



JÖNKÖPING UNIVERSITY

*School of Education and
Communication*

Positionssystemet

Elevers möjligheter att förstå positionssystemet i
årskurs 6

KURS: *Examensarbete II, F-3, 15 hp*

FÖRFATTARE: *Sofie Engström*

EXAMINATOR: *Mikael Segolsson*

TERMIN: *VT16*

SAMMANFATTNING

Sofie Engström

Positionssystemet

Elevens möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 6

Antal sidor: 35

Svenska elever visar kontinuerligt försämrade kunskaper kring begreppet platsvärde och vid en noggrannare granskning av TIMSS (Skolverket, 2012) synliggjordes att begreppet platsvärde, som är förknippat med vårt positionssystem, är ett centralt begrepp för elevers förståelse av talbegrepp. PISA rapporten (Skolverket, 2013) påvisar ytterligare att det går att urskilja försämrade kunskaper om elevers uppfattningar om siffrors platsvärden vid beräkningar av standardalgoritmer. Studien genomfördes för att undersöka och bidra till forskningen om vilka möjligheter elever ges till att förstå positionssystemet.

Studien syftar till att bilda kunskap om elevers möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 6. De frågeställningar studien syftar till att besvara är:

- Vilka variationsmönster möter elever i undervisning om positionssystemet?
- Vilka kritiska aspekter kan urskiljas vid elevers beskrivningar av positionssystemet?

För att få svar på frågeställningarna och därmed uppfylla syftet med studien har undervisning observerats och elever intervjuats. I studien finns inslag av variationsteorin. Teorin valdes för att göra det möjligt att förstå hur olika sätt att behandla ett valt ämnesinnehåll relaterar till elevers möjligheter att lära.

Studiens resultat visar att elever möter olika variationsmönster i undervisning om positionssystemet, däribland kontrast, generalisering och separation. Vid elevers beskrivningar av positionssystemet kunde det urskiljas tre kritiska aspekter, positionens värde och nollans betydelse i ett flersiffrigt tal, talens egenskaper och talsortsuppfattning. Slutsatsen är att elever har olika möjligheter att utveckla förståelse för positionssystemet i årskurs 6. Möjligheterna ser olika ut beroende på vilka kritiska aspekter eleverna urskilt i undervisning om positionssystemet.

Sökord: Positionssystemet, variationsteorin, kritiska aspekter, variationsmönster

ABSTRACT

Sofie Engström

Positional system

Students' opportunity to understand the positional system in the sixth grade

Antal sidor: 35

Swedish students are showing a continuous deterioration of knowledge about the concept of mathematical place-value and by looking at a closer analysis, made by the TIMSS, it was made even more visible that the concept of place-value, which is associated with our positional system, is very central to students' understanding of the number concept. The PISA - report further demonstrates that it is possible to discern the deteriorating knowledge of students' perceptions of digits' place-values in calculations of standard algorithms. The study is carried out because I want to explore as well as contribute to the research on the opportunities students are given to understand the positional system.

The study aims to create knowledge on students' opportunity to understand the positional system in the sixth grade. The questions the study seeks to answer are the following:

- What are the different patterns of variation the students meet during the lesson about the positional system?
- Which are the critical aspects that can be discerned when listening to the students' descriptions of the positional system?

To get answers to these questions, and thus fulfill the purpose of the study, different teachings have been observed and students have been interviewed. The theory of this work is variation theory. This theory was chosen because it makes it possible to understand many different ways to treat a selected subject of matter as well as to relate it to students' opportunities to learn.

Results of the study show that students encounter several different parts of the pattern of variation in the teaching about the positional system, including contrast, generalization and separation. By taking in the students' descriptions of the positional system, three critical aspects could be discerned. These were the place-value together with the significance of zero in multi-digit numbers, numbers properties and lastly number sense. The conclusion is that students have different opportunities to develop an understanding of the positional system in the sixth grade. The possibilities are different depending on which critical aspects that are distinguished by the students in the education of the positional system.

Keywords: positional system, variation theory, critical aspects, pattern of variation

Innehållsförteckning

1 Inledning.....	1
2 Syfte och frågeställningar.....	2
3 Bakgrund.....	3
3.1 Positionssystemet	3
3.2 Tidigare forskning	3
3.2.1 Undervisning om positionssystemet	3
3.2.2 Utvecklingsfaser inom positionssystemet	5
3.2.3 Taluppfattning	6
3.3 Styrdokument	6
3.4 Variationsteorin	7
3.4.1 Lärandeobjekt	8
3.4.2 Kritiska aspekter	8
3.4.3 Variationsmönster	8
4 Metod.....	10
4.1 Metodval	10
4.2 Urval	11
4.3 Genomförande	12
4.4 Forskningsetiska aspekter	13
4.5 Tillförlitlighet	14
4.6 Analys av insamlat material	15
5 Resultat.....	17
5.1 Elevers möte med variationsmönster	17
5.2 Urskilda kritiska aspekter vid elevers beskrivningar av positionssystemet	19
5.3 Sammanfattning	24
6 Diskussion.....	25
6.1 Metoddiskussion	25
6.2 Resultatdiskussion	27
6.3 Förslag till fortsatt forskning	32
7 Referenser.....	33
Bilaga 1.....	1
Bilaga 2.....	2
Bilaga 3.....	3

1 Inledning

Matematiken har en nära koppling till det liv människor lever i idag. Ett utvecklat matematiskt tänkande är en förutsättning för att samhällsmedborgare ska kunna följa med i den samhälleliga, sociala och tekniska utvecklingen i världen. Kunskaper i matematik ger medborgare förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser (Skolverket, 2011a).

Valet av positionssystemet som ämnesinnehåll tar sin utgångspunkt i Programme for International Student Assessment [PISA] (Skolverket, 2013) och Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS] (Skolverket, 2012). Sammanställningarna av undersökningarna visar att svenska elever presterar under genomsnittet för OECD/EU vad gäller förståelse av talbegrepp och inom aritmetik. Svenska elever visar kontinuerligt försämrade kunskaper kring begreppet platsvärde och vid en noggrannare granskning av TIMSS synliggjordes att begreppet platsvärde, som är förknippat med vårt positionssystem är ett centralt begrepp för elevers förståelse av talbegrepp (Skolverket, 2012). PISA-rapporten påvisar ytterligare att det går att urskilja försämrade kunskaper om elevers uppfattningar av siffrors platsvärden vid beräkningar av standardalgoritmer (Skolverket, 2013). Det framkommer av PISA-undersökningen att elever ofta saknar kunskap om hur och varför en siffra får sitt värde i ett tal. Under tidigare verksamhetsförlag utbildning har jag genomfört tester baserade på McIntosh diagnosmaterial (2008) för att undersöka elevers taluppfattning. Elever som presterade sämre på testerna visade sig ha problem med uppgifter som berörde positionssystemet.

Erfarenheter från tester kring elevers taluppfattning, PISA (Skolverket, 2013) och TIMSS (Skolverket, 2012) har väckt frågan om vilka möjligheter elever ges för att förstå positionssystemet. Jag har därför valt att i denna studie med variationsteorin som teoretisk ansats undersöka vilka variationsmönster elever möter i undervisning om positionssystemet och vilka kritiska aspekter som kan urskiljas vid elevers beskrivningar av positionssystemet.

2 Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att bilda kunskap om elevers möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 6. Detta syfte uppnås genom att besvara följande frågeställningar:

- Vilka variationsmönster möter elever i undervisning om positionssystemet?
- Vilka kritiska aspekter kan urskiljas vid elevers beskrivningar av positionssystemet?

3 Bakgrund

Kapitlet innehåller fakta som syftar till att ge förståelse för studiens grund. Först beskrivs positionssystemet, därefter beskrivs tidigare forskning inom området och avslutningsvis redogörs för variationsteorin och gällande styrdokument.

3.1 Positionssystemet

Positionssystemet bygger på basen tio och är ett så kallat decimalsystem (Ross, 1989). Decimalsystemet består av tio siffror, vilka står för ett antal, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, där nollans funktion är platshållare. Siffrorna kan sedan användas för att representera tal i olika storlekar. Siffrornas position informerar om dess värde och skrivs från höger till vänster (Cady, Hopkins & Price, 2014).

Det moderna talsystemet som används idag härstammar från det forntida Egypten och benämns som det hindu-arabiska talsystemet (Heiberg Solem, Reikerås & Kristi 2004). Övergången från att använda romerska siffror till att använda det nuvarande decimala positionssystem ägde rum under 1200-talet. Spridningen av det decimala positionssystemet skedde under 1400-talet tillsammans med boktryckarkonsten (Häggström, Persson & Persson, 2012). Att skriva tal enligt positions- och siffermetoden var ett stort genombrott i aritmetikens utveckling. Uppfinningen av decimalsystemet är ur vetenskapens och industrins synsätt en av de mest betydelsefulla uppfinningarna. Begreppet decimalsystem eller tiosystem härstammar från det latinska ordet *decem*, vilket betyder tio. Skälet till att talsystemet har basen tio är förmodligen att människan har tio fingrar (Cady et al., 2014).

3.2 Tidigare forskning

I följande avsnitt kommer ämnesområdet belysas närmare genom tidigare forskning. Avsnittet inleds med en beskrivning av vilken betydelse lärare har i undervisningen om positionssystemet och det pedagogiska materialets innebörd. Avslutningsvis redogörs för fyra utvecklingsfaser, vilka tidigare forskning har betonat att elever bör genomgå för att utveckla förståelse för positionssystemet, och taluppfattningens betydelse.

3.2.1 Undervisning om positionssystemet

Lärares ämnesteoritiska kunskaper är en av flera bidragande faktorer till om elever slutligen uppnår kunskapskraven (Skolverket, 2011b). Det räcker inte med att lärare har

goda ämneskunskaper, lärare måste även ha en förståelse för vilka olika uppfattningar elever kan ha av ett ämnesområde. Det är även viktigt att lärare har kunskaper om vilka eventuella svårigheter som kan uppstå vid inläringen av exempelvis positionssystemet (Mårtensson, 2015; Runesson, 2005). Lärares medvetenhet om vilka olika uppfattningar elever kan ha om positionssystemet och vilka eventuella svårigheter som kan uppstå i inläringen är av stor vikt då en eventuell missuppfattning kan påverka den enskilde elevens taluppfattning och dennes fortsatta matematiska utveckling (Papadopoulos, 2013; Ross, 1989; Ross, 2002). Goda ämneskunskaper och en förståelse för vilka olika uppfattningar eleverna kan ha av positionssystemet utgör tillsammans goda förutsättningar för eleverna att förstå ämnesområdet. Undervisningen bör möjliggöra för eleverna att få syn på de olika uppfattningarna av positionssystemet och på så sätt urskilja eventuella svårigheter (Runesson, 2005). Om svårigheter har uppstått är det viktigt att lärare i ett första steg reflekterar över den egna undervisningen och vad det är i den som kan ändras (Papadopoulos, 2013). I ett andra steg kan lärare använda sig av olika verktyg för att synliggöra svårigheten som uppstått. Ett användbart verktyg i undervisningen kan vara pedagogiska material (Uttal, Scudder & DeLoache, 1997).

