *Hur väljs och kvalitetssäkras läromedel?* Hämtad 13 april, 2016, från http://www.skolverket.se/skolutveckling/forskning/didaktik/tema-laromedel/hur-valjs-och-kvalitetssakras-laromedel-1.181769

Svensson, P. (2001). *Abstrakt algebra*. Lund: Studentlitteratur.

Warren, E. (2003). The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *15*(2), 122-137. doi:10.1007/BF03217374

Wasserman, N. H. (2014). Introducing Algebraic Structures through Solving Equations: Vertical Content Knowledge for K-12 Mathematics Teachers. *PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 24*(3), 191-214. doi:10.1080/10511970.2013.857374

Watson, A., & Mason, J. (2006). Variation and mathematical structure. *Mathematics teaching 194*, 3-5.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 67-78.

Bilaga 1 – Läroboksreferenser.

	Eldorado	Favorit Matematik	Uppdrag: Matte	Prima	Matte direkt
1A	Mate Eldorado grundbok: 1A (Olsson & Forsbäck,2015a)	Mera favorit matematik: 1A (Haapaneiemi, Mörsky, Tikkanen, Vehmas & Voima, 2013a)	Mattedetektiverna: 1A (Kavén & Persson, 2011a)	Prima matematik: 1A (Brorsson, 2013a)	
1B	Matte Eldorado grundbok: 1A (Olsson & Forsbäck, 2015a)	Mera favorit matematik: 1B (Haapaneiemi, Mörsky, Tikkanen, Vehmas & Voima, 2013b)	Mattedetektiverna: 1B (Kavén & Persson, 2011b)	Prima matematik: 1B (Brorsson, 2013b)	
2A	Matte Eldorado grundbok: 2A (Olsson & Forsbäck, 2015c)	Mera favorit matematik: 2A (Asikainen, Haapaneiemi, Mörsky, Tikkanen, Vehmas & Voima, 2013a)	Mattedetektiverna: 2A (Kavén & Persson, 2011c)	Prima matematik: 2A (Brorsson, 2013c)	
2B	Matte Eldorado: 2B (Olsson & Forsbäck, 2009)	Favorit matematik: 2B (Ristola, Tapaninaho & Vaaraneimi ,2012)	Mattedetektiverna: 2B (Kavén & Persson, 2011d)	Prima matematik: 2B (Brorsson, 2013d)	

	Eldorado	Favorit matematik	Uppdrag;Matte	Prima	Matte direkt
3A	Matte Eldorado: 3A (Olsson & Forsbäck,2010a)	Favorit matematik: 3A (Karppinen, Kiviluoma & Urpiloa, 2013)	Mattedetektiverna: 3A (Kavén & Persson, 2012a)	Prima matematik: 3A (Brorsson, 2010)	
3B	Matte Eldorado: 3B (Olsson & Forsbäck, 2010b)	Mera favorit matematik: 3B (Asikainen, Nyrhinen, Rokka & Vehmas, 2014a)	Mattedetektiverna: 3B (Kavén & Persson, 2012b)	Prima matematik: 3B (Brorsson, 2011)	
4A	Matte Eldorado: 4A (Olsson & Forsbäck, 2011a)	Bas favorit matematik: 4A (Asikainen, Nyrhinen, Rokka & Vehmas, 2014b) Mera favorit matematik: 4A (Asikainen, Nyrhinen, Rokka & Vehmas, 2014c)	Mattespanarna: 4A (Kryger, Hernvald, Persson & Zetterqvist, 2011a)	Prima Formula Matematik: 4 (Sjöström, Sjöström & Johansson, 2011)	Matte direkt borgen: 4A (Falck, Picetti & Sundin, 2011)
4B	Matte Eldorado: 4B (Olsson & Forsbäck, 2011b)	Mera favorit matematik: 4B (Asikainen, Nyrhinen, Rokka & Vehmas, 2014d)	Mattespanarna: 4B (Kryger, Hernvald, Persson & Zetterqvist, 2011b)		Matte direkt borgen: 4B (Falck & Picetti, 2012a)

	Eldorado	Favorit matematik	Uppdrag: Matte	Prima	Matte direkt
5A	Matte Eldorado: 5A (Olsson & Forsbäck, 2011c)	Bas favorit matematik: 5A Karppinen, Kiviluoma & Urpiloa (2015) Mera favorit matematik: 5A (Asikainen, Nyrhinen, Rokka & Vehmas, 2015)	Mattespanarna: 5A (Kryger, Hernvald, Persson & Zetterqvist, 2012a)	Prima Formula Matematik: 5 (Sjöström & Sjöström, 2012)	Matte direkt borgen: 5A (Falck & Picetti, 2012b)
5B	Matte Eldorado: 5B (Olsson & Forsbäck, 2012)	Mera favorit matematik: 5B (Asikainen, Nyrhinen, Rokka & Vehmas, 2016)	Mattespanarna: 5B (Kryger, Hernvald, Persson & Zetterqvist, 2012b)		Matte direkt borgen: 5B (Falck & Picetti, 2013)
6A	Matte Eldorado: 6A (Olsson & Forsbäck, 2013a)		Mattespanarna: 6A (Kryger, Hernvald, Persson & Zetterqvist, 2013a)	Prima Formula Matematik: 6 (Sjöström, Sjöström, Johansson & Sörensson, 2013)	Matte direkt borgen: 6A (Carlsson, Falck, Liljegren & Picetti, 2012)