Pedagogiska material är specifika material framtagna för att användas i matematikundervisning. Det kan exempelvis vara tiobasmaterial i form av entalskuber, tiotalstavar och hundratalsplattor (Uttal et al., 1997). Tiobasmaterialen synliggör för eleverna att tiotalstaven är *exakt* tio gånger så stor som entalskuben och hundraplattan är *exakt* tio gånger så stor som tiotalstaven (Berman, 2011). Ross (1989) hävdar att tiobasmaterialen är att föredra i undervisningen om positionssystemet då det ger eleverna möjlighet att se det abstrakta tänkandet kring siffrors platsvärde i ett tal. Ross (1989) hävdar även att tiobasmaterialen kan användas för att synliggöra att exempelvis talet 30, kan bestå av 3 tiotal eller 30 ental. Pedagogiskt material är framtaget för att eleverna ska få syn på specifika matematiska principer och begrepp, men även för att synliggöra elevens eventuella missuppfattningar. Det är viktigt att lärare är medvetna om att materialet visar tillverkarens uppfattning av en matematisk princip. Tillverkarens uppfattning kanske inte stämmer överrens med den uppfattning läraren har eller den uppfattning läraren vill förmedla till eleverna (Szendrie, 1996; Uttal et al., 1997). Burris (2013) betonar att det är viktigt att lärare reflekterar över vilket pedagogiskt material de använder i undervisningen. Burris (2013) menar även att det är viktigt att lärare reflekterar över på vilket sätt det pedagogiska materialet kan vara till hjälp för att

utveckla elevernas förståelse. I vissa fall kan det vara svårt för eleverna att förstå den matematiska idén och hur det pedagogiska materialet kan vara till hjälp för att utveckla deras förståelse av positionssystemet. Det är inte det pedagogiska materialet i sig som ger eleverna förståelse, utan det är hur det används i undervisningen för att utveckla elevernas förståelse (Thompson & Lambdin, 1994).

3.2.2 Utvecklingsfaser inom positionssystemet

I det moderna decimala talsystemet finns fyra utvecklingsfaser elever bör genomgå för att nå förståelse för siffrors platsvärde i tal och förståelse för positionssystemets uppbyggnad (O'Neil & Jensen, 1981; Papadopoulos, 2013; Ross, 2002; Thompson & Lambdin, 1994;)

- Elever behöver urskilja att exempelvis tjugofem katter kan representeras med hjälp av siffror. Elever behöver alltså inte måla tjugofem katter utan vet att talet 25 beskriver objekten kvantitativt. Elever behöver också urskilja att siffrors och tals namn i verbal form kan representeras i skriftlig form (O'Neil & Jensen, 1981; Ross, 2002). Om elever inte urskilt det sistnämnda kan exempelvis det verbala talet *sjuhundra sjuttiosju* skrivas som 700707. Elever gör då en direktöversättning från det verbala talet till det skriftiga talet vilket ger talet en annan kvantitet (O'Neil & Jensen, 1981).
- Elever behöver förstå att siffrans värde beror på vilken position siffran har i talet. Elever förstår då att siffran 2 i talet 25 betyder två tiotal, och att siffran 5 betyder fem ental. Om elever inte urskilt att siffrans värde beror på vilken position den har, kan eleven exempelvis se talen 25 och 52 som identiska. Elever förstår då inte innebörden av att siffrans värde ökar eller minskar beroende på vilken position siffran har i talet (Thompson & Lambdin, 1994).
- Elever behöver få syn på att talet 25 kan delas upp i två tiotal och fem ental, men eleven måste också förstå att talet är lika med 25 ental (Ross, 2002; Papadopoulos, 2013). Elever behöver utveckla en förståelse för att ett flersiffrigt tal inte enbart kan delas upp i de självklara tusentalen, hundratalen, tiotalen och entalen.

- Elever behöver urskilja nollans betydelse i ett flersiffrigt tal (Papadopoulos, 2013). Elever kan visa en felaktig förståelse för siffrors platsvärde i tal. Eleverna har då ofta utvecklat en missuppfattning om nollans betydelse. Papadopoulos (2013) menar att siffran noll har två funktioner i ett flersiffrigt tal. Nollans första funktion är att beskriva att det inte finns något platsvärde i talet på nollans position. Den andra funktionen är att nollan fungerar som platshållare för att visa värdet på kringliggande siffror, exempelvis i talet 107.

3.2.3 Taluppfattning

Elevers taluppfattning utvecklas under hela skoltiden. Utvecklingen sker från det att basfärdigheterna utvecklas till dess att eleverna utvecklar olika strategier till hur de ska lösa aritmetikuppgifter. Enligt Johansson och Wirth (2007) finns det fyra taluppfattningar när det gäller heltalen. De olika taluppfattningarna är: *spontan antalsuppfattning*, *kardinaltalsuppfattning*, *ordinaltalsuppfattning* och *talsortsuppfattning*. Den fjärde taluppfattningen, *talsortsuppfattning*, innebär kunskaper om positionssystemet. Elevers talsortsuppfattning kan vara svår att utvärdera eftersom kunskaperna inom området ofta testas i skriftliga uppgifter (Reys et al., 1995; Van de Walle & Thompson, 1985). Elever med goda resultat på skriftliga uppgifter kan ändå ha stora svagheter i sin taluppfattning eftersom de ofta använder standardalgoritmer vid beräkningar och gör beräkningarna automatiskt. För att kunna utföra räkneoperationer med förståelse behöver elever en automatiserad tabellkunskap, förståelse för positionssystemet och kunskaper om räkneoperationer (Cawley, Parmar, Lucas-Fusco, Kilian & Foley, 2007). Elever med bristfälliga kunskaper i det tidigare beskrivna använder sig ofta av standardalgoritmer och behandlar vanligtvis siffrorna i operationen som ental eller enskilda siffror och förstår inte siffrornas kvantitet (Van de Walle & Thompson, 1985). För att eleverna ska förstå innebörden i räkneoperationen och därigenom utveckla taluppfattningen bör eleverna uttrycka siffrornas platsvärden vid beräkningar.

3.3 Styrdokument

Syftet med undervisningen i ämnet matematik är att elever ska utveckla kunskaper om matematik och matematikens användning i vardagen samt inom olika ämnesområden (Skolverket, 2011b). Den undervisning elever möter ska bidra till att de utvecklar sitt intresse för matematik och ökar sin tilltro till den egna förmågan att använda matematik i

olika sammanhang. Kursplanen i ämnet matematik genomsyras av bilden att matematik är ett kommunikativt ämne där fokus ligger på användningen av matematik i olika sammanhang och situationer (Skolverket, 2011a). Lärarens uppgift är att uppmärksamma och stödja elever i behov av särskilt stöd. Elever ska erbjudas en strukturell undervisning under lärarens ledning, vilken ska anpassas efter individens individuella behov och utvecklingsnivå. Kunskapskraven ska tillsammans med det centrala innehållet i kursplanen (Skolverket, 2011b), utgöra innehållet för undervisning i klassrummet. En progressionstanke är att innehållet i matematiken utgår från konkreta och elevnära situationer, till att successivt utvidgas till obekanta situationer i vardagen och inom andra ämnesområden.

Föreliggande studie behandlar positionssystemet, vilket nämns i styrdokumentet (2011b) under kunskapsområdet *Taluppfattning och tals användning* (Skolverket, 2011b). Området omfattar kunskaper om tal och hantering av tal, beräkningsmetoder och hur kunskaperna kring det ovannämnda kan användas i matematiska och vardagliga situationer. En utvecklad taluppfattning är grundläggande för att kunna utveckla kunskaper i matematik. Taluppfattning innebär att eleven har förståelse för tals betydelse, relationer och storlek (Skolverket, 2011a).

3.4 Variationsteorin

Studien har inslag av variationsteorin. Variationsteorin valdes som ett verktyg för att kunna analysera lärandeobjektet, positionssystemet, och för att kunna svara på frågeställningarna. Teorin har ett övergripande syfte, vilket är att förstå hur det kan komma sig att människor lär sig ett visst innehåll, i vissa situationer men inte i andra och upptäcka de olika förutsättningarna som leder lärande (Lo & Marton, 2011; Runesson, 2005). Variationsteorin kan ses som ett komplement till andra teorier eftersom teorin kan avslöja villkoret till vad som är möjligt att lära i en speciell situation (Runesson, 2005). Teorin beskrivs som ett verktyg för att planera och analysera undervisning och lärande samt användas till att upptäcka de olika villkor som behövs för att lärande ska ske (Kullberg, Mårtensson & Runesson, 2016). Inom variationsteorin finns det centrala begrepp, vilka beskrivs nedan.

3.4.1 Lärandeobjekt

Inom variationsteorin är lärandeobjekt ett centralt begrepp (Runesson, 2005). Enligt teorin ses lärande som den förvärvade kunskapen om något och lärandeobjektet har en allmän och en specifik aspekt. Lärandeobjektets allmänna aspekt kallas *indirekt lärandeobjekt* och handlar om förmågor eleverna strävar efter att utveckla. Det indirekta lärandeobjektet kan liknas vid det som eleverna ska bli kunniga att göra med innehållet i lärandeobjektet (Mårtensson, 2015; Runesson, 2005). Lärandeobjektets specifika aspekt kallas *direkt lärandeobjekt*. Det handlar om det specifika eleverna ska lära sig, alltså själva innehållet i lärandeobjektet (Lo & Marton, 2011; Runesson, 2005). Det direkta lärandeobjektet skulle kunna vara att eleverna ska utveckla en förståelse för siffrornas värde i ett flersiffrigt tal. Förmågan att sedan kunna skapa olika tal, beroende på hur siffrorna sätts samman skulle kunna vara ett indirekt lärandeobjekt.

3.4.2 Kritiska aspekter

Till varje lärandeobjekt finns det aspekter av lärandet, så kallade kritiska aspekter. För att eleverna ska förstå något på ett visst sätt måste de kritiska aspekterna urskiljas. Aspekterna kan vara det mest avgörande av ett innehåll för att eleverna ska kunna urskilja ett lärandeobjekt (Mårtensson, 2015). Det är därför viktigt att den som undervisar ger eleverna möjlighet att upptäcka aspekterna för att skapa förståelse för lärandeobjektet. Mårtensson (2015) hävdar att kritiska aspekter inte är generella utan unika för varje lärandeobjekt. För att finna aspekterna behöver undervisning om lärandeobjektet analyseras. Runesson och Kullberg (2010) betonar i sin forskningsrapport att de kritiska aspekterna även är specifika för den klass/elevgrupp som arbetar med lärandeobjektet. Vidare beskriver Runesson och Kullberg att aspekterna inte kan generaliseras mellan olika grupper och inte heller mellan lärandeobjekt. En möjlig kritisk aspekt för lärandeobjektet positionssystemet skulle kunna vara att eleverna behöver urskilja siffrors värde i ett flersiffrigt tal.

3.4.3 Variationsmönster

För att elever ska ges möjlighet att urskilja kritiska aspekter behöver de urskilja en variation (Runesson, 2005). Urskiljning innebär att eleverna måste få syn på vissa aspekter ur dess kontext och för att urskiljning ska kunna ske behöver elever uppleva en variation av dessa aspekter (Runesson & Marton, 2002). Variationen kan förekomma i fyra olika former. Formerna kallas variationsmönster och beskrivs nedan med exempel från studiens ämnesinnehåll.

Kontrast – För att kunna uppleva något måste eleverna möta flera exempel som fungerar som kontraster. Eleverna behöver få syn på vad någonting är för att förstå vad någonting inte är (Runesson & Marton, 2002). För att eleverna ska få syn på vad siffrors olika värde i ett tal är, behöver de få syn på vad de inte är. Exempelvis kan talet 25 beskrivas som 2 tiotal och 5 ental. Beskrivs istället talet tvärtom, alltså 5 tiotal och 2 ental, sker en kontrast. Eleverna får då syn på vad det inte är i förhållande till vad det är.

Generalisering – För att eleverna ska kunna urskilja något från någonting annat behöver de erfara generalisering. Generalisering innebär att eleverna upplever flera exempel av lärandeobjektet samtidigt (Runesson & Marton, 2002). Eleverna kan exempelvis möta flera olika tal där tiotalssiffran och entalssiffran benämns. Eleverna kan då få syn på varje siffras positionsvärde, i det här fallet tiotal och ental.

Separation – För att eleverna ska kunna urskilja en aspekt av något från en annan måste en aspekt variera i talet (Runesson & Marton, 2002). Eleverna kan möta olika tal där entalssiffran är konstant medan tiotalssiffran varierar, exempelvis 12, 22, 32, 42, 52.

Fusion – Om det finns flera kritiska aspekter som behöver urskiljas för att förstå ett lärandeobjekt bör eleverna möta dessa aspekter samtidigt (Runesson & Marton, 2002). För att eleverna ska kunna förstå siffrornas värde i ett flersiffrigt tal, måste eleverna uppfatta varje siffras positionsvärde samtidigt, exempelvis i talet 25 och 52. Siffran kan vara värd 2 tiotal i talet 25, men också 2 ental i talet 52.

Sammanfattningsvis kan beskrivas att variationsteorin uppmärksammar att elever kan se och lära olika saker i samma lärandesituation (Mårtensson, 2015). Undervisande lärare kan därför inte förutsätta att alla elever lär sig samma innehåll i samma lärandesituation utan att det beror på hur de uppfattar eller vad de urskiljer av lärandeobjektet (Kullberg, Mårtensson & Runesson, 2016).

4 Metod

I kapitlet kommer en genomgång av metodval, urval och genomförande att beskrivas. Avslutningsvis behandlas forskningsetiska aspekter, samt studiens tillförlitlighet och hur analysprocessen har gått till.

4.1 Metodval

Syftet med studien är att bilda kunskap om elevers möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 6. För att stärka studiens tillförlitlighet användes två datainsamlingsmetoder, vilka var kvalitativa intervjuer med tillhörande uppgifter och observation av en lektion. De tillhörande uppgifterna löste intervjudeltagarna fortlöpande under intervjun. Två metoder valdes för att skapa ett mer tillförlitligt, varierat och detaljrikt datamaterial att analysera än vad endast en metod skulle tillfört.

Studiens fokus var att genom observation bilda kunskap om elevers spontana respons av lärarens undervisning om positionssystemet, men även på elevernas faktiska och uttalade tolkningar om positionssystemet genom intervjuer med tillhörande uppgifter.

Observationen var strukturerad, vilket i den här studien innebar att elever och lärare observerades under en bestämd tid, en lektion. Strukturerad observation valdes eftersom det fanns tydliga regler för vad som skulle observeras och hur datan skulle registreras. Lektionen observerades icke-deltagande, vilket innebar att den pågående undervisningen iakttogs (Bryman, 2011). Icke-deltagande observation valdes till studien eftersom det då gavs möjlighet till att studera interaktionen mellan eleverna och läraren i klassrummet vid elevernas möte med variationsmönster, samt för att studera vilka kritiska aspekter de gavs möjlighet att urskilja. Vid observationen användes ett observationsschema (se bilaga 1) för att systematiskt kunna registrera vilka kritiska aspekter som synliggjordes, variationsmönster samt elevernas aktivitet (Bryman, 2011). Genom observationen av undervisningen kunde variationsmönster och kritiska aspekter urskiljas.

Elevers uttalade kunskaper om positionssystemet framkom genom kvalitativa intervjuer med tillhörande uppgifter i anslutning till den observerade lektionen. Uppgifterna inspirerades av tidigare nationella prov i matematik för årskurs 6 och McIntoshs (2008) diagnosmaterial. Uppgifterna inspirerades även av de fyra utvecklingsfaser elever bör genomgå för att utveckla kunskaper om positionssystemet (O'Neil & Jensen, 1981;

Papadopoulos, 2013; Ross, 2002; Thompson & Lambdin, 1994). Uppgifterna var utformade i enlighet med studiens syfte för att kartlägga elevers visade kunskaper och uppfattningar om positionssystemet. Kvalitativa intervjuer gjordes eftersom intervjuformen inriktar sig på intervjupersonernas synsätt och uppfattningar. Fokus låg på den intervjuade och vad hen upplevde som viktigt och intressant (Bryman, 2011). Intervjuerna var strukturerade, vilket innebar att frågorna och ordningen på frågorna var förutbestämda. Inga följdfrågor ställdes eftersom jag ville se elevernas direkta respons av frågan. Strukturerade intervjuer användes för att intervjuerna skulle vara likartade, vilket gjorde sammanställningarna av intervjuerna tillförlitliga. Intervjun startade med ett antal generella frågor om matematik för att sedan fokusera på frågor som berörde positionssystemet. Eleverna fick därefter lösa 6 uppgifter, vilka behandlade positionssystemet. När eleverna hade löst uppgifterna intervjuades eleverna om sina svar på uppgifterna. Intervjuerna spelades in med ljudupptagning för att sedan transkriberas och användas till analysen. Genom intervjuerna kunde elevernas uppfattningar om positionssystemet och kritiska aspekter urskiljas.

4.2 Urval

I studien observerades en lektion om positionssystemet med anledning att bilda kunskap om elevers möjligheter att förstå positionssystemet. Studien genomfördes i årskurs 6. Klassen bestod av 24 elever och fem elever valdes ut för intervju med tillhörande uppgifter. Skolan där studien genomförts har cirka 400 elever och har uttalat sig om att personalen inte arbetar enligt variationsteorin. Klassen och läraren som höll i den observerade lektionen valdes ut genom bekvämlighetsurval. Bryman (2011) beskriver bekvämlighetsurval såsom att valet av den studerande gruppen väljs ut med avseende på dess tillgänglighet. Kontakt med klassläraren hade skett genom tidigare verksamhetsförlagd utbildning på skolan, jag hade dock inte mött eleverna tidigare. Eleverna som genomförde intervjun med tillhörande uppgifter valdes ut med hjälp av läraren. Läraren valde ut eleverna med anledning att hen bäst har kännedom om deras matematikkunskaper. Läraren fick information att eleverna som skulle genomföra intervjun med tillhörande uppgifter skulle kunna visa på en variation av elevernas kunskaper i klassen. Läraren informerades om ovanstående för att skapa ett tillförlitligt material att analysera och ett representativt resultat för hela elevgruppen och inte endast de som presterar bättre eller sämre i matematikundervisningen.

4.3 Genomförande

Innan studien påbörjades kontaktades rektorn på skolan. Rektorn fick information om studiens syfte och hur den var tänkt att genomföras. Efter rektorns godkännande kontaktades klassläraren med förfrågan om det skulle vara möjligt att genomföra studien i dennes klass. Efter lärarens godkännande tillfrågades eleverna muntligt om de ville delta i studien, vilket alla elever ville. Eleverna fick muntlig information om hur studien skulle gå till och varför den genomfördes. Läraren fick information om att hen skulle undervisa om positionssystemet, men inga fler direktiv eftersom det skulle ha kunnat påverka resultatet (Bryman, 2011). Ytterligare information gavs till läraren om att hen skulle välja ut fem elever till intervjuerna och att eleverna skulle kunna visa på en variation av klassens matematikkunskaper rörande positionssystemet.

För att öka studiens tillförlitlighet gjordes ett pilottest av observationen och intervjun med tillhörande uppgifter. En lektion observerades i en annan klass för att säkerhetsställa att observationsschemat gick att använda. Detsamma gjordes med intervjun med tillhörande uppgifter. Efter pilottestet gjordes några omarbetningar med uppgifterna som eleverna skulle genomföra och intervjufrågorna justerades. Pilotintervjun gjordes för att testa inspelningstekniken och för att utveckla intervjutekniken (Bryman, 2011).

Studien startade med att en lektion om positionssystemet observerades. Under observationstillfället iaktogs undervisningen från klassrummets nedre del. Läraren hade en genomgång om positionssystemet i 25 minuter och därefter arbetade eleverna i sina matematikböcker. Under observationen registrerades sekvenser i klassrummet med hjälp av ett observationsschema (Bryman, 2011). Observationsschemat fokuserade på vilka kritiska aspekter eleverna gavs möjlighet att urskilja, vilka variationsmönster eleverna fick möta och elevernas beskrivningar. Undervisningen dokumenterades även med ljudinspelning som skedde med en mobiltelefon.

I den andra delen av studien intervjuades fem utvalda elever. Intervjuerna genomfördes individuellt och tog cirka 20 minuter per elev. Ljudinspelningen skedde med en mobiltelefon och påbörjades innan eleven kommit in i rummet för att minska elevernas eventuella nervositet (Bryman, 2011). Intervjun startade med ett antal generella frågor om matematiken i skolan för att sedan övergå till att fokusera på positionssystemet (se bilaga 2). Eleverna fick därefter lösa 6 uppgifter som behandlade positionssystemet (se

bilaga 3). I det sista steget intervjuades eleverna om sina svar på uppgifterna. De inspelade intervjuerna transkriberades för att användas till analysen (Bryman, 2011).

4.4 Forskningsetiska aspekter

Vid all form av forskning finns det fyra forskningsetiska aspekter forskare måste ta hänsyn till. Vetenskapsrådet (2010) beskriver principerna, vilka hänsyn har tagits till i studien. Principerna är konfidentialitetskravet, informationskravet, samtyckeskravet och nyttjandekravet. Konfidentialitetskravet innebär att inga personer förutom forskaren kommer att veta vilka deltagarna i studien har varit. Det är viktigt att detta krav inte blandas ihop med anonymitet, vilket är en strängare form där inte forskaren vet vem som har sagt vad (Vetenskapsrådet, 2010). I studien är alla medverkandes namn utbytta till elev 1, 2, 3, 4 och 5 för att ingen ska kunna identifiera deltagarna. Informationskravet innebär att studiens medverkanden ska ha kännedom om att deras deltagande är frivilligt och att de kan avbryta sin medverkan när som helst. De ska även få kännedom om studiens syfte och innebörd samt studiens olika moment (Bryman, 2011). Rektor, klasslärare och elever informerades om studiens innebörd och syfte innan studien startade. Eleverna fick information om att de när som helst kunde avsluta sin medverkan. Samtyckeskravet innebär att deltagarna får bestämma om de vill vara med i studien (Bryman, 2011). Eftersom eleverna är under femton år krävs vårdnadshavarens tillstånd (Vetenskapsrådet, 2010). Elevernas vårdnadshavare kontaktades per telefon och blev informerade om studiens syfte och vad intervjun skulle innehålla. Vårdnadshavare fick därefter ge sitt muntliga tillåtande att deras barn fick delta i studien. Berörda elever tillfrågades innan intervjun startade om de ville delta samt informerades om att de kan avbryta intervjun när som helst. Det sista kravet, nyttjandekravet innebär att all insamlad data endast används till avsedd studie (Bryman, 2011). Materialet får inte användas till någon annan undersökning eller annat ändamål. Materialet från observationen och de transkriberade intervjuerna kommer att sparas i tre månader efter det att studien publicerats och sedan raderas.

4.5 Tillförlitlighet

Bryman (2011) beskriver att kriterierna validitet och reliabilitet främst är något som används inom kvantitativ forskning. Vidare beskriver Bryman (2011) att inom kvalitativ forskning kan istället *tillförlitlighet* användas. Tillförlitligheten består av fyra delkriterier: Trovärdighet, överförbarhet, pålitlighet och en möjlighet att styrka och konfirmera (Bryman, 2011).

För att stärka studiens trovärdighet gjordes ett pilottest av observationen och intervjun med tillhörande uppgifter. Pilottestet genomfördes på en annan skola i årskurs 6. En lektion om positionssystemet observerades för att säkerhetsställa att observationsschemat gick att använda. Sedan genomfördes en intervju med tillhörande uppgifter med en elev i den observerade klassen där pilotstudien ägde rum. Efter pilottestet gjordes några omarbetningar med intervjufrågorna och uppgifterna. Eleven som genomförde pilotintervjun kom med förslag på förbättringar på de uppgifter som genomfördes i anslutning till intervjun. Förbättringar som föreslogs av eleven var bland annat uppgifternas layout och frågeformulering. Förslagen till förbättringar togs tillvara på och uppgifterna justerades. Det framkom även under pilottestet att vissa intervjufrågor var tvungna att omarbetas för att undvika att eleverna enbart svarade ja eller nej på intervjufrågorna.

Studiens genomförande är beskrivet och studiens olika steg framgår, detta stärker studiens överförbarhet. Resultatets överförbarhet stärks även eftersom delar av elevernas beskrivningar av positionssystemet synliggörs i studiens resultatdel. Vidare stärks studiens överförbarhet eftersom det beskrivs hur det insamlade materialet analyserats och hur det föll ut i kategorier.

Studiens pålitlighet stärktes genom att det användes ett observationsschema för att dokumentera den observerade lektionen, samt ljudinspelning. Ljudinspelning användes för att kunna lyssna på lektionen fler gånger och på så sätt kunna analysera och kategorisera resultatet. Vid intervjuerna valdes ljudinspelning för att även här kunna lyssna på intervjuerna flertalet gånger innan transkribering gjordes. Studiens pålitlighet förstärktes genom att det insamlade materialet kunde lyssnas på flera gånger med utgångspunkt i studiens syfte och frågeställningar och på så sätt få fram ett tillförlitligt resultat (Bryman, 2011). Studien anses pålitlig eftersom det skapats en fullständig redogörelse av alla faser i forskningsprocessen (Bryman, 2011).

Eftersom jag aldrig tidigare forskat är det viktigt att det som läses i studien ses ur det perspektivet. Under studiens gång har jag försökt att förhålla mig så professionell som möjligt i min roll som *forskare*. Personliga värderingar har frångåtts och därmed har varken studiens genomförande eller slutsatser påverkats av dessa (Bryman, 2011). Personliga värderingar har frångåtts för att stärka möjligheten att styrka och konfirmera (Bryman, 2011). Studiens tillförlitlighet är hög då tillvägagångssättet, genomförandet och på vilka grunder det insamlade materialet analyserades är tydligt dokumenterade.

4.6 Analys av insamlat material

Variationsteorin användes som guidande princip (Mårtensson, 2015) för att analysera det insamlade materialet. Den guidande principen innebar att variationsteoretiska begrepp så som kritiska aspekter, variationsmönster och urskiljning användes vid analysen. Vid analysen av materialet låg fokus på att försöka identifiera vilka kritiska aspekter som gick att urskilja vid elevernas beskrivningar av positionssystemet. Dessutom handlade analysen om att reflektera över vilka variationsmönster eleverna fick möta i undervisningen om positionssystemet.

Analysen påbörjades efter att observationen och intervjuerna var genomförda. Observationen analyserades för att upptäcka vilka kritiska aspekter eleverna gavs möjlighet att urskilja samt vilka variationsmönster eleverna gavs möjlighet att möta i undervisningen. I ett första steg analyserades observationen för att fastställa vilka kritiska aspekter eleverna gavs möjlighet att urskilja. I ett andra steg analyserades observationen för att fastställa vilka variationsmönster som användes för att eleverna skulle ges möjlighet att urskilja de iscensatta kritiska aspekterna. Variationsteorin har använts för att den gör det möjligt att förstå hur skilda sätt att behandla ett specifikt ämnesinnehåll relaterar till elevers olika möjligheter att lära (Mårtensson, 2015). Sättet att förstå lärande har varit en utgångspunkt vid analysen för att analysera data i relation till studiens forskningsfrågor. Ur ett variationsteoretiskt perspektiv är det möjligt att uppfatta ett och samma fenomen eller lärandeobjekt på skilda sätt beroende på vilka aspekter av ett objekt individen fokuserar på (Lo & Marton, 2011). Att förstå något på ett visst sätt, innebär att individen har fått syn på alla nödvändiga aspekter för ett visst objekt. Om individen ännu inte har urskilt en nödvändig aspekt för att uppfatta objektet, är det en kritisk aspekt för den individen (Mårtensson, 2015).

Vid analysen av intervjuerna användes meningskoncentration som analysmodell. Efter transkribering av intervjuerna sattes stycken ihop som är sammanhängande (Kvale & Brinkmann, 2009). Sedan kortades styckena ner till korta formuleringar där huvudinnebörden fortfarande kvarstod. På så sätt skalades irrelevant information bort från studiens syfte. Sedan kategoriseras formuleringarna in i olika teman för att kunna finna ett mönster, vilket föll ut i tre kategorier (Kvale & Brinkmann, 2009). Kategorierna var: *positionens värde och nollans betydelse i ett flersiffrigt tal, talens egenskaper samt talsortsuppfattning*. Analysen fokuserades i den här studien på att finna variationsmönster och kritiska aspekter. Genom meningskoncentrationen hittades det som var gemensamt i elevernas uppfattningar och det som skiljde sig åt, olikheter och likheter fastslogs.

Vid analysen av den observerade lektionen framkommer det variationsteoretiska perspektivet genom att det analyserades om eleverna gavs möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna genom olika variationsmönster. Vid analysen av intervjuerna med tillhörande uppgifter framkommer det variationsteoretiska perspektivet genom att elevernas lösningar och förklaringar analyserades för att urskilja vilka kritiska aspekter som går att urskilja genom elevernas beskrivningar av positionssystemet.

5 Resultat

Kapitlet inleds med att resultatet från observationen presenteras. Sedan redovisas intervjuerna och vad meningskoncentreringen resulterade i. Avslutningsvis presenteras resultatet utifrån helheten av observationen och intervjuerna.

5.1 Elevers möte med variationsmönster

Nedan presenteras resultatet från observationen. De kritiska aspekterna med tillhörande variationsmönster presenteras var för sig i enlighet med vad eleverna kom i kontakt med under lektionen. Eleverna fick under lektionen möta två olika kritiska aspekter och gavs möjlighet att urskilja dessa genom att läraren använde sig av variationsmönster. Analysen av observationen visade på två undervisade kritiska aspekter. Aspekterna är:

Eleverna behöver förstå att siffrors namn i verbal form kan representeras i skriftlig form.

Eleverna behöver förstå att siffrans position avgör siffrans värde i ett flersiffrigt tal.

Kritisk aspekt 1: *Eleverna behöver förstå att siffrors namn i verbal form kan representeras i skriftlig form.*

Aspekten innebär att eleverna kan överföra tals namn i verbal form till skriftlig form. Läraren synliggjorde aspekten genom att hen muntligt sa flera olika tal som eleverna skulle skriva ner med siffror. Under genomgången kunde det urskiljas att eleverna fick möta *generalisering* som variationsmönster. Eleverna fick möjlighet att urskilja den kritiska aspekten genom att de gavs möjlighet att uppleva flera olika exempel av tal i verbal form, vilka eleverna sedan skulle representera i skriftlig form

Dialog 1. Lärare till elever

1. **Läraren:** Skriv talen som jag säger med siffror och visa sedan för mig. Jag kommer att säga sju olika tal. Nu börjar vi!
2. **Läraren:** - Tretusenfemhundra, femtiotretusenåttahundra, åttiotusenfemton, trehundrafemtiotusen, niohundraåtjugofemtusen, åttahundratretusen, åttamiljoner-tvåhundratusen.

När läraren sagt ett tal muntligt och eleverna visat vad de skrivit, skrev läraren talet på tavlan. Analysen av observationen visade att flera elever visade svårigheter med att representera det verbala talet *åttiotusenfemton* med siffror.

Dialog 2. Lärare och elev

Lärare: /.../ åttiotusenfemton var ett lite svårare tal, varför det?

Elev: Det är svårt att veta vart man ska skriva ettan så att det blir rätt tal.

Elev: Det är svårt att veta hur många nollor man ska skriva in.

Lärare: Vi ritar ett rutsystem och ser om det kan hjälpa oss att se siffrornas rätta position.

Lärare: /.../ nollorna är svåra att placera in, men i det här talet fungerar nollorna som platshållare åt de andra siffrorna.

Efter analysen av den kritiska aspekten kunde det urskiljas att flera av eleverna visade svårigheter med att representera verbala tal som innehåller siffran noll till skrivna tal. Svårigheten synliggörs när eleverna ska skriva ner talet på ett tomt papper utan rutsystem. Vid användning av rutsystem klarade de flesta elever att skriva ner talet. Rutsystemet gav eleverna möjlighet att strukturera talet och en överblick över vilken position de olika siffrorna skulle ha. Analysen av kritisk aspekt 1 synliggjorde att eleverna mötte generalisering som variationsmönster för att de skulle ges möjlighet att urskilja aspekten. Variationsmönstret möjliggjorde för eleverna att möta flera olika exempel av samma typ av uppgift, från verbalt uttryck till skrivet uttryck.

Kritisk aspekt 2: *Eleverna behöver förstå att siffrans position avgör siffrans värde i ett flersiffrigt tal.*

Aspekten innebär att eleverna behöver förstå att siffrans värde är beroende av vilken position siffran har i talet. Eleverna behöver urskilja att siffrornas värde i exempelvis talet 1275 och 5721 ökar eller minskar beroende på vilken position siffran har i talet. Under observationen kunde det urskiljas att eleverna fick möta tre variationsmönster nämligen *kontrast, generalisering och separation*.

Eleverna fick möta den kritiska aspekten i flera olika steg. Läraren började med att skriva upp två tal på tavlan, 57 och 75. Därefter skrev hen siffrans värde under respektive siffra men gjorde det i omvänd ordning under talet 75. Där skrev läraren ental under siffran 7 och tiotal under siffran 5. Eleverna fick uppleva kontrasten mellan tiotal och ental och bli varse om vad någonting är i förhållande till vad någonting inte är.

Läraren skrev sedan upp talet 3 245 798 på tavlan och eleverna samtalande om varje siffrans värde. Sedan skrev läraren upp siffrornas värde under respektive siffra för att

ytterligare tydliggöra siffrornas värde. Tillvägagångssättet återupprepades tre gånger där eleverna fick möta andra tal. I alla tal som eleverna samtalande om var siffrorna konstanta med det första talet (3 245 798) medan deras värde (positionen) varierade. Eleverna fick genom variationsmönstren generalisering och separation möjlighet att urskilja den kritiska aspekten att förstå att siffrans position avgör siffrans värde.

5.2 Urskilda kritiska aspekter vid elevers beskrivningar av positionssystemet

Syftet med intervjuerna var att bilda kunskap om vilka kritiska aspekter som gick att urskilja vid elevers beskrivningar av positionssystemet. För att bilda kunskap om det användes uppgifter som komplement till intervjufrågorna. Eleverna fick lösa uppgifterna och fick sedan samtala om vissa utvalda uppgifter.

Positionens värde och nollans betydelse i ett flersiffrigt tal

Resultat av intervjufråga 1: Kan du berätta om nollans värde i uppgift 2a?

Intervjufrågan utgick från uppgift 2.

Dela in talet i olika talsorter.

Tal	Tusental	Hundratal	Tiototal	Ental
a) 503				
b) 1028				
c) 1402				
d) 13521				

Samtliga fem elever svarade skriftligt och muntligt på uppgiften. I de skriftliga svaren placerade alla elever in rätt siffra under rätt position, men flera elever uttryckte svårigheter med att förklara nollans betydelse i talen.

Intervjuaren: Kan du berätta om nollans betydelse i uppgift 2a?

Eleve 1: Nollan betyder tiotal. I talet 503 finns det 50 tiotal eftersom det är 5 hundratal. Jag skulle kunna växla 5 hundratal till 50 tiotal och skriva 50 i tiotalsrutan och 3 i entalsrutan. Det skulle också bli talet 503.

Elev 2: Mittpositionen betyder tiotal och eftersom det står 0 på den skriver jag det noll schemat. Fast jag vet att det finns 50 stycken tiotal i talet men det skrivs med fem hundratal istället.

Elev 3: Mitten betyder tiotal men det står en nolla där så det finns inga tiotal i detta tal.

Elev 4: Det är inga tiotal, därför står det noll.

Elev 5: Noll betyder ingenting, så det finns inga tiotal i 503.

I analysen av intervjufråga 1 går det att urskilja att elev 1 och 2 har urskilt två kritiska aspekter för att förstå positionssystemet. Elev 1 och 2 har förstått nollans betydelse i ett flersiffrigt tal och att siffrans position avgör siffrans värde. Elev 3, 4 och 5 har inte urskilt de två kritiska aspekterna med liknande förståelse som elev 1 och 2 har gjort. Elev 3, 4 och 5 har till viss del urskilt att siffrans position avgör dess värde men visar ingen förståelse för vad nollan i ett flersiffrigt tal betyder. Sammantaget beskriver elev 3, 4 och 5 att det inte finns några tiotal i talet 503 och att nollan är betydelselös.

Talens egenskaper

Resultat av intervjufråga 2. Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgift 4?

Intervjufrågan utgick från uppgift 4.

Hur många ental finns i talet?

Tal	Ental
150	
1005	

Intervjuaren: Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgift 4?

Elev 1: 150 är lika mycket som 150 ental. Sedan är 1005 lika med 1005 ental.

Elev 2: Först tänkte jag att det var noll ental, sedan kom jag på att det är 150 ental och det är samma på det andra talet med. Först

tänkte jag att det räckte med att skriva 5 ental men det går också skriva 1005 ental.

Elev 3: I den första finns inget ental eftersom det står noll. Men i den andra finns det 5 ental.

Elev 4: Noll betyder att det inte finns några tiotal. Men siffran 5 i talet 1005 betyder att det finns 5 ental, därför skrev jag 5 ental.

Elev 5: I den första står det att det är noll ental, därför skrev jag noll ental. På den andra är det 5 ental, därför skrev jag fem ental.

Analysen av intervjufråga fyra synliggjorde att elev 1 och 2 har urskilt ytterligare en kritisk aspekt för att förstå positionssystemet. Den kritiska aspekten innebär att eleverna har förstått att ett flersiffrigt tal inte enbart kan delas upp i de självklara talsorterna såsom exempelvis hundratal, tiotal och ental. Eleverna har urskilt att exempelvis talet 150 kan representeras av 150 ental. Elev 3, 4 och 5 ser siffran noll som betydelselös, vilket synliggjordes i intervjufråga 1 där alla tre elever beskrev att nollan i ett flersiffrigt tal betyder att det inte finns något på den positionen. Elevernas uppfattningar av siffran noll medför att de anser att det inte finns några ental i talet 150 och att det i talet 1005 endast finns 5 ental. I talet 1005 finns det visserligen 5 ental så svaret är rätt, men i den här frågan skulle det synliggöras om eleverna hade kunskaper om att 1005 kan beskrivas som 1005 ental.

Talsortsuppfattning

Resultat från intervjufråga 4. Kan du berätta hur du löste uppgift 6b?

Anna är och handlar. Hur mycket pengar finns kvar i plånboken?

b). $4000\text{kr} - 1004\text{kr} =$ kr.

Alla elever svarade på uppgiften och förklarade muntligt hur de hade tänkt. Analysen av uppgiften visade att svaren och de muntliga beskrivningarna gav ett varierat resultat och synliggjorde att eleverna hade skilda uppfattningar av subtraktion i räkneoperationer.

Intervjuaren: Kan du berätta hur du löste uppgift 6b?

Elev 1: Jag använde en uppställning för det är lättast. Fyra minus noll går inte så då får man låna från den andra fyran. Sen blir det

lite svårt och jag blev lite osäker en stund, sedan kom jag på det och kom fram till svaret 2006 kronor.

Elev 2: Fyratusen minus tusen, det är tretusen. Sedan tog jag bara tretusen minus fyra och kom fram till svaret 2996 kronor.

Elev 3: Jag använde mig av uppställning och fick svaret till 2996 kronor. Jag tror det är rätt, men jag vet inte. Det är lite svårt med alla nollor när man måste låna och sådär. Men jag känner mig ganska säker på uppställning för man gör det på automatik nu.

Elev 4: Jag använde mig av uppställning för att komma fram till svaret. Fyra minus noll, det går inte. Det går inte så då behövde jag låna från den första fyran. När jag hade lånat där tog jag bara tio minus fyra och det blir ju sex, så då skrev jag sex under sträcket. Sedan blev det ju noll och noll och sist tog jag tre minus ett och det blir ju två. Sedan skrev jag svaret 2006.

Elev 5: Jag tänkte i mellanled. Först tänkte jag fyratusen minus tusen och det är ju lika med tretusen. Sen ändrar man den sista uträkningen till plus så då blir det plus fyra och svaret blev 3004.

Elev 1 och 4 använde sig av standardalgoritm för att lösa uppgiften. Eleverna visade en osäker räkneteknik och tappade bort minnessiffran, vilket mynnade ut i fel svar. Varken elev 1 eller 4 visar några tecken på fel svar när de redogör för sina lösningar. Elev 1 har tidigare visat att hen urskilt flera kritiska aspekter när de urskilts var för sig men i uppgift 6b synliggörs det att hen inte kan praktisera kunskaperna i en räkneuppgift, alltså när aspekterna varieras samtidigt.

Elev 2 visar på en god förståelse om positionssystemet då eleven kan praktisera de tidigare urskilda kritiska aspekterna till räkneuppgiften. Eleven använder sig av en tydlig indelning av talsorter både i den skriftliga lösningen och i den muntliga förklaringen.

Elev 3 använde sig av en standardalgoritm för att lösa uppgiften. Eleven vet inte om det är korrekt svar men använder algoritmen automatiskt. Eleven beskriver att det är svårt med nollorna när växling sker. Eleven har tidigare visat genom de andra uppgifterna att hen inte urskilt den kritiska aspekten som berör nollans betydelse i ett flersiffrigt tal. Eleven anser i tidigare uppgifter att nollan är betydelselös, vilket vållar svårigheter i uppgiften då nollan fungerar som platshållare.

Elev 5 använde sig av mellanled vid beräkning av uppgiften. Först delar eleven in tusentalen och räknar ut dem och kommer fram till tretusen. Sedan förväxlar eleven subtraktion med addition vilket leder eleven till fel svar.

Analysen av uppgift 6b visade att en relativt enkel uppgift för elever i årskurs 6 blev svår, då mer än hälften av eleverna i intervjun har svarat fel. Elevernas muntliga förklaringar till sina uträkningar visade att eleverna inte insåg att de hade räknat fel. I analysen av intervjufråga 4 synliggjordes att samtliga elever förutom elev 2 och 3 hade svårigheter med nollans betydelse vid beräkning, tusentalsövergången i subtraktion samt en relativt oklar talsortsuppfattning. Analysen av uppgiften visade att elev 1, 4 och 5 hade en osäker räkneteknik, vilket synliggjordes då eleverna tappade bort minnessiffror eller förväxlade subtraktion med addition. Elev 1, 4 och 5 visade även på en relativt osäker taluppfattning då de i intervjun inte visade några tecken på att de kommit fram till fel svar. Av analysen att tyda har elev 2 och 3 en utvecklad räkneteknik. Elev 2 visar en säkerhet när hen muntligt förklarar uträkningen med uppdelningen av talsorter för sig, medan elev 3 förklarar att hen använde sig av uppställning och gör uträkningen per automatik. Eftersom elev 3 beskriver att hen inte vet om svaret är rätt eller fel utan att hen gör uträkningen per automatik är det svårt att avgöra elevens talsortsuppfattning och förståelse för positionssystemet.

5.3 Sammanfattning

I studiens resultat har eleverna visat att de urskilt de kritiska aspekterna på olika nivåer. Exempelvis har en elev i en viss uppgiftsstruktur urskilt en kritisk aspekt, men vid en annan uppgiftsstruktur har eleven inte urskilt den kritiska aspekten. Nollans betydelse i ett flersiffrigt tal är en särskilt framträdande kritisk aspekt som eleverna hade särskilt svårt att urskilja. Nollans betydelse och dess komplexitet synliggjordes i flera av frågorna under intervjun och under den observerade lektionen.

Genom observationen synliggjordes att eleverna fick möjlighet att med hjälp av variationsmönster urskilja två kritiska aspekter och därmed ges möjlighet att utveckla en förståelse för positionssystemet. De kritiska aspekterna var:

Eleverna behöver förstå att siffrors namn i verbal form kan representeras i skriftlig form.

Eleverna behöver förstå att siffrans position avgör siffrans värde i ett flersiffrigt tal.

Eleverna gavs möjlighet att urskilja den första kritiska aspekten genom *generalisering*.

Den andra kritiska aspekten gavs eleverna möjlighet att urskilja genom *kontrast*, *generalisering* och *separation*.

Genom elevernas beskrivningar av positionssystemet gick det att urskilja tre kritiska aspekter för den valda elevgruppen. De urskilda kritiska aspekterna var:

Eleverna behöver förstå positionens värde och nollans betydelse i ett flersiffrigt tal.

Eleverna behöver utveckla en förståelse för talens egenskaper.

Eleverna behöver utveckla sin talsortsuppfattning.

6 Diskussion

Kapitlet inleds med en diskussion kring den valda metoden för studien. Resultatet diskuteras sedan i förhållande till tidigare forskning inom ämnesområdet men även till en pågående studie av liknande karaktär. Avslutningsvis redovisas idéer till fortsatt forskning.

6.1 Metoddiskussion

Syftet med studien är att bilda kunskap om elevers möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 6. För att besvara forskningsfrågorna och därmed uppnå syftet med studien valdes en kvalitativ forskningsansats där två datainsamlingsmetoder kombinerades. Metoderna som användes var observation och intervjuer med tillhörande uppgifter. Genom de två metoderna skapades ett mer detaljrikt och varierat material att analysera än vad enbart en metod hade tillfört. Användandet av två metoder ökade studiens tillförlitlighet i jämförelse med vad endast en metod hade tillfört.

Med hjälp av de valda metoderna kunde frågeställningarna besvaras. Observationen möjliggjorde för mig att urskilja vilka delar av ett variationsmönster eleverna fick uppleva i undervisningen om positionssystemet. Vid intervjuerna kunde jag genom elevers beskrivningar av positionssystemet urskilja kritiska aspekter. Tillsammans möjliggjorde metoderna en helhetssyn över vilka möjligheter elever har att förstå positionssystemet i årskurs 6. Hade jag istället valt att använda mig av en kvantitativ forskningsansats där en enkät använts som datainsamlingsmetod hade det varit svårt att urskilja vilka möjligheter elever ges för att förstå positionssystemet, men även svårt att urskilja kritiska aspekter utifrån elevers beskrivningar av positionssystemet. Visserligen hade jag kunnat urskilja kritiska aspekter utifrån en enkät där elever svarat på liknande uppgifter som de gjorde i studiens intervju men det hade inte varit möjligt att ta del av elevernas tankemönster. För att urskilja en förståelse av ett lärandeobjekt hävdar Runesson (2005) att det krävs ett samspel. I den här studien var samspelet mellan positionssystemet och eleven. För att sedan kunna analysera samspelet rättvist ska forskaren vara en del i det samspelet som sker (Runesson, 2005). Därför valdes en kvalitativ ansats framför en kvantitativ ansats till studien.

Klassen där observationen ägde rum valdes ut genom bekvämlighetsurval. Bryman (2011) beskriver bekvämlighetsurval såsom att valet av den grupp som ska studeras väljs

ut med avseende på dess tillgänglighet. I viss bemärkning kan ett bekvämlighetsurval ge en negativ inverkan på resultatet då forskaren tidigare kan ha haft kontakt med studiens elevgrupp (Kvale & Brinkmann, 2009). I den här studien har inte bekvämlighetsurvalet haft någon negativ påverkan på resultatet då jag inte haft kontakt med eleverna tidigare utan endast varit i kontakt med klassläraren. Eftersom jag inte mött eleverna tidigare hade jag inga förkunskaper om deras matematikkunskaper vilket gjorde att jag bad klassläraren välja ut elever för intervjun. Läraren fick direktiven att eleverna som genomförde intervjun skulle visa på en variation av elevernas matematikkunskaper i klassen. Om jag istället skulle valt ut eleverna själv utifrån deras engagemang på lektionen hade det funnits risk att endast en elevgrupp i klassen hade blivit representerad vid intervjuerna.

Läraren fick information om att lektionen som skulle observeras skulle behandla positionssystemet. Inga fler direktiv gavs eftersom det skulle kunna ha påverkat resultatet. Hade jag valt att berätta att jag skulle undersöka vilka kritiska aspekter med tillhörande variationsmönster som eleverna gavs möjlighet att urskilja hade detta kunnat påverka resultatet. Skolan där studien genomfördes har inte uttalat sig om att de arbetar utifrån variationsteorin. Hade studien istället gjorts på en skola där det uttalas att de arbetar utifrån variationsteorin hade förmodligen elevernas möte med variationsmönster sett annorlunda ut, då lärarna förmodligen har en helt annan syn på vad variationsmönster innebär.

Valet av att göra ett pilottest av observationen och intervjun var positivt. Pilottestet medförde att jag kunde göra ändringar i de uppgifter som eleverna skulle lösa vid intervjuerna och träna på intervjuteknik. Den största skillnaden mellan pilotintervjun och de faktiska intervjuerna var uppgifterna eleverna skulle genomföra i intervjun. Frågorna och dess layout justerades så att eleverna fick svara på olika sätt för att undvika att de enbart skulle svara ja eller nej. Hade inte pilotintervjun genomförts hade det funnits risk att eleverna endast svarat ja eller nej på intervjufrågorna eller uppgifterna och då hade materialet till analysen blivit mindre omfattande.

Eftersom observationen och intervjuerna endast skett i en klass med relativt få elever är jag medveten om att resultatet hade kunnat vara annorlunda. Jag finner dock att metoderna har varit tillfredsställande då de gett mig svar på mina forskningsfrågor och på så sätt kunnat besvara syftet med studien. Om det hade funnits mer tid till studien hade

det varit intressant och lärorikt att genomföra observationer i fler klasser samt intervjua fler elever för att kunna stärka resultatet ytterligare.

6.2 Resultatdiskussion

Resultatet av studien visar att elever till viss del ges möjlighet att förstå positionssystemet i årskurs 6. Elever får möjlighet till detta genom att de med hjälp av variationsmönster kan urskilja två kritiska aspekter. Eleverna möter olika variationsmönster vid undervisning om positionssystemet. Vid vidare intervju kan det sedan urskiljas fler kritiska aspekter vid elevers beskrivningar av positionssystemet. Av resultatet att tyda får elever möjligheter att urskilja kritiska aspekter genom undervisning, men vid elevernas beskrivningar går det att tyda andra kritiska aspekter än de som läraren valt att undervisa om. Här sker det alltså en skillnad gentemot lärarens antagna kritiska aspekter och de faktiska kritiska aspekterna. Skolverket (2011b) lyfter fram att det är viktigt att lärare generellt sett behöver ha en förståelse för vilka olika uppfattningar elever kan ha av ett ämnesområde. Även Runesson (2005) framhåller detta och hon lyfter även fram att det är viktigt att lärare har kunskaper om vilka olika uppfattningar elever kan ha av ett specifikt lärandeobjekt. Utifrån det som skolverket (2011b) och Runesson (2005) beskriver kan det kanske vara så att undervisande lärare inte är tillräckligt insatta i vilka olika uppfattningar elever kan ha av positionssystemet.

Vid den observerade lektionen ville jag få syn på vilka kritiska aspekter eleverna gavs möjlighet att urskilja genom olika variationsmönster. Mårtensson (2015) hävdar att elevers möte med variationsmönster kan möjliggöra för urskiljning av de kritiska aspekterna och förvärvande kunskaper om lärandeobjektet kan ske. Vid analysen av observationen kunde det urskiljas att eleverna fick möta olika variationsmönster. Precis som Mårtensson (2015) exemplifierar i sin avhandling visade det sig att det var svårt att fastställa variationsmönster även i den här studien. Observationen krävde flertalet genomgångar för att kunna fastställa vilka variationsmönster eleverna fick möta. Eleverna fick möta olika variationsmönster om än inte så tydliga. De fick vara med om kontrast, generalisering och separation vid genomgången, men mycket ytligt. Ytligheten kan bero på att lärare över lag inte undervisar i enlighet med variationsteorin. Det är ingenting som jag kan uttala mig med säkerhet om men mina verksamhetsförlagda perioder hos olika lärare har gett mig den funderingen. Lo och Marton (2011) beskriver att lärare som inte undervisar enligt teorin kan beröra olika variationsmönster till viss del, vilken undervisande lärare gjorde. Resultatet av observationen kunde sett annorlunda ut

om jag istället observerat en klass där läraren undervisar utifrån variationsteorin. Då hade jag troligtvis kunnat se tydligare variationsmönster.

En viktig aspekt att ta i beaktning vad gäller studiens resultat är att observationsschemat som användes vid observationen var utformat efter antaganden om vilka kritiska aspekter läraren eventuellt skulle kunna beröra i undervisningen. Dessa antaganden utgick från det som tidigare forskning anser att elever bör urskilja för att utveckla en förståelse för positionssystemet (O'Neil & Jensen, 1981; Papadopoulos, 2013; Ross, 2002; Thompson & Lambdin, 1994). De antagna kritiska aspekterna kan ha påverkat resultatet, då jag under observationen blev låst till dessa. Om jag istället valt att inte använda något observationsschema hade jag förmodligen observerat lektionen på ett annat sätt och på så vis kanske kommit fram till ett annat resultat.

Utifrån analysen av elevers beskrivningar av positionssystemet kunde det identifieras tre kritiska aspekter. De tre kritiska aspekterna går att urskilja i det O'Neil och Jensen (1981), Papadopoulos (2013), Ross (2002) och Thompson och Lambdin (1994) anser att elever bör urskilja för att utveckla en förståelse för positionssystemet. De kritiska aspekterna som kunde urskiljas vid elevernas beskrivningar var: *Positionens värde och nollans betydelse i ett flersiffrigt tal, talens egenskaper, och talsortsuppfattning.*

En viktig aspekt att ta hänsyn till vad gäller de ovannämnda kritiska aspekterna är att de är specifika den elevgrupp som studien har ägt rum i. Runesson och Kullberg (2010) framskriver detta som en viktig aspekt att ta hänsyn till. De beskriver ytterligare att kritiska aspekter inte är generella utan unika för varje lärandeobjekt. Därför är det viktigt att ta i beaktning att aspekterna i den här studien inte kan generaliseras till någon annan elevgrupp eller till något annat lärandeobjekt.

En särskilt framträdande kritisk aspekt som skiljer sig en del mot det tidigare forskning säger (O'Neil & Jensen, 1981; Papadopoulos, 2013; Ross, 2002; Thompson & Lambdin, 1994) är att eleverna i studien visade att de skulle behöva ges möjlighet att urskilja nollans betydelse i ett flersiffrigt tal. Den kritiska aspekt som gav mest problem var uppgifter som behandlade siffrans värde och nollans betydelse. Dessa elever hade troligtvis som Papadopoulos (2013) framhäver, en missuppfattning kring nollans betydelse i ett flersiffrigt tal. Vid elevernas muntliga beskrivningar av vad nollan betyder i talet 503 går det att urskilja att dessa elevers beskrivningar kan sammanflätas med de

beskrivningar Papadopoulos (2013) har gjort. Eleverna ger beskrivningar av att det i talet 503 inte finns några tiotal eller att nollan inte betyder någonting. Beskrivningarna tyder på att eleverna inte har urskilt att siffran noll fungerar som platshållare för att visa värdet på kringliggande siffror. Vid den observerade lektionen skulle eleverna bland annat representera ett verbalt tal i skriftlig form. Flera elever visade problem med att representera det verbala talet *åttiotusenfemton* i skriftlig form. Det visade sig alltså att flera elever hade problem med uppgifter som behandlade nollans betydelse i olika avseenden. Papadopoulos (2013) är den enda utav den forskning jag har tagit del av som diskuterar nollans betydelse. Därför tycker jag det är särskilt intressant att studiens resultat visar att nollans betydelse är den tydligaste kritiska aspekten som eleverna behöver urskilja för att utveckla förståelse för positionssystemet. Jag ställer mig frågande till hur eleverna ges möjlighet att möta nollans betydelse i undervisningen? Kan det vara så att lärare generellt sett har för lite kunskaper om vad nollans betydelse innebär för elevernas utveckling eller beror det på något annat? Vid vidare analys av intervjuerna framkom det även att nollans betydelse vållade problem för eleverna vid algoritmräkning.

Ytterligare en aspekt som tydligt framkom vid analysen av elevernas beskrivningar av positionssystemet har att göra med talens egenskaper. Eleverna som hade problem med uppgifter som behandlade talens egenskaper visade en liknande förståelse som den som Ross (2002) beskriver. Ross (2002) framhåller att elever bör urskilja talens egenskaper för att kunna utveckla en förståelse för positionssystemet. Tre av fem elever i studien visade ingen förståelse för att tal går att dela upp på andra sätt än i de självklara hundratalen, tiotalen och entalen. Talet 150 innehöll enligt dessa elever inga ental och vid vidare intervju beskrev eleverna att talet inte skulle kunna delas upp i annat än 1 hundratal, 5 tiotal och 0 ental. Eleverna visade ingen förståelse för att talet kunde beskrivas som 15 tiotal eller 150 ental. Vidare beskriver Ross (2002) att det är vanligt att elever i de lägre årskurserna har en inlärd och automatiserad teknik för hur tal kan delas upp. Eleverna delar upp talen automatiskt men vet egentligen inte varför de delar upp som de gör eller vad talsorterna innebär. Tre av fem elever som deltog i intervjuerna visade tecken på att de delade in talsorterna utan att behöva tänka när de skriftligt delade in talen i talsorter.

Tidigare forskning poängterar att god kunskap om positionssystemet och siffrors platsvärde i tal, är till stor hjälp när eleverna ska utföra beräkningar i form av exempelvis standardalgoritmer (Cawley et al., 2007; O'Neil & Jensen, 1981; Ross, 1989; Van de Walle & Thompson, 1985). Vid algoritmräkning och huvudräkning är det viktigt att eleverna kan skilja på tusental, hundratal, tiotal och ental. Eleverna måste förstå varför man exempelvis sätter ental under ental i algoritmräkning, varför man sätter siffran 2 i talet 254 längst till vänster och varför man grupperar tiotal med tiotal vid huvudräkning. Elevers talsortsuppfattning kan kartläggas på flera olika sätt men det vanligaste sättet är med hjälp av beräkningar med flersiffriga tal (Reys et al., 1995; Van de Walle & Thompson, 1985). I intervjuerna fick eleverna utföra en beräkning och sedan förklara hur de hade tänkt när de utfört beräkningen. Ross (1989) och Van de Walle och Thompson (1985) hävdar att det kan vara svårt att utläsa elevernas talsortsuppfattning vid beräkningar med en algoritm eftersom eleverna gör den per automatik. Eleverna kan på så sätt komma fram till rätt svar men ändå ha svagheter. För att kunna utföra räkneoperationer med förståelse behöver elever en automatiserad tabellkunskap, förståelse för positionssystemet och kunskaper om räkneoperationer (Cawley et al., 2007). Elever som inte har detta använder sig ofta av standardalgoritmer per automatik och behandlar vanligtvis siffrorna i operationen som ental eller enskilda siffror och förstår inte dess kvantitet (Reys et al., 1995). Det visade sig att fyra av fem elever som deltog i intervjun hade svårt att hantera talsorterna i en konkret räkn situation, vilket tyder på att flera av eleverna inte har en tillräckligt stark talsortsuppfattning. Analysen av intervjufrågan som berörde elevers talsortsuppfattning visar att resultatet stämmer överrens med det som Ross (1989) samt Van de Walle och Thompson (1985) skriver angående elevers talsortsuppfattning. En elev i studien visar exempel på detta. Eleven har i tidigare frågor visat att hen varken urskilt nollans betydelse i flersiffriga tal eller talens egenskaper. När eleven sedan genomförde beräkningen kunde man till synes tro att eleven har en god talsortsuppfattning för att eleven gör en korrekt algoritm och kommer fram till rätt svar. Men vid vidare intervju beskriver eleven själv att hen gjorde uträkningen per automatik och att hen inte visste ifall det var rätt svar. Vid den muntliga beskrivningen synliggörs det att algoritmen i sig inte säger så mycket om elevens talsortsuppfattning utan att det är av stor vikt att samtala med eleven för att få en förståelse av elevers uppfattning.

En pågående studie av liknande karaktär (Taylor, Examensarbete, 2016) som genomförts på samma skola som den aktuella studien, undersöker elevers möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 1. Eleverna i årskurs 1 får genom undervisning möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna som eleverna i den aktuella studien gavs möjlighet att urskilja. En tydlig skillnad mellan elevernas möte med aspekterna och elevernas i årskurs 6 möte med aspekterna är att eleverna i årskurs 1 erfar dem med hjälp av pedagogiskt framtaget material. Forskning påvisar att pedagogiskt material kan hjälpa elever att få syn på specifika matematiska principer, men även för att synliggöra eventuella missuppfattningar (Berman; 2011; Burris, 2013; Uttal et al., 1997). Materialet gav eleverna ett visuellt stöd när de exemplifierade positionens värde. Materialet möjliggjorde för eleverna i årskurs 1 att se det abstrakta tänkandet kring siffrors platsvärde i ett tal, men även för att synliggöra talens egenskaper (Berman, 2011). Talet 30 kunde med hjälp av materialet beskrivas som 3 tiotal eller som 30 ental. I den aktuella studien i årskurs 6 synliggörs det inte att läraren använder sig av pedagogiskt material vid undervisning om positionssystemet. Det kanske skulle kunna vara positivt om eleverna skulle få använda pedagogiskt material som stöd för att urskilja exempelvis talens egenskaper. Kan det kanske vara så att resultatet sett annorlunda ut om pedagogiskt material hade använts vid undervisning om positionssystemet. Eleverna i årskurs 1 ges inte möjlighet att urskilja nollans betydelse i ett flersiffrigt tal, vilket inte heller eleverna i årskurs 6 ges. Vid elevernas beskrivningar av positionssystemet i årskurs 1 framgick det att de inte urskilt nollans betydelse i ett flersiffrigt tal. Kanske kan det vara så att elevernas beskrivningar av positionssystemet i årskurs 6 och då främst nollans betydelse hänger samman med det som eleverna i årskurs 1 ges möjlighet att urskilja. Jag tycker det är intressant att de kritiska aspekterna som gick att urskilja vid elevernas beskrivningar av positionssystemet i årskurs 1 även går att urskilja i de beskrivningar elever i årskurs 6 ger. Jag ställer mig frågande till vad det är som gör att elevernas beskrivningar kvarstår, även att det skiljer fem år på eleverna?

Svenska elever presterar under genomsnittet för OECD/EU vad gäller förståelse av talbegrepp och inom aritmetik (Skolverket, 2013). Resultatet som har redovisats i studien stämmer överrens med det som skolverket beskriver i sin sammanställning. Majoriteten av eleverna som deltog i studien visade svårigheter med siffrornas platsvärden i tal vid beräkningar av standardalgoritmer. Det synliggjordes även att vissa elever inte hade någon kunskap om hur och varför en siffra får sitt värde i ett tal. Kan det vara så att

elever inte ges tillräckliga möjligheter att förstå positionssystemet? Studiens resultat synliggör att elever till viss del ges möjligheter att förstå positionssystemet, men är det inte tillräckligt? Vad behöver göras annorlunda? Är det lärares kunskaper om ämnesområdet som behöver förbättras? Valet av variationsmönster? Kan det vara så att lärare generellt sett inte har tillräckliga kunskaper om vad elever bör urskilja för att förstå positionssystemet?

Avslutningsvis vill jag betona att elevers möjligheter till att lära positionssystemet kan bero på flera faktorer. I den här studien valdes elevernas möte med positionssystemet i undervisningen och elevernas egna beskrivningar av ämnesområdet att fokuseras och analyseras för att bilda kunskap om elevers möjligheter att förstå positionssystemet. Om jag istället hade valt att granska läromedel för att ta reda på elevers möjligheter att lära positionssystemet hade troligtvis resultatet sett annorlunda ut, eller?

6.3 Förslag till fortsatt forskning

Genom studien har jag fått inblick i elevers möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 6. Studiens resultat går att sammankoppla med det som tidigare forskning har poängterat att elever behöver urskilja för att skapa en förståelse för positionssystemet. En framträdande aspekt i studiens resultat är nollans betydelse i ett flersiffrigt tal. Tidigare forskning betonar att det är viktigt att eleverna förstår nollans betydelse men forskningen belyser inte hur viktig nollans betydelse för att förstå positionssystemet faktiskt är. Studiens resultat visar att nollans betydelse i ett flersiffrigt tal är komplex för eleverna att förstå och att det krävs undervisning om nollans betydelse och funktion. Därför skulle det vara intressant att i en fortsatt studie undersöka hur lärare undervisar om nollans betydelse och vad de tror att nollan har för påverkan för elevernas matematikutveckling. Studien genomfördes i en klass där undervisande lärare inte arbetar utifrån variationsteorin, vilket gjorde det svårt att finna vilka variationsmönster eleverna fick möta i undervisningen. Det skulle vara intressant att i en fortsatt studie göra en undersökning i två klasser och jämföra resultaten med varandra. I en klass skulle undervisande lärare arbeta utifrån variationsteorin och i den andra klassen skulle läraren inte göra det. Resultatet skulle sen jämföras för att se ifall det är någon skillnad i vilka möjligheter elever får för att förstå positionssystemet beroende på vilken teoretisk utgångspunkt läraren arbetar efter.

7 Referenser

- Berman, J. (2011). A Five Minute Assessment of Place Value. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 16(4), 24-28.
- Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.
- Burris, J. T. (2013). Virtual Place Value- Compare how third graders think mathematically when using virtual versus concrete base-ten blocks to learn place-value concepts. *Teaching Children Mathematics*, 20(4), 228-236.
- Cady, J. A., Hopkins, T. M., & Price, J. (2014). Impacting Early Childhood Teachers' Understanding of the Complexities of Place Value. *Journal of Early Childhood Teacher Education*. 35(2), 79-97. doi: 10.1080/10901027.2013.874382
- Cawley, J. F., Parmar, R. S., Lucas-Fusco, L. M., Kilian, K. J., & Foley, T. E. (2007). Place Value and Mathematics for Students with Mild Disabilities: Data and Suggested Practices. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal* 5 (1), 21-39. Hämtad från <http://hdl.handle.net/1773/23608>
- Heiberg Solem, I., Kristi, E., & Reikerås, L. (2004). *Det matematiska barnet*. Stockholm: Natur och Kultur.
- Hägström, J., Persson, E., & Persson, P-E. (2012). Taluppfattning, aritmetik och algebra. I B. Grevholm (Red.), *Lära och undervisa matematik från förskoleklass till åk 6* (s. 85–144). Stockholm: Norstedts.
- Johansson, B., & Wirth, M. (2007). *Så erövrar barnen matematiken: talradsmetoden ger nya möjligheter*. (1. uppl.) Uppsala: Kunskapsföretaget.
- Kullberg, A., Mårtensson, P., & Runesson, U. (2016). What is to be Learned? Teachers' Collective Inquiry into the Object of Learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 309-322. doi: 10.1080/00313831.2015.1119725
- Kvale, S., & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun* (2. uppl.). Lund: Studentlitteratur.
- Lo, M. L., & Marton, F. (2011). Towards a science of the art of teaching: Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 7-22. doi: 10.1108/20468251211179678

- McIntosh, A. (2008). *Förstå och användta tal – en handbok*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.
- Mårtensson, P. (2015). *Att få syn på avgörande skillnader: Lärares kunskap om lärandeobjektet*. Dissertations Series No. 29 (Doktorsavhandling, Jönköping University, School of Education and Communication).
- O’Neil, D. R., & Jensen, R. S. (1981). Some Aids for Teaching Place Value. *The Arithmetic Teacher*, 29(3), 6-9. Hämtad från <http://www.jstor.org/stable/41189983>
- Papadopoulos, I. (2013). Using calculators for assessing pupils’ conceptualization on place-value. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(4), 523-544. doi: 10.1080/0020739X.2012.756549
- Reys, B., Reys, R., Emanuelsson, G., Holmquist, M., Häggström, J., Johansson, B., Lindberg, L., Maerker, L., Nilsson, G., Rosén, B., Ryding, R., Rystedt, E., & Sjöberg Wallby, K. (1995). Vad är god taluppfattning? I *Nämna*, (2), 23-26. Institutionen för ämnesdidaktik vid Göteborgs universitet.
- Ross, S. H. (1989). Parts, Wholes and Place Value: A Developmental View. *The Arithmetic Teacher*, 36(6), 47-51. Hämtad från <http://www.jstor.org/stable/41194463>
- Ross, S. R. (2002). Place Value: Problem Solving and Written Assessment. *Teaching Children Mathematics*, 8(7), 419-423. Hämtad från <http://www.jstor.org/stable/41197845>
- Runesson, U. (2005). Beyond discourses and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of education*, 35(1), 69-87. doi: 10.1080/0305764042000332506
- Runesson, U., & Kullberg, A. (2010). Learning from variation – Differences in Learners Ways of experiencing Differences. I B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl & L. Haapasalo (Red.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (s. 299-317). Missoula: The Montana Mathematics Enthusiast.
- Runesson, U., & Marton, F. (2002). The Object of Learning and the Space Variation. I F. Marton & P. Morris (Red.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning* (s. 19–37). Göteborg: Acta Univeritatis Gothenburgensis.
- Skolverket. (2011a). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

- Skolverket. (2013). *PISA 2012, 15-åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2012). *TIMSS 2011, Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket.
- Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. *International handbook of mathematics education*, 4, 411-434. Dordrecht: Kluwer.
- Thompson, P. W., & Lambdin, D. (1994). Concrete Materials and Teaching for Mathematical Understanding. *The Arithmetic Teacher*, 41(9), 556-558. Hämtad från <http://www.jstor.org/stable/41196106>
- Uttal, D., Scudder, K., & DeLoache, J. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of applied developmental psychology*, 18, 37-54. Hämtad från <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0193397397900137>
- Van de Walle, J., & Thompson, C.S. (1985). Partitioning Sets for Number Concepts, Place Value, and Long Division. *The Arithmetic Teacher*, 32(5), 6-11. Hämtad från <http://www.jstor.org/stable/41192519>
- Vetenskapsrådet (2010). *Forskningsetiska principer*. Hämtad från <http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf>

Bilaga 1

Kritisk aspekt:	Förklaring:	Synliggörs i undervisning/ variationsmönster
Additiv egendom	Hur siffrors namn i verbal form kan representeras i skriftlig form	
Nollans betydelse	2 användningsområden. 1. Platshållare 2. Relation med omringande siffror	
Talens egenskaper	Tal delas inte bara upp i givna ental, tiotal osv. Kan också representeras i enbart ental även om tiotal finns i talet, t.ex. $25 = 25$ ental.	
Basen tio & positionens värde	Siffrans positions avgör siffrans värde i ett flersiffrigt tal.	
Lärarens ordval:	Använder rätt terminologi	

Bilaga 2

Intervjufrågor

Inledning

Vad innebär matematiken för dig?

Varför är matematik viktigt?

Stödfrågor:

Pratar du om matematik med dina kamrater?

Använder du dig av matematik på fritiden?

Huvudfrågor

- Vad tänker du på när du hör ordet positionssystemet?

Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgift 2a ?

Stödfrågor:

Vad tänker du om tusental, hundratal, tiotal och ental?

Kan du berätta om nollans värde?

Kan du berätta hur du tänkte när du löste uppgift 4 och 6b?

Stödfrågor:

Vilken uträkning föredrar du? Huvudräkning, uppställning eller någon annan uträkning?

Bilaga 3

Uppgifter

1. Skriv talet med siffror

Sextioåtta	
Etthundrafem	
Niohundrafemtiosju	
Ettusenfemhundrafemtio	
Ettusentjugo	
Tiotusentrettio	

2. Dela in talet i olika talsorter.

Tal	Tusental	Hundratal	Tiotal	Ental
e) 503				
f) 1028				
g) 1402				
h) 13521				

3. Hur många hundratal behövs för ett tusental?

4. Hur många ental finns i talet?

Tal	Ental
150	
1005	

5. Hjälp Carl att räkna ut sina pengar han fått in när han sålt jultidningar.

a). $600\text{kr} + 3\text{kr} = \underline{\hspace{2cm}}\text{kr}$.

Uträkning:

b). $7000\text{kr} + 80\text{kr} = \hspace{1cm}\text{kr}$.

Uträkning:

6. Anna är och handlar. Hur mycket pengar finns kvar i plånboken?

a). $817\text{kr} - 307\text{kr} = \hspace{1cm}\text{kr}$.

Uträkning:

b). $4000\text{kr} - 1004\text{kr} = \hspace{1cm}\text{kr}$.

Uträkning: