



JÖNKÖPING UNIVERSITY

*School of Education and
Communication*

Elevers förståelse av likhetstecknet

En studie i årskurs 3

KURS: *Examensarbete II, F-3, 15 hp*

FÖRFATTARE: *Matilda Abramsson*

EXAMINATOR: *Björn Hellquist*

TERMIN: *VT16*

SAMMANFATTNING

Matilda Abramsson

Elevers förståelse av likhetstecknet

En studie i årskurs 3

Antal sidor: 41

Studiens syfte är att bilda kunskap om elevers förståelse av likhetstecknet och hur undervisning om likhetstecknet i årskurs 3 kan varieras för att bli så effektiv som möjligt. Syftet ska besvaras genom frågeställningarna: vilka variationsmönster som de studerade eleverna kan möta och vilka kritiska aspekter som elever kan identifiera. Kritiska aspekter är det som elever behöver identifiera för att förstå det som ska läras. Variationsmönster innebär att det som är kritiskt i undervisningen ska varieras för att synliggöras. Studien har sin ansats i variationsteorin, där variationsmönster och kritiska aspekter är centrala begrepp.

En lektion observerades i årskurs 3 och sex elever valdes ut och intervjuades om likhetstecknet. Resultatet av studien visar att eleverna mötte sex kritiska aspekter i undervisningen. I varje kritisk aspekt mötte eleverna ett eller flera variationsmönster. Studien visar också att alla de intervjuade eleverna har en relationell och instrumentell förståelse av likhetstecknet. Eleverna har förståelse av en kritisk aspekt, som den observerade lektionen inte hade berört, nämligen att alla tal måste ingå i en uppgift för att lösningen ska vara korrekt. Fyra av sex elever har förståelse av den kritiska aspekten att det ska vara ekvivalens i en kedja av likheter. Resultatet visar också att elevernas förståelse av likhetstecknet inte är beroende av att de möter variationsmönster i undervisningen, men att de möter de kritiska aspekterna på något sätt.

Sökord: likhetstecknet, variationsteorin, variationsmönster, kritiska aspekter

ABSTRACT

Matilda Abramsson

Students' understanding of the equal sign

A study in grade 3

Number of pages: 41

The aim of the study is to explore the understanding of the equal sign and how the teaching about the equal sign among third grade students can be varied to be as effective as possible. The aim will be answered through the questions: what patterns of variation can the studied students meet and what critical aspects have the students identified. Patterns of variation means that what is critical in the teaching should be varied to become visible. Critical aspects is what students need to identify to understand what should be learned. The foundation of the study is the Variation Theory, where patterns of variation and critical aspects are central concepts.

The observations were accomplished during a third grade lesson and six students were selected for interviews about the equal sign. The result of the study shows that the students met six critical aspects during the lesson. For every critical aspect there were one or several patterns of variation that was exposed to the students. The result also states that the students who were interviewed have a relational and instrumental understanding of the equal sign. The students also have understanding of a critical aspect that they did not meet in the observed lesson, namely that all numbers have to enter in a task. Four out of six students have understanding of the critical aspect that there should be equivalence in a chain of similarities. The result also show that the students understanding of the equal sign is not dependent of that they meet patterns of variation in the teaching, but that they meet the critical aspects somehow.

Keywords: equal sign, Variation Theory, pattern of variation, critical aspects

Innehållsförteckning

1	Inledning.....	1
2	Bakgrund.....	3
2.1	Likhetstecknet	3
2.2	Variationsteorin.....	3
2.3	Svårigheter vid tolkning av likhetstecknets innebörd	5
2.4	Styrdokumentet	6
2.5	Tidigare forskning.....	7
3	Syfte och frågeställningar	10
4	Metod.....	11
4.1	Urval.....	11
4.2	Undersökningsmetod.....	12
4.3	Den observerade lektionens upplägg.....	13
4.4	Validitet och reliabilitet.....	13
4.5	Etiska överväganden	15
4.6	Analys	16
5	Resultat.....	17
5.1	Variationsmönster i undervisningen.....	17
5.2	Kritiska aspekter som eleverna har identifierat.....	23
5.3	Resultatsammanfattning.....	28
6	Diskussion.....	29
6.1	Metoddiskussion	29
6.1.1	Undersökningsmetod.....	29
6.1.2	Validitet och reliabilitet.....	30
6.2	Resultatdiskussion.....	32
6.2.1	Variationsmönster	32
6.2.2	Kritiska aspekter.....	33
6.2.3	Styrdokumentet	35
6.2.4	Yrkesverksamhet.....	35
6.2.5	Vidare forskning.....	36
6.3	Slutsats	37
7	Referenser	38
	Bilaga 1 Observationsschema	
	Bilaga 2 Arbetsblad	
	Bilaga 3 Intervjufrågor	
	Bilaga 4 Informationsbrev	

1 Inledning

Enligt kunskapskraven i matematik för årskurs 3 ska eleven ha förståelse av matematiska begrepp, däribland likhetstecknet, genom att använda dem på ett fungerande sätt i vanligt förekommande sammanhang. Med hjälp av symboler, konkret material och bilder ska eleven kunna beskriva begrepps egenskaper (Skolverket, 2011b).

Det finns flera orsaker till elevers bristande förståelse av likhetstecknet. Instrumentell förståelse innebär att elever ser likhetstecknet som att något ska göras (Häggström, Persson & Persson, 2012; Skemp, 2006). De tre vanligaste orsakerna är matematikläromedel (Li, Ding, Carpraro & Capraro, 2008), lärares undervisning (Skemp, 2006) och att elever inte har tillräckligt utvecklad kognitiv förmåga (Baroody & Ginsburg, 1982; Kieran, 1981). Den sistnämnda orsaken är inte alla forskare överens om. Warren (2007) skiljer ut sig när hon menar att elever är tillräckligt kognitivt utvecklade.

Utifrån erfarenheter från verksamhetsförlagd utbildning och vikariat på olika skolor har jag konstaterat att en del lärare inte undervisar om likhetstecknets relationella innebörd och att många elever enbart har en instrumentell förståelse av likhetstecknet. Relationell förståelse av likhetstecknet innebär att elever tolkar tecknet som en likhet mellan enheter (Häggström et al., 2012). Genom erfarenhet har också konstaterats att många elever möter likhetstecknet och olikhetstecknet (\neq) samtidigt, men att de inte har fått en fullständig förståelse av tecknens betydelse utan använder dem som ”rätt eller fel”. Elever får ofta möta uppgifter i matematikläromedel där de ska skriva ut tecknen för ”lika med” eller ”inte lika med”. Elever sätter ut ”inte lika med” när de ser att likheten inte stämmer, i stället för att visa att det inte är lika mycket på båda sidor. Exempelvis får elever uppgiften $2 + 3 _ 6$ och när de upptäcker att vänster och höger led inte är ekvivalenta skriver de ”inte lika med” på raden utan att förstå varför. Eleverna ser ”inte lika med” som ett tecken för att något är fel.

Det finns flera orsaker till att elever uppfattar likhetstecknet instrumentellt, i stället för relationellt (Abramsson & Flarup, 2015). Att förstå likhetstecknet instrumentellt är inte sämre än att förstå det relationellt, dock behöver elever förstå likhetstecknet både instrumentellt och relationellt för att utveckla kunskap i algebraiskt tänkande (Runesson, 2006). Den här studien har inspirerats av variationsteorin, vilket innebär att undervisningen

ska varieras för att synliggöra kritiska aspekter (Mårtensson, 2015). Studien ska fokusera på att undersöka hur elever möter likhetstecknet i undervisningen. Fokus i studien ska även vara på att undersöka elevers förståelse av likhetstecknet genom att undersöka vilka kritiska aspekter eleverna har identifierat hos likhetstecknet. Kritiska aspekter är det som elever behöver förstå för att förstå ett lärandeobjekt (Mårtensson, 2015).

I studien observerades en lektion i årskurs 3 för att kunna identifiera variationsmönster som elever möter. Variationsmönster innebär att det som är kritiskt i undervisningen ska varieras för att kunna synliggöras (Mårtensson, 2015). Efter lektionen fick sex elever lösa uppgifter i ett arbetsblad med likhetstecknet som viktig del och genom intervjuer fick de berätta hur de hade löst uppgifterna. De fick även berätta om likhetstecknet för att olika kritiska aspekter skulle kunna synliggöras.

2 Bakgrund

I kapitlet kommer instrumentell och relationell förståelse av likhetstecknet att beskrivas. Vidare beskrivs variationsteorin och delar av styrdokumentet redovisas. Avslutningsvis presenteras tidigare forskning av gynnsamma arbetssätt i undervisningen om likhetstecknet och svårigheter med likhetstecknet som elever kan ha.

2.1 Likhetstecknet

Likhetstecknets tvådelade betydelse kan benämnas på två olika sätt. Skemp (2006) benämner förståelsen av likhetstecknet som instrumentell och relationell. Sfard (1991) benämner istället förståelsen av likhetstecknet som operationell och strukturell. I den här studien kommer Skemps (2006) begrepp att användas.

Instrumentell förståelse av likhetstecknet innebär att elever ser tecknet som en representation för att något ska göras eller att det *blir*, med andra ord att beräkningar ska göras. Elever uppfattar att $5 + 2$ *blir* 7 (Häggström et al., 2012; Skemp, 2006). En instrumentell förståelse av likhetstecknet innebär att vänsterledet räknas ut först och resultatet av uträkningen skrivs i högerledet (Sfard, 1991). **Relationell** förståelse av likhetstecknet innebär att elever tolkar tecknet som en likhet mellan två eller fler enheter. Elever har förståelse av att $5 + 2$ *är* 7 (Häggström et al., 2012). En relationell förståelse innebär även att likheten kan läsas från både vänster och höger (Sfard, 1991).

2.2 Variationsteorin

Studien har inspirerats av variationsteorin, vilken har sitt ursprung i fenomenografi (Runesson, 2005). Variationsteorin går ut på att kunna urskilja något från något annat genom variation (Lo & Marton, 2011; Runesson, 2005). Det vill säga, ”för att veta vad något är, måste vi också veta vad något *inte* är” (Runesson, 1999, s. 31). För att eleven ska förstå vad likhetstecknet är, måste eleven också förstå vad det inte är (Bergqvist & Echevarría, 2011), exempelvis olikhetstecknen jämfört med likhetstecknet. Variationsteorin bygger på att det finns ett lärandeobjekt i fokus, vilket ska läras (Lo & Marton, 2011; Runesson, 2005). *Lärandeobjektet* är det specifika som ska läras och det ska vara väl avgränsat. Lärandeobjektet kan vara det som upplevs som svårt och som det krävs mer och specificerad undervisning om (Runesson & Kullberg, 2010). Objektet ska inte vara en förmåga eller ett kunskapskrav, utan mer avgränsat (Bergqvist & Echevarría,

2011). För att uppfattningen om ett lärandeobjekt ska bli samma hos elever som lärare, behöver lärare ta reda på elevers förkunskaper om objektet. Utifrån elevers uppfattningar kan sedan undervisningen utformas (Lo & Marton, 2011; Runesson, 2005). För att ett lärandeobjekt ska få någon funktion, måste det, för eleverna, finnas någon mening med att lära sig det för eleverna (Lo, 2014; Lo & Marton, 2011). Ett exempel på lärandeobjekt är ”att förstå likhetstecknets betydelse och kunna använda det korrekt i matematiska räkneoperationer med addition och subtraktion inom talområdet 0–100” (Bergqvist & Echevarría, 2011, s. 28).

I variationsteorin undersöks olika människors uppfattningar av samma fenomen, i den här studien likhetstecknet. Elever och lärare har förkunskaper om ett fenomen som ska läras, men förkunskaperna behöver inte alltid vara samma hos elever och lärare. Genom att undersöka vad elever kan, ges möjlighet för lärare att se skillnaderna mellan sina och elevers uppfattningar av fenomenet. Utifrån skillnaderna kan lärare sedan utforma undervisningen (Kullberg, Mårtensson & Runesson, 2016).

Kritiska aspekter är det som elever behöver urskilja för att förstå ett lärandeobjekt (Mårtensson, 2015). Kritiska aspekter som elever behöver förstå kan förändras till andra kritiska aspekter efter undervisningen. Aspekterna kan förändras, eftersom elever kan lära sig i undervisningen (Magnusson & Maunula, 2011; Mårtensson, 2015). Kritiska aspekter är inte misstag eller svårigheter. Det är i stället något som elever ännu inte har identifierat (Mårtensson, 2015; Olteanu & Holmqvist, 2012) och de kan variera mellan elever. Det som är kritiskt för en elev behöver inte vara det för en annan elev (Lo & Marton, 2011). Inom variationsteorin behöver de kritiska aspekterna synliggöras i undervisningen för att elever ska få en större förståelse av lärandeobjektet. Lärare behöver få syn på de kritiska aspekterna som eleverna upplever, innan de kan undervisa elever om lärandeobjektet (Lo & Marton, 2011; Magnusson & Maunula, 2011). Ett exempel på en kritisk aspekt är att elever kan identifiera att det ska vara exakt lika mycket på båda sidor om likhetstecknet (Bergqvist & Echevarría, 2011).

Variationsmönster används för att elever ska kunna identifiera det som är kritiskt hos ett visst lärandeobjekt. Variationsmönster innebär att det som är kritiskt i undervisningen ska lyftas fram genom variation. Ett variationsmönster måste vara systematiskt, medvetet och riktat till elevgruppen (Magnusson & Maunula, 2011; Mårtensson, 2015). För att elever ska förstå vad något är måste de också förstå vad det *inte* är, vilket kallas *kontrast*

(Magnusson & Maunula, 2011; Mårtensson, 2015). För att elever, exempelvis, ska förstå vad likhetstecknet innebär, måste den också veta vad det inte är, det vill säga att tecknet kontrasteras mot olikhetstecknen ($<$, $>$ och \neq). Tre är inte lika med två (Bergqvist & Echevarría, 2011). I *generalisering* gestaltas lärandeobjektet på flera sätt (Magnusson & Maunula, 2011; Mårtensson, 2015). I generalisering är det bara en kritisk aspekt som varierar (Mårtensson, 2015). Exempelvis kan föremålen variera där elever behöver förstå att tre inte är lika med två, oavsett vilka föremål det handlar om (Bergqvist & Echevarría, 2011). I *fusion* varierar flera kritiska aspekter samtidigt (Mårtensson, 2015), exempelvis i uppgiften $1 + _ + 2 = 6 - 1$ där både den kritiska aspekten att räknesätt varierar och den kritiska aspekten att antalet tal varierar i uppgiften. I den här studien innebär en trio av variationsmönster att en kritisk aspekt synliggörs genom variation, både genom kontrast, generalisering och fusion.

I undervisningen möter elever olika variationsmönster: kontrast, generalisering och fusion (Lo & Marton, 2011; Magnusson & Maunula, 2011). För att elever ska förstå flera kritiska aspekter av ett lärandeobjekt, är det mest gynnsamt att först undervisa om en aspekt i taget och den måste knyta an till elevers befintliga kunskaper, erfarenheter och sammanhang för att sedan undervisa om flera kritiska aspekter samtidigt. (Lo & Marton, 2011). Lärare kan inte lära elever, men de kan hjälpa elever att lära sig. Lärare som undervisar om de kritiska aspekterna i undervisningen, kan inte garantera att elever lär sig. Det är elevers erfarenheter av de kritiska aspekterna som spelar roll för lärandet. Dock finns det elever som lär sig, trots att lärare inte undervisar om de kritiska aspekterna (Lo & Marton, 2011; Runesson & Marton, 2002). Vad elever lär sig beror på vad de har blivit presenterade för i undervisningen och på egna erfarenheter (Runesson & Marton, 2002). Det är dock större chans att elever lär om de undervisas med hjälp av variationsteorin jämfört med att inte undervisa med teorin, enligt Lo och Marton (2011) och Runesson och Marton (2002) och därför ska teorin vara i fokus i den här studien. Genom att undersöka elever i en klass och under en lektion med inspiration av variationsteorin kan kritiska aspekter och variationsmönster identifieras som synliggör elevers förståelse av likhetstecknet.

2.3 Svårigheter vid tolkning av likhetstecknets innebörd

Elever har ofta en instrumentell förståelse av likhetstecknet, vilket innebär att eleverna utför en beräkning av en uppgift. Eleverna kan också tro att vänsterledet finns först, för att efter beräkningen övergå i högerledet (Pettersson, 2010; Sfard, 1991). Eleverna behöver

förstå att höger- och vänsterledet har samma värde och existerar samtidigt (Häggström et al., 2012; Pettersson, 2010). Elever kan ha uppfattning av att det endast kan finnas ett tal i högerledet i en uppgift, det vill säga svaret (Pettersson, 2010). Elever kan uppfatta påståenden som att $2 + 3 = 4 + 1$ som inkorrekta, då det är två tal i högerledet (Runesson, 2006). Det är vanligt att elever anser att matematikuppgifter ska läsas från vänster till höger och att svaret av en uppgift skrivs i högerledet (Häggström et al., 2010). Elever kan tro att det enbart är korrekt att skriva ett påstående som att $5 + 7 = 12$ medan ett påstående som att $12 = 5 + 7$ är inkorrekt. I påstående som att $12 = 5 + 7$ byter en del elever plats på additionstecknet och likhetstecknet för att additionstecknet ska vara till vänster och likhetstecknet till höger, även om elever ser att det inte är en likhet då (Runesson, 2006). En annan kritisk aspekt är att elever behöver förstå att likhetstecknet inte enbart kan användas vid addition (Bergqvist & Echevarría, 2011)

Elever kan ha problem med uppgifter likt $7 = _ + 5$, då de adderar 7 och 5 och skriver 12 på raden. I uppgifter likt $8 = 4 + _ + 3$ kan elever skriva 12 på raden för att de adderar 8 och 4 och utesluter $+ 3$, eller så skriver de 4 för att $4 + 4$ är 8 (Pettersson, 2010). Det finns även elever som skriver 15 på raden, för att de adderar alla talen (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

Det är viktigt att likheter i en kedja lyfts fram i undervisningen för att förstå att det ska vara ekvivalens genom hela kedjan. Elever behöver förstå att alla leden i $22 - 17 = 3 + 2 = 25 - 20 = 20 - 15$ är skilda sätt att uttrycka samma värde, i det här fallet värdet 5 (Häggström et al., 2010).

Elever behöver förstå att likhetstecknet kan användas både instrumentellt och relationellt för att utveckla kunskap i algebraiskt tänkande (Runesson, 2006).

2.4 Styrdokumentet

Enligt läroplanen för grundskolan (Skolverket, 2011a; 2011b) ska elever ges förutsättningar att tolka vardagliga och matematiska situationer samt att de med hjälp av matematiska uttrycksformer ska kunna beskriva och formulera situationerna. Matematiska begrepp och metoder samt deras användbarhet ska elever ges förståelse av genom undervisning. Förmågan att använda och analysera matematiska begrepp, däribland likhetstecknet och olikhetstecknen ($<$, $>$ och \neq), samt att se samband mellan begrepp ska elever ges förutsättningar att utveckla i matematikundervisningen (Skolverket, 2011b).

Enligt läroplanens (Skolverket, 2011b) centrala innehåll ska elever ges undervisning om likhetstecknets betydelse och matematiska likheter i årskurs 1–3. I slutet av årskurs 3 ska eleven, enligt kunskapskraven, ha grundläggande förståelse av matematiska begrepp och ska i elevnära sammanhang kunna använda begreppen på fungerande sätt. Eleven ska med hjälp av symboler, konkret material eller bilder kunna beskriva begreppen. Eleven ska även kunna relatera begreppen till varandra genom att ge exempel (Skolverket, 2011a). Genom förståelse av likhetstecknet och dess innebörd läggs en grund för algebraiskt tänkande (Skolverket, 2011a; 2011b).

2.5 Tidigare forskning

Det finns en mängd olika sätt att undervisa om en relationell förståelse av likhetstecknet. Lärare kan använda sig av olika typer av konkret material (Warren, 2007), undervisa med eller utan olikhetstecken (Hattikudur & Alibali, 2010; Li, Ding, Capraro & Capraro, 2008), genom elevdiskussioner (Warren, 2007) eller med problemlösning (Barlow & Harmon, 2012).

Konkret material används för att göra undervisningen tydligare för elever. I samband med undervisning om likhetstecknet kan konkret material vara gungbrädor, vågskålar eller balansvågar. Materialet kan vara till stor hjälp för många elever, då de både kan se och fysiskt känna betydelsen av likhetstecknet (Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour, 2013). Det finns dock elever som inte är hjälpta av balansvågar, då de förflyttar sitt fokus från likhetstecknet till att det ska väga exakt lika mycket på vågen. Ibland kan vågar vara lite sneda på grund av felkonstruktion, trots lika stora kvantiteter på båda sidor av likhetstecknet. Det är därför av vikt att vara tydlig i undervisningen för att elever ska förstå att det handlar om likhetstecknet och inte om jämvikt (Warren, 2007). Cuisenairestavar och tärningar kan vara användbara konkreta material. Cuisenairestavar är räknestavar med olika valörer och används för att jämföra tal. Mellan tärningars utfall kan likhetstecken och/eller olikhetstecken placeras ut (Adolfsson Boman et al., 2013; Sherman & Bisanz, 2009).

Undervisningen om likhetstecknet kan introduceras tillsammans med symboler för större än ($>$) och mindre än ($<$) för att elever ska ges möjlighet till att förstå likhetstecknet relationellt (Hattikudur & Alibali, 2010; Li et al., 2008). Det kan finnas fördelar med att introducera större än och mindre än *före* likhetstecknet. Det ger elever möjlighet att själva

upptäcka att tecknen inte är tillräckliga, det vill säga att olikhetstecken inte går att använda mellan likheter. De kan upptäcka att det behövs ett tecken för likhet (Adolfsson Boman et al., 2013). Likhetstecknet kan också introduceras utan symboler där elever får jämföra objekt, exempelvis längden av två skedar. Då får eleverna upptäcka om de är lika långa eller om någon är längre eller kortare än den andra (Li et al., 2008). Dock finns det risk att elever enbart jämför längden och inte skapar en relationell förståelse av likhetstecknet. Elever bör förstå att likhetstecknet handlar om en relation mellan tal och inte mellan objekt (Essien, 2009). Undervisning om likhetstecknet skulle kunna ske i samband med olikhetstecken, då elever kan jämföra och upptäcka likheter och skillnader mellan symbolerna (Hattikudur & Alibali, 2010). Det kan också vara fördelaktigt att introducera likhetstecknet *före* addition och subtraktion med konkret material eller med matematiska symboler (Essien, 2009; Kieran, 1981). Elever som har introducerats för likhetstecknets betydelse *före* symbolen för likhetstecknet och addition har förståelse av påståenden som $3 = 3$, $3 + 4 = 5 + 2$ och $5 = 3 + 2$ och de innehar därmed en relationell förståelse av likhetstecknet (Kieran, 1981).

Diskussioner om likhetstecknet är av vikt för elevers relationella förståelse av tecknet (Barlow & Harmon, 2012; Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2008). När elever ser likhetstecknet som ett beräkningsverktyg, exempelvis när de skriver $2 + 2 = 4 + 6 = 10 + 3 = 13$, i stället för att använda det som ett tecken för likheter, är det gynnsamt att föra diskussioner om likhetstecknets innebörd, för att elever ska ges möjlighet till en relationell förståelse av tecknet (Knuth et al., 2008). Matematiska uttryck som är sanna eller falska kan vara fördelaktiga att använda i undervisningen för att elever ska ges en relationell förståelse av likhetstecknet. Exempelvis kan eleverna möta utsagan $2 + 3 = 4 + 2$ och de ska då avgöra om den är sann eller falsk. I falska uttryck får elever tillfälle att resonera om likhetstecknets innebörd (Carpenter & Franke, 2001; Carpenter & Levi, 2000; Falkner, Levi & Carpenter, 2007; Hattikudur & Alibali, 2010). Falska och sanna matematiska uttryck kan även användas för att omvandla elevers instrumentella förståelse till relationell (Molina & Ambrose, 2006). Öppna utsagor, exempelvis $5 = _ + 3$, kan gestaltas både symboliskt och med konkret material samt kan användas i undervisningen för att gynna en relationell förståelse av likhetstecknet (Carpenter & Levi, 2000).

Problemlösning är också ett fördelaktigt arbetssätt för att öva elevers relationella förståelse av likhetstecknet, då det matematiska innehållet kan bindas samman med tidigare

erfarenheter och förkunskaper. Problemlösningsuppgifter kan också ses som meningsfulla för elever då matematiska uttryck får ett sammanhang. Det kan dock vara problematiskt att hitta problemlösningsuppgifter med fokus på likhetstecknet och som engagerar elever (Barlow & Harmon, 2012). Genom problemlösning får elever möjlighet att resonera, jämföra och diskutera matematik med varandra i klassen (Adolfsson Boman et al., 2013; Barlow & Harmon, 2012).

3 Syfte och frågeställningar

Syftet med studien är att undersöka elevers förståelse av likhetstecknet och hur undervisning om likhetstecknet i årskurs 3 kan varieras för att bli så effektiv som möjligt.

Syfte ska besvaras genom frågeställningarna:

- Vilka variationsmönster kan elever möta i undervisning om likhetstecknet?
- Vilka kritiska aspekter i matematiklärandet har de studerade eleverna i årskurs 3 uppfattat under en lektion?

4 Metod

En lärare och 22 elever i årskurs 3 observerades under en lektion om likhetstecknet. Efter observationerna fick sex av eleverna lösa uppgifter på ett arbetsblad om likhetstecknet. Efter att eleverna löst uppgifterna på arbetsbladet intervjuades de utifrån deras lösningar av uppgifterna. Materialet analyserades sedan med inspiration av variationsteorin.

4.1 Urval

I studien observerades en lektion i årskurs 3 där elevers förståelse av likhetstecknet var i fokus. Skolan i studien är medelstor och finns i en medelstor kommun i södra Sverige med upptagningsområde av elever från olika kulturer och bakgrunder. Två skolor tillfrågades och skolorna valdes ut för att kunna ge så många olika svar som möjligt med olika uppfattningar utifrån bakgrund och erfarenheter. Valet av skolorna gjordes med bekvämlighetsurval, vilket innebär att skolorna valdes utifrån tillgänglighet (Bryman, 2011). På skolorna har jag haft verksamhetsförlagd utbildning och de tillfrågade lärarna arbetar på skolorna. Dock har jag inte haft verksamhetsförlagd utbildning hos de utvalda lärarna. Den ena skolan användes som reserv om det skulle uppstå något problem som medförde att studien inte kunde genomföras på den andra skolan. Kriterier för val av lärarna på skolorna var att de var behöriga lärare i matematik och arbetade i årskurs 3. Årskurs 3 valdes för att undersöka om elever har en relationell och/eller instrumentell förståelse av likhetstecknet när den inledande undervisningen, det vill säga årskurs 1 och 2, är passerad och då de ska ha uppnått kunskapskraven för matematik i slutet av årskurs 3.

Undersökningen innefattade observationer av en lärares undervisning och kortare intervjuer som gjordes med sex elever, där de löste några uppgifter i ett arbetsblad om likhetstecknet. Elever som intervjuades valde jag ut under lektionen. Det gjordes inte slumpmässigt eftersom ett slumpmässigt val kunde ha gjort att flera elever svarat lika. Genom att välja ut vilka elever som skulle intervjuas gavs större möjlighet till att se en spridning av olika kritiska aspekter (Larsson, 1986). Eleverna valdes utifrån frågor och svar under lektionen och hur de löste uppgifterna på arbetsbladet under lektionen, för att fånga olika uppfattningar av likhetstecknet.

4.2 Undersökningsmetod

Ett antal svårigheter elever kan ha gällande likhetstecknet beskrivs i studiens bakgrund (se kap 2.3). Utifrån svårigheterna utformades och sammanställdes ett antal möjliga kritiska aspekter till observationsschemat (se bilaga 1) i avsikt att kunna identifiera olika kritiska aspekter, som skulle kunna dyka upp under observationstillfället. Uppgifterna i arbetsbladet (se bilaga 2) som eleverna löste i intervjun skapades för att kunna identifiera kritiska aspekter hos eleverna. Uppgifterna i arbetsbladet som eleverna löste vid intervjun har även sin grund i Runessons (2006) studie om likhetstecknet, där elever skulle avgöra om påståendena $4 + 2 = 3 + 3$ och $4 = 4$ är sanna eller falska. Eleverna skulle även få fylla i det som fattas på raderna i exempelvis uppgifterna $12 = 5 + _$ och $15 = _ - 4$. Slutligen skulle eleverna fylla i de symboler (=, + respektive -) som fattas i uppgifter likt 6_3_11_2. Kriterierna för uppgifterna i arbetsbladet var att de skulle behandla de möjliga kritiska aspekterna som utgick från svårigheterna och Runessons (2006) studie. De utformades för att undersöka om eleverna hade identifierat de kritiska aspekterna.

I studien gjordes icke-deltagande observationer av undervisningen och kvalitativt inriktade intervjuer med elever utfördes. Icke-deltagande observation innebär att inget samspel sker mellan observatören och de observerade (Bryman, 2011). På så sätt minimerades risken för påverkan av resultatet. En lärare i årskurs 3 ombads att undervisa under en lektion om likhetstecknet, där jag enbart observerade. Observation var ett lämpligt tillvägagångssätt, då variationsmönster kunde identifieras och observationer kompletterade intervjuerna (Runesson, 1999). Genom att spela in ljudet i undervisningen kunde materialet analyseras flera gånger, vilket behövdes då variationsmönster är svåra att hitta till en början (Christoffersen & Johannessen, 2015). Vid observationerna användes ett observationsschema för att veta vad som skulle fokuseras på i observationerna (Bryman, 2011). Lektionen spelades in med ljud för att analysen av materialet skulle bli mer tillförlitlig. Inspelning med ljud valdes för att film hade kunnat göra läraren nervös. Fältanteckningar gjordes över variationsmönster i undervisningen i observationsschemat. I observationsschemat skrevs elevs och lärares påstående ner i fältet för kommentarer och i fältet för variationsmönster skrevs momenten i undervisningen ner, kopplat till de kritiska aspekterna.

Eleverna löste uppgifterna i arbetsbladet om likhetstecknet innan intervjufrågorna ställdes. Elevernas tankar om likhetstecknet synliggjordes i intervjuerna samma dag, när de löste

uppgifter i arbetsbladet om likhetstecknet (Runesson, 1999). En kvalitativ inriktad intervju inriktar sig på vad den intervjuade anser vara centralt och intressant och därför var intervjuer passande till studien. Genom metoden gavs möjlighet att ställa följdfrågor och att rikta in frågorna efter intresseväckande påståenden som eleverna sa, för att få fylliga svar. Intervjun var semistrukturerad, vilket innebär att en uppsättning frågor användes och de behövde inte ställas i samma ordning i alla intervjuer. Frågorna ställdes dock i samma ordning för att de skulle bli så lika som möjligt och för att kunna sammanställa svaren på ett pålitligt sätt (Bryman, 2011). För att få syn på kritiska aspekter ställdes frågor utifrån elevernas lösningar av uppgifterna i arbetsbladet. Efter att de hade löst uppgifterna i arbetsbladet intervjuades de om likhetstecknets betydelse (se bilaga 3), men också om lösningarna av uppgifterna i arbetsbladet. Intervjuerna spelades in, då eleverna och deras vårdnadshavare hade gett sitt godkännande till detta och de transkriberades sedan för att användas vid analysen (Bryman, 2011).

4.3 Den observerade lektionens upplägg

Läraren introducerade lektionen med att synliggöra målet med lektionen för eleverna. Målet med lektionen var att eleverna skulle förstå likhetstecknets betydelse och att kunna lösa en enkel ekvation. Lektionen delades in i flera moment. Det första momentet var att läraren skrev likhetstecknet på tavlan och eleverna fick förklara vad tecknet innebär genom olika exempel. Det andra momentet var att läraren skrev $= 50 =$ på tavlan, där varje elev skulle fortsätta kedjan med ett led, exempelvis $20 + 30 = 50 = 40 + 10$. Diskussioner fördes mellan elever och läraren. I det tredje momentet skrev läraren några öppna utsagor på tavlan som eleverna skulle lösa i par och förklara hur de hade tänkt. Det fjärde momentet innefattade sanna och falska utsagor. Eleverna fick först avgöra om de var sanna eller falska och sedan förklara varför de var sanna eller falska. Lektionen avslutades med ett femte moment där eleverna fick ett arbetsblad av läraren med uppgifter som de skulle lösa själva för att visa att de förstår likhetstecknets betydelse.

4.4 Validitet och reliabilitet

Syftet med den här studien är att undersöka elevers förståelse av likhetstecknet i årskurs 3 och hur undervisning om likhetstecknet kan varieras för att bli så effektiv som möjligt. Studien har inspirerats av variationsteorin och därför skulle variationsmönster samt kritiska aspekter identifieras.

Validitet (giltighet) innebär att det som avsågs att mätas också var det som mättes i studien (Bell & Waters, 2016; Bryman, 2011). Anledningen till valet av observationer var att läraren som undersöktes inte behövde vara insatt i variationsteorin. Genom att inte berätta för läraren att observationerna gjordes ur ett variationsteoretiskt perspektiv påverkade inte läraren resultatet, eftersom läraren inte skulle undervisa medvetet om variationsmönster och kritiska aspekter inför studien. Det gör studien mer valid. Vid observationer är det vanligt att de personer som observeras söker efter målet med observationerna och betar sig utifrån målet för att uppfylla det. Dock är det inte säkert att målet med observationerna är samma mål som de observerade tror (Bryman, 2011).

För att studien skulle vara valid var det viktigt att frågorna i intervjun var tydligt formulerade, för att undvika att elever svarade på något annat än det som var avsett att svaras på eller att eleven inte förstod frågan. Genom transkribering av intervjuerna var det mindre risk att informationen registrerades på ett felaktigt sätt. I studien var det också av vikt att tänka på hur materialet bearbetades och analyserades för att studien skulle ha en hög grad av validitet. Det finns en risk vid observationer att lärare och elever inte betar sig som vanligt, då de vill uppfattas på ett positivt sätt av observatören. I ett klassrum är det mycket som händer, både lärare och elever har mycket att göra och därmed minskar observatörens påverkan då de inte hinner koncentrera sig på observatören. I intervjuer finns det risk att elever enbart svarar ja eller nej, oavsett frågan. För att undvika det fick eleverna frågor som de inte kunde svara ja eller nej på i intervjufrågorna (Bryman, 2011).

Reliabilitet innebär studiens pålitlighet, vilket innebär att andra forskare ska kunna göra en liknande studie och få ett liknande resultat. Därför är det av vikt att beskriva i vilken social miljö som studien gjordes för att det ska vara möjligt att upprepa studien (Bryman, 2011). För att en studie ska få hög reliabilitet ska undersökningens data och metod vara noggrant och exakt beskrivna, det vill säga vilken data som används, hur den samlas in och bearbetas (Christoffersen & Johannessen, 2015). För att ha en hög grad av reliabilitet beskrivs i denna undersökning vilken miljö observationerna och intervjuerna är gjorda i (Bryman, 2011). Både uppgifterna i arbetsbladet som eleverna löste och intervjufrågorna redovisas genom bilaga 2 och 3. Urvalet av lärare och elever är också viktigt att beskriva för att andra forskare ska kunna göra en liknande studie och få ett liknande resultat. Att beskriva insamlingsmetoden och analysen av materialet noga ger således studien en hög reliabilitet (Bryman, 2011).

4.5 Etiska överväganden

Inom svensk forskning ska fyra etiska principer följas: informations-, samtyckes-, konfidentialitets- och nyttjandekravet. Informationskravet innebär att de berörda personerna i undersökningen ska ha kännedom om att deras deltagande är frivilligt och att de när som helst kan avbryta deltagandet. De ska också ha kännedom om syftet med undersökningen och vilka moment som ingår (Bryman, 2011). Läraren tillfrågades via mejl och fick veta syftet med, samt tidsomfånget vid, undersökningen. Eleverna tillfrågades i samband med lektionen om de ville ställa upp på en intervju. Innan intervjun genomfördes förklarades för eleven att svaren inte kommer att bedömas, utan att olika uppfattningar av likhetstecknet skulle samlas in. Eleverna fick också veta att de kunde avsluta intervjun när som helst om han eller hon inte vill medverka längre. Samtyckeskravet innebär att deltagarna själva får bestämma om de vill vara med i undersökningen. För elever krävs godkännande från elevens vårdnadshavare (Bryman, 2011). Läraren tillfrågades igen precis före lektionen om han eller hon fortfarande ville ställa upp. Blanketter om deltagande i intervju skickades ut till vårdnadshavare där de fick godkänna att deras barn deltog i studien (se bilaga 4). Rektor gav sitt godkännande för observationer och intervjuer av elever. Konfidentialitetskravet innebär att alla personer i undersökningen ska behandlas konfidentiellt, vilket innebär att ingen ska kunna spåra vem eller vilka som har sagt vad i studien (Bryman, 2011). I studien är alla elevers namn utbytta mot påhittade namn (Robin, Selma, Kim, Alex, Theo, Lisa) för att ingen ska kunna spåra vem som sagt vad. Inte heller skolans namn eller belägenhet nämns. Nyttjandekravet innebär att materialet som samlas in endast får användas i undersökningen. Det får inte användas till någon annan undersökning eller annat ändamål (Bryman, 2011). Materialet från observationer och intervjuer kommer inte att användas till något annat än den aktuella studien, vilket deltagarna blev informerade om, både skriftligt och muntligt.

Eleverna fick ge sitt godkännande till inspelning av intervjun och intervjuerna spelades in. Eleverna fick ge sitt godkännande som en del av de etiska principerna. Deltagarna i intervjun kunde bli nervösa av olika inspelningsverktyg (Bryman, 2011), därför användes en mobil för inspelning, eftersom den är något som eleverna är vana vid. Mobilen startades när eleven gett sitt medgivande och stängdes av när eleven lämnat rummet för att inte missa någon del av intervjun.

4.6 Analys

Studien har inspirerats av variationsteorin, där variationsmönster och olika kritiska aspekter synliggörs. Analysen av det insamlade materialet började när observationerna och intervjuerna var gjorda. Variationsteorin användes som guide för att analysera materialet. Det innebar att kritiska aspekter identifierades utifrån elevers förståelse av likhetstecknets betydelse och användning. Variationsteorin användes också som utgångspunkt, för att analysera lärande och undervisning, det vill säga vilka variationsmönster som eleverna mötte i undervisningen och de kritiska aspekter som eleverna identifierade. Vid analysen av det insamlade materialet, det vill säga av fältanteckningar och ljudupptagningar, lästes materialet ett flertal gånger för att få en överblick (Mårtensson, 2015). I materialet markerades de kritiska aspekterna som behandlades i de olika momenten under lektionen. Utifrån markeringarna undersöktes hur varje kritisk aspekt behandlades i undervisningen och vilka variationsmönster som eventuellt tillämpades för att fokusera på den kritiska aspekten. De kritiska aspekterna i undervisningen analyserades genom att undersöka vilka variationsmönster som användes. De kritiska aspekterna presenteras var för sig och de olika variationsmönstren synliggörs i resultatet. I materialet från intervjuerna markerades vilka kritiska aspekter som varje elev har förståelse av genom lösningarna av uppgifterna i arbetsbladet och det transkriberade materialet. Sedan gjordes en sammanställning över vilka elever som identifierat de kritiska aspekterna, vilken presenteras i en tabell (se tabell 1, kapitel 5.2). Resultatet av analysen presenteras i nästkommande kapitel.

5 Resultat

Intervjuerna och observationerna analyserades med inspiration av variationsteorin för att bilda underlag till resultatet. Syftet med studien är att undersöka elevers förståelse av likhetstecknet i årskurs 3 och vilka variationsmönster som elever möter, där variationsmönster och kritiska aspekter identifieras. Genom observationerna av en lektion om likhetstecknet kunde variationsmönster, utifrån kritiska aspekter som synliggjordes i undervisningen, identifieras. I intervjuerna med sex utvalda elever i årskurs 3 kunde kritiska aspekter som eleverna identifierat synliggöras. För att göra resultatet trovärdigt används citat i texten. I kapitel 5.1 presenteras de variationsmönster som behandlades under den observerade lektionen utifrån de sex kritiska aspekter som läraren undervisade om. I kapitel 5.2 presenteras de sju kritiska aspekter som elever har identifierat. Variationsmönster och identifierade kritiska aspekter delades på i två kapitel för att eleverna har identifierat fler kritiska aspekter än undervisningen behandlade.

5.1 Variationsmönster i undervisningen

Under lektionen behandlades sex kritiska aspekter och varje kritisk aspekt presenteras var för sig där variationsmönster synliggörs.

Kritisk aspekt: *Eleverna behöver förstå likhetstecknets relationella innebörd.*

Den kritiska aspekten innebär att eleverna behöver förstå att det ska vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. Det synliggjordes genom att läraren ritade likhetstecknet på tavlan och gav eleverna möjlighet att förklara likhetstecknets betydelse.

Läraren: Om du ser ett sånt tecken (pekar på likhetstecknet), vad betyder det då?

Elev 1: Det är om det på ena sidan står det 6 och på andra sidan står det också 6. Alltså, det betyder att det måste ha samma tal på båda sidor.

Läraren: Det måste vara samma tal på båda sidor. Är det någon mer som kan förklara?

Elev 2: Likhetstecknet visar vad det blir tillsammans. $6 + 6 = 12$ så måste det vara likhetstecknen...

Läraren: ... för att det ska vara lika mycket på båda sidor. Finns det någon ytterligare förklaring?

Elev 3: Ungefär som om jag har $3 + 3$ och då är ju det lika mycket som 6 och det handlar om att man ska visa att det är lika mycket på båda sidorna och det kan va till exempel $3 + 3 = 3 + 3$. Det behöver inte vara någonting som blir ett svar utan det kan va $3 = 3$.

Läraren: Det måste vara lika mycket på den sidan (pekar på vänsterledet) som det är på den sidan (pekar på högerledet). Det måste vara lika mycket på båda sidor.

Genom ovanstående citat belyses att eleverna gavs möjlighet att förstå likhetstecknets relationella innebörd, då eleverna kunde identifiera att det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. Eleverna fick även möta olika beskrivningar av likhetstecknets innebörd. Första fick eleverna möta likhetstecknet utan räknesätt i förklaringen $6 = 6$. Sedan gav en elev förklaringen av en instrumentell förståelse i exemplet $6 + 6 = 12$. Sist fick eleverna möta en relationell förståelse i elevexemplet $3 + 3 = 3 + 3$. Momentet i undervisningen innefattade variationsmönstret *generalisering*. Fokus var endast på att förstå att det ska vara lika mycket på båda sidor av tecknet, oavsett att likhetstecknet förklarades med utsagorna $6 = 6$, $6 + 6 = 12$ och $3 + 3 = 3 + 3$.

Den ovanstående kritiska aspekten, att förstå likhetstecknet relationellt, synliggjordes även i undervisningen, där eleverna fick arbeta med öppna utsagor. Eleverna förväntades finna det saknade talet för att likheten skulle uppfyllas. Läraren visade uppgiften $6 + _ = 15 - 5$ för eleverna. Eleverna fick först fundera själva på vilket tal som skulle uppfylla utsagan. Sedan diskuterades i helklass hur uppgiften kunde lösas genom att eleverna fick komma med förslag. Läraren förklarade att det ska vara lika mycket på båda sidor och att eleverna måste börja lösa högerledet i uppgiften först.

Läraren: Vad ska det stå på raden här (pekar på uppgiften $6 + _ = 15 - 5$)?

Elev 4: Det ska stå 4.

Läraren: Hur gjorde ni för att lösa uppgiften?

Elev 4: Jag räknade ut $15 - 5$ och det är 10. Sen tog jag $6 +$ någonting som ska vara 10 och då visste jag att det är 4.

Läraren: Bra. Det ska vara lika mycket på båda sidor. I den här uppgiften måste man först räkna ut högersidan för att sedan kunna räkna ut vänstersidan.

Citatet ovan belyser att eleverna gavs möjlighet att förstå att likhetstecknet kan uppfattas relationellt. I momentet synliggjordes variationsmönstret *fusion*, där flera av de kritiska aspekterna av lärandeobjektet varierade samtidigt. De kritiska aspekterna att förstå att flera räknesätt kan användas i en uppgift med likhetstecknet samt att en uppgift kan läsas från både höger och vänster varierade samtidigt. Även den kritiska aspekten att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt varierades samtidigt.

Den kritiska aspekten att förstå likhetstecknet relationellt synliggjordes även i ett annat moment. Eleverna fick hålla upp skyltar med sant och falskt till uppgifter som läraren visade på tavlan. Några exempel på uppgifter som läraren visade är:

1. $15 = 10 + 5$

2. $5 + A = 10 - 1$

$$A = 4$$

3. $10 \times 4 = 40 - 10$

Momentet bestod av två delar. Den första delen var att identifiera om det är lika eller inte lika i uppgifterna. Den andra delen var att eleverna skulle förklara hur de löst uppgifterna och resonemang om uppgifterna gjordes för att belysa flera kritiska aspekter. I uppgifterna gavs eleverna möjlighet att förstå likhetstecknets relationella innebörd. Eleverna fick tillfälle att identifiera att det var lika eller inte lika i uppgifterna. Första delen i momentet bestod av *kontrast* i ett variationsmönster. Uppgiften innebar att eleverna skulle identifiera vad som var lika och inte lika i en uppgift. I första och andra exemplet fick eleverna möjlighet att förstå att det ska vara lika i en uppgift och i tredje exemplet fick de möjlighet att se att det inte var lika, och därmed en falsk utsaga eftersom likhetstecknet används. Efteråt fick eleverna berätta hur de hade löst uppgifterna och läraren förtydligade elevernas tankar, för att alla elever skulle förstå resonemanget. Andra delen av momentet bestod av variationsmönstret *fusion*, då både aspekten att förstå likhetstecknet relationellt och att förstå att antalet räknesätt i en uppgift kunde variera behandlades. De kritiska aspekterna

att en uppgift kan läsas från både höger och vänster samt att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt synliggjordes också i momentets andra del.

Kritisk aspekt: *Eleverna behöver förstå att alla räknesätt kan användas tillsammans med likhetstecknet.*

Den kritiska aspekten synliggjordes i momentet, där läraren frågade om likhetstecknet måste finnas tillsammans med addition eller subtraktion.

Läraren: Måste det vara plus eller minus när man använder likhetstecknet?

Elev 5: Nej.

Läraren: Okej. Hur menar du då?

Elev 5: Det kan användas vid gånger och division.

Läraren: Just precis. Det kan alltså vara alla räknesätt.

Ovanstående citat belyser att likhetstecknet inte endast kan användas vid addition och subtraktion, utan alla räknesätt kan användas tillsammans med tecknet. Eleven i citatet förklarade för klassen att det inte behöver handla om subtraktion eller addition. I lektionen belystes att räknesätten inte har någon betydelse, bara det är ekvivalens mellan höger- och vänsterledet. Momentet bestod av *generalisering*, då det enbart är räknesätten som är i fokus.

Den kritiska aspekten, att alla räknesätt kan användas med likhetstecknet, synliggjordes även i arbetsbladet som eleverna fick i slutet av lektionen. Eleverna skulle fylla i de tomma raderna i uppgifter. Uppgifterna var bland annat $_ - 10 = 2 + _$, $2 \times 8 = _ + 4$ och $24 \div 6 = 8 - _$. I uppgifterna gavs eleverna tillfälle att förstå att alla räknesätten kan användas tillsammans med likhetstecknet, men även att en uppgift kan läsas från både höger och vänster. Eleverna gavs således tillfälle att förstå likhetstecknet relationellt och att det inte enbart behöver finnas ett enda tal på endera sidan av likhetstecknet. Eleverna gavs också möjlighet att förstå att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt. Eftersom momentet innefattade flera kritiska aspekter samtidigt undervisades momentet genom *fusion* som variationsmönster.

Kritiska aspekter: *Eleverna behöver förstå att det ska vara ett lika stort värde genom hela kedjan och att det inte behöver vara ett tal på höger sida av likhetstecknet i en uppgift.*

De båda kritiska aspekterna synliggjordes i samma moment i undervisningen. Den första kritiska aspekten innebär att alla led i en kedja av likheter behöver ha samma värde. Eleverna behöver förstå att likhetstecknet inte ska användas som ett beräkningsverktyg, exempelvis i utsagan $3 + 5 = 8 + 2 = 10$. Den andra kritiska aspekten innebär att eleverna behöver förstå att det inte behöver finnas ett enda tal på höger sida i form av ett svar av en beräkning. Eleverna behöver också förstå att det kan finnas två eller fler tal på varje sida av likhetstecknet. I momentet skrevs $= 50 =$ på tavlan och eleverna fick fortsätta likheten med fler led. Läraren betonade betydelsen av att det ska vara ekvivalens genom hela kedjan.

Läraren: Ni ska fylla på så att det är lika på båda sidor om likhetstecknen genom hela kedjan. Vad kan man skriva här (pekar på höger sida av uppgiften $= 50 =$)?

Elev 9: Man kan skriva $40 + 10$.

Läraren: Bra. Vad kan man skriva mer?

Elev 2: $20 + 30$.

Läraren skriver $20 + 30$ på vänster sida av $= 50 =$.

Läraren: Vad kan man skriva mer?

Elev 10: $25 + 26 - 1$

Läraren: Ja, precis. Varför kan man skriva så här (pekar på $25 + 26 - 1$)?

Elev 10: För att det är lika mycket som 50.

Läraren: Precis. Det viktiga är att det är lika mycket som 50.

I ovanstående citat belyser läraren att det är viktigt att det är ekvivalens genom hela kedjan och att det är korrekt att skriva $25 + 26 - 1$ för att det är ekvivalent med 50. Eleverna i klassen bildade sedan kedjan: $60 - 10 = 25 \times 2 = 20 + 30 = 50 = 40 + 10 = 25 + 26 - 1 = 70 - 20$.

Läraren: Får man sluta med att skriva så här (pekar på $70 - 20$)?

Elev 6: Ja.

Läraren: Varför då?

Elev 6: För att det är lika mycket som 50.

Läraren: Precis. Det är lika mycket i hela kedjan och då spelar det ingen roll om det står två tal i slutet. Det är fortfarande lika mycket.

Genom citatet ovan synliggjordes att eleverna gavs möjlighet att förstå att det inte behöver finnas ett enskilt tal i form av ett svar på höger sida av en uppgift. Eleverna gavs också tillfälle att förstå att det ska vara lika mycket i varje led i kedjan. Eleverna mötte i momentet variationsmönstret *fusion* eftersom fem kritiska aspekter varierade. De kritiska aspekterna att det ska vara lika mycket på varje sida om likhetstecknet i en kedja och att det inte behöver vara *ett* tal i högerledet i en uppgift synliggjordes. Även att alla räknesätt kan användas tillsammans med likhetstecknet behandlades. Att en uppgift kan läsas från både höger och vänster samt att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt synliggjordes också i momentet.

Kritisk aspekt: *Eleverna behöver förstå att en uppgift kan läsas från både höger och vänster.*

Aspekten innebär att eleverna behöver förstå att en uppgift kan läsas från både höger och vänster. Läraren skrev uppgiften $12 - _ = 6 + 3$ på tavlan och frågade hur eleverna gjorde för att ta reda på vad som skulle stå på raden.

Läraren: Hur ska ni göra för att veta vad som ska stå här (pekar på den tomma raden i uppgiften $12 - _ = 6 + 3$)?

Elev 7: Jag räknar $6 + 3$ först, och det är 9. Sedan tar jag $12 - 9$ och vet att det ska stå 3 på raden.

Läraren: Bra. Finns det någon som gör på något annat sätt?

Elev 8: Jag tar först $6 + 3$ och det blir 9. Sen tar jag 12 och räknar ner till 9. Då har jag hoppat 3 steg ner.

Läraren: Jättebra. Ni båda beskriver två bra sätt. I den här uppgiften är det viktigt att man först räknar ut högersidan för att kunna veta vilket tal som ska stå på raden.

Ovanstående citat beskriver hur läraren ger möjlighet för eleverna att förstå att en uppgift kan läsas från både höger och vänster samt att det ibland är nödvändigt att läsa en uppgift från höger till vänster för att kunna lösa den. I momentet mötte eleverna variationsmönstret *fusion*, då den kritiska aspekten att förstå att en uppgift kan läsas från både höger och vänster behandlades. De kritiska aspekterna att alla räknesätt kan användas i en uppgift och

att det inte behöver finnas ett enda tal som svar i högerledet i en uppgift behandlades också. Även den kritiska aspekten att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt synliggjordes.

Kritisk aspekt: *Eleverna behöver förstå att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt.*

Den kritiska aspekten innebär exempelvis att uppgiften $2 + _ = 6 - 1$ kan uppfattas både relationellt och instrumentellt. Den måste uppfattas instrumentellt då högerledet måste beräknas före vänsterledet. Uppgiften måste också uppfattas relationellt då det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. Den kritiska aspekten synliggjordes i uppgifter att lösa som eleverna fick av läraren. Läraren skrev upp en uppgift i taget på tavlan, exempelvis $8 - 2 = 4 + _$ och eleverna skulle sedan lösa uppgifterna. Efter att eleverna löst uppgiften fick några elever förklara hur de hade gjort. Läraren förklarade att vänsterledet måste räknas ut först innan högerledet kan lösas. Genom den här uppgiftsstrukturen får eleverna möjlighet att förstå att en uppgift måste räknas ut på ena sidan, innan en relation mellan leden kan ses. Eleverna mötte momentet i variationsmönstret *fusion* då flera kritiska aspekter varierade samtidigt. De kritiska aspekterna att likhetstecknet kan användas med alla räknesätten och att det inte behöver vara ett enda tal på höger sida i en uppgift varierade samtidigt som att likhetstecknet kan uppfattas relationellt och instrumentellt.

5.2 Kritiska aspekter som eleverna har identifierat

I kapitlet beskrivs de kritiska aspekter de utvalda eleverna i klassen har identifierat. Eleverna har identifierat olika kritiska aspekter. I slutet av kapitlet presenteras en tabell (se tabell 1) där elevernas förståelse av de kritiska aspekterna sammanställs.

Den kritiska aspekten att förstå likhetstecknets relationella innebörd hade alla elever förståelse av i sina beskrivningar av likhetstecknet. Alla eleverna beskrev att likhetstecknet handlar om att det ska vara ekvivalens mellan höger- och vänsterledet och att likhetstecknet inte kan användas om de olika leden inte är ekvivalenta. Ett exempel är Robins beskrivning, som beskrev likhetstecknet på följande sätt:

Intervjuaren: Vad betyder det här tecknet (visar = på en lapp)?

Robin: Att det måste vara lika mycket på båda sidorna för om det inte är lika mycket på båda sidorna, måste man ändra det här likhetstecknet

till ett större eller mindre än tal. Men det här är likhetstecken och då måste det vara lika mycket på båda sidorna. Till exempel är det 10 på ena sidan och $5 + 5$ på andra sidan, då är det lika mycket. Men är det $3 + 3$ på ena sidan och $6 + 1$ så är det inte lika mycket för här är det 7 (pekar på $6 + 1$) och här är det 6 (pekar på $3 + 3$) så då blir det inte lika mycket.

I citatet visade Robin på en relationell förståelse av likhetstecknet där han förstod att det ska vara ekvivalens mellan leden i en uppgift. Han förklarade likhetstecknet med 10 på ena sidan och $5 + 5$ på andra sidan. Robin drog även paralleller till inte lika med. Om det inte är ekvivalens mellan höger- och vänsterledet kan inte likhetstecknet användas.

Ytterligare en kritisk aspekt som kunde identifieras, var att fyra av eleverna hade förstått att det måste vara ekvivalens mellan leden i en kedja där varje led ska ha samma värde. Fyra av sex elever hade förståelse av att utsagan $5 + 4 = 9 + 3 = 12$ inte är korrekt skriven, då det inte är lika mellan alla leden i kedjan. Eleverna förklarade att utsagan inte är ekvivalent för att det inte är samma värden i kedjan. Ett exempel på förklaring till uppgiften är följande:

Intervjuaren: I den här uppgiften (pekar på $5 + 4 = 9 + 3 = 12$), hur tänkte du när du löste den?

Kim: $5 + 4$ är lika med $9 + 3$. Nej, det går inte skriva så för att man kan inte skriva så här för $5 + 4$ är inte lika med 12.

Intervjuaren: Vad tror du att den här personen som har skrivit det här har gjort för fel eftersom du säger att det inte går att skriva så här? Vad är det som är tokigt?

Kim: Att den tog med dem två (pekar på $4 + 5$), men om de skulle försvinna skulle det vara rätt.

Kim förklarade att det måste vara ekvivalens mellan leden i en uppgift och att uppgiften inte är korrekt eftersom den inte var ekvivalent. Hon menade att $4 + 5$ inte är lika mycket som 12 och därför är det inte korrekt att skriva en kedja där det inte är lika mellan alla leden. Tre av eleverna kunde också förklara hur uppgiften skulle ändras för att vara ekvivalent. Eleverna förklarade att det är $4 + 5$ som är felaktigt i utsagan, men att den hade varit korrekt om vänsterledet tagits bort.

Alla eleverna hade identifierat den kritiska aspekten att förstå att en uppgift inte behöver ha ett svar, det vill säga att en uppgift inte enbart behöver ha *ett* tal på höger sida av likhetstecknet. Eleverna hade förståelse av den kritiska aspekten, då alla eleverna sa att en uppgift som har mer än ett enda tal på höger sida kan vara korrekt. Eleverna beskrev exempelvis att utsagan $2 + 6 = 3 + 5$ är korrekt då det är lika mycket på båda sidor om tecknet. Eleverna förklarade uppgiften på liknande sätt som Theo:

Intervjuaren: I den här uppgiften ($6 + 2 = 3 + 5$), varför har du ringat in att det går att skriva så här?

Theo: För $6 + 2$ är ju 8 och $5 + 3$ är också 8.

Intervjuaren: Kan du förklara mer?

Theo: Alltså, det är ju 8 på båda sidorna och då är det lika mycket på varje sida.

Intervjuaren: Så du menar att man kan skriva så här för att det är lika mycket på båda sidorna?

Theo: Ja.

Eleverna har förstått att det inte har någon betydelse om det finns ett eller två tal i slutet av en uppgift så länge det är ekvivalens mellan leden. De hade förståelse av att en uppgift inte heller behöver ha ett svar i form av enbart ett tal på höger sida, utan det kan finnas två tal på varje sida om likhetstecknet och uppgiften kan fortfarande vara korrekt.

Ytterligare en kritisk aspekt som eleverna har identifierat var att det kan vara två eller fler tal på varje sida i en uppgift. Fyra av sex elever har identifierat att det kan finnas oändligt många tal på varje sida av likhetstecknet.

Intervjuaren: Hur många tal kan det finnas på varje sida av likhetstecknet?

Selma: Det kan finnas hur många som helst.

Intervjuaren: Kan du förklara mer hur du tänker? Varför kan det finnas hur många tal som helst på varje sida?

Selma: Man har ju likhetstecknet för att det ska vara lika mycket på båda sidorna så det spelar ingen roll om det är lite större tal eller mindre tal (hon menar fler och färre).

Selma förklarade att antalet tal på varje sida av likhetstecknet inte har någon betydelse, om varje led i en uppgift har samma värde. Hon hade förståelse av likhetstecknets relationella innebörd, då det inte handlar om att finna ett svar, utan att hitta likheter.

Alla eleverna har identifierat den kritiska aspekten att en uppgift kan läsas från både höger och vänster för att kunna lösas. Alla elever har även identifierat den kritiska aspekten att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt. I uppgiften $1 + _ + 2 = 6 - 1$ hade alla elever skrivit 2 på raden och de förklarade att de började med att räkna ut högerledet i uppgiften. Eleverna hade också förståelse av att en uppgift kan läsas från vänster till höger.

Intervjuaren: I uppgiften $1 + _ + 2 = 6 - 1$, hur tänkte du när du löste den?

Lisa: Jag tänkte först att jag kollar här först (pekar på $6 - 1$) och det är 5 och sen plussar jag de här två (pekar på 1 och 2 i vänsterledet) och det är 3. Sen tänkte jag vad som saknas till 5 och det är 2 så då skrev jag det på strecket.

Intervjuaren: Bra. Hur tänkte du när du löste uppgiften $20 - 11 = _?$

Lisa: Jag tänkte att $20 - 11$ är 9 så då skrev jag 9 på raden.

Lisa hade förståelse av att en uppgift kan läsas från höger till vänster och att det var nödvändigt att lösa högerledet innan vänsterledet kan lösas i uppgiften $1 + _ + 2 = 6 - 1$. Det är avgörande att först lösa $6 - 1$ innan vänsterledet kan lösas. Lisa hade också förståelse av att uppgiften $20 - 11 = _$ behöver läsas från vänster till höger, då hon måste lösa vänsterledet i uppgiften innan högerledet kunde lösas för att finna vad som skulle skrivas på raden. Lisa hade förståelse av att uppgifterna måste lösas på ena sidan innan den andra sidan kan lösas. Utan att lösa den ena sidan kan inte utsagan ses som en relation där det är ekvivalens mellan leden.

Ytterligare en kritisk aspekt som fem av sex elever hade förståelse av är att alla räknesätten kan användas tillsammans med likhetstecknet. Alla eleverna förstod att det inte är nödvändigt att använda något räknesätt i en likhet då de sa att det är korrekt att skriva $5 = 5$. Alex förklarade vilka räknesätt som kan användas:

Intervjuaren: Vilka räknesätt kan man använda när man använder likhetstecknet?

Alex: Addition, multiplikation, subtraktion och division.

Intervjuaren: Nått mer?

Alex: När något är lika mycket

Intervjuaren: Hur menar du då?

Alex: Alltså, till exempel i $7 = 7$. Då behöver man inte räknesätt.

Alex förklarade att alla räknesätten kan användas och att det inte har någon betydelse vilket räknesätt som används bara det är ekvivalens mellan leden. Alex poängterar även att ett räknesätt inte är nödvändigt tillsammans med likhetstecknet, då tecknet enbart beskriver en likhet. Han menade att det även är korrekt att skriva $7 = 7$ där det inte finns något räknesätt.

Alla eleverna hade förståelse av den kritiska aspekten att förstå att alla tal i en uppgift måste ingå och att inget tal går att utesluta. I uppgiften $8 = 4 + _ + 3$ skriver alla eleverna 1 på raden och de hade förståelse av att alla talen i uppgiften ska vara med för att det ska vara ekvivalens mellan leden och att $+ 3$ inte går att utesluta.

Tabell 1 visar en sammanställning av vilka kritiska aspekter eleverna har identifierat och inte har identifierat.

Tabell 1. Elevernas förståelse av de kritiska aspekterna. X betyder att eleven har förståelse av den kritiska aspekten.

Kritisk aspekt:	Theo:	Selma:	Alex:	Robin:	Kim:	Lisa:
Förståelse av likhetstecknets relationella innebörd.	X	X	X	X	X	X
Förståelse av att det inte endast behöver finnas <i>ett</i> tal på höger sida av likhetstecknet.	X	X	X	X	X	X
Förståelse av att det kan vara <i>fler</i> än två tal i varje led.	X	X		X		X
Förståelse av att alla räknesätt kan användas med likhetstecknet.		X	X	X	X	X
Förståelse av att en utsaga kan läsas från både höger och vänster.	X	X	X	X	X	X
Förståelse av att det ska vara ekvivalens i en kedja.	X	X			X	X
Förståelse av att alla tal i en utsaga ska vara med för ekvivalens mellan leden.	X	X	X	X	X	X
Förståelse av att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt.	X	X	X	X	X	X

5.3 Resultatsammanfattning

I de kritiska aspekterna mötte eleverna tre variationsmönster: kontrast, generalisering och fusion. Den kritiska aspekten att förstå likhetstecknets relationella innebörd behandlades genom kontrast, generalisering och fusion. Förståelsen av att alla räknesätten kan användas med likhetstecknet behandlades genom generalisering och fusion. Den kritiska aspekten att det inte behöver finnas *ett* tal i högerledet i en uppgift behandlades genom fusion som variationsmönster där aspekten varierades tillsammans med andra aspekter. Även de kritiska aspekterna att en uppgift kan läsas från både höger och vänster samt att en kedja av likheter ska ha samma värde genom hela kedjan behandlades genom fusion som variationsmönster. Den kritiska aspekten att förstå att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt mötte eleverna genom variationsmönstret fusion.

Alla elever hade förståelse av likhetstecknets relationella innebörd och att det inte behöver finnas enbart *ett* tal i högerledet i en uppgift. Eleverna hade också förståelse av att alla talen i en uppgift måste vara med för att det ska vara ekvivalens mellan leden samt att en uppgift kan läsas från både höger och vänster. Alla elever hade förståelse av att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt. Förståelse av att det kan vara fler än två tal i varje led hade fyra av sex elever förståelse av. Fem av eleverna förstod att alla räknesätten kan användas tillsammans med likhetstecknet. Den kritiska aspekten att förstå att det måste vara ekvivalens i en kedja förstod fyra av sex elever.

6 Diskussion

I kapitlet diskuteras studiens metod och resultat. I metoddiskussionen diskuteras metodens styrkor och vad som skulle kunna gjorts annorlunda. Jämförelser mellan resultat av tidigare forskning och resultat i denna undersökning sker i resultatdiskussionen. Slutligen ges förslag på vidare forskning.

6.1 Metoddiskussion

I metoddiskussionen kommer för- och nackdelar med studiens undersökningsmetoder att diskuteras. Även begreppen validitet och reliabilitet kommer att diskuteras i relation till studien.

6.1.1 Undersökningsmetod

Syftet med studien var att undersöka elevers förståelse av likhetstecknet och hur undervisningen kan varieras. Variationsteorin var en passande teori för att finna variationsmönster och kritiska aspekter, vilket tycktes vara intressant och relevant i denna studie. Elevers förståelse hade kunnat undersökas med någon annan teori som utgångspunkt, exempelvis fenomenografin, då den undersöker skilda uppfattningar om företeelser. Kritiska aspekter som identifieras och variationsmönster hade dock inte kunnat hittas genom någon annan teori, då begreppen är centrala inom variationsteorin. Studien hade även kunnat göras med uppgifter i ett arbetsblad som alla elever fått lösa och utifrån arbetsbladens svar kunnat tolka elevernas förståelse av likhetstecknet. Med enbart arbetsblad hade eleverna inte haft möjlighet att förklara sina lösningar av uppgifterna och det som eleverna gjort fel hade då kunnat tolkas som att de inte har förstått den kritiska aspekten. Genom intervjuer fick eleverna möjlighet att förklara hur de tänkt och de fick chansen att visa att de hade förstått, även om de gjort matematiska felräkningar i uppgifterna. Nackdelen med intervjuer är att de tar längre tid att genomföra och transkribera än vad enbart lösningar av uppgifter på ett arbetsblad hade gjort och därmed hade inget större antal elever kunnat intervjuas inom studiens tidsram. Med enbart arbetsblad hade fler elever kunnat ingå i studien.

Inför studien skickades förfrågningar ut till två lärare om deltagande i studien. Båda lärarna tackade ja, där den ena användes som reserv om något skulle hända, som hade medfört att studien inte hade kunnat göras i den andra klassen. Förfrågningarna skickades per mejl till lärarna, vilket skulle kunna antas vara positivt då det gav lärarna tid att tänka igenom sin medverkan, innan svar skickades tillbaka.

Studien gjordes i en klass i årskurs 3 och studien visade på god förståelse av likhetstecknets relationella och instrumentella innebörd hos eleverna. Resultatet skulle ha kunnat se annorlunda ut om studien gjorts i en annan klass. Anledningen är att kritiska aspekter uppfattas olika av elever och även mellan elevgrupper (Lo & Marton, 2011).

6.1.2 Validitet och reliabilitet

För att styrka studiens validitet återkopplades arbetsbladet och genomförandet ofta till studiens syfte och frågeställningar, för att inget annat skulle undersökas än det som var avsett. I studien användes observation som undersökningsmetod för att finna variationsmönster som eleverna mötte i undervisningen. Observation var en fungerande metod som gav möjlighet att finna variationsmönster. Christoffersen och Johannessen (2015) menar att det är fördelaktigt att göra en videoinspelning eller en ljudupptagning av lektionen för att kunna analysera materialet flera gånger. Ljudupptagning valdes, då en kamera kan göra både lärare och elever nervösa. Genom att spela in lektionen får studien en högre reliabilitet. Videoinspelning hade kunnat medföra att variationsmönster hade kunnat identifieras enklare och undervisningen hade kunnat analyseras bättre. Det kunde blivit lättare att analysera observationerna om jag hade kunnat studera videoinspelningar, för att exempelvis studera lärarens gester. Videoinspelning hade dock kunnat påverka min insats i observationerna, då jag hade behövt lägga fokus på att både filma och observera samtidigt under lektionen. Om videoinspelning gjorts samtidigt som observationerna hade inte tid till fältanteckningar funnits. Studien anser jag ha en hög validitet, då syftet var att undersöka variationsmönster elever möter samt elevers förståelse av likhetstecknet, eftersom variationsmönster i undervisningen synliggjordes samtidigt som de kritiska aspekterna satte fokus på elevernas förståelse av likhetstecknet.

Valet av lärare och elever som skulle ingå i studien gjordes med bekvämlighetsurval. Nackdelen med bekvämlighetsurval är att urvalet inte kan betraktas som representativt, vilket gör att generaliseringar inte kan göras. För att stärka validiteten i studien hade det varit en fördel att göra studier i fler klasser för att kunna ge en mer generell bild av förståelsen av likhetstecknet i årskurs 3 och för att finna vilka variationsmönster som elever möter i undervisningen.

Intervjuerna gjordes samma dag som lektionen genomfördes. Intervjuerna hade kunnat visa ett annat resultat om intervjuerna gjorts en annan dag och eleverna inte hade haft lektionen lika aktuell i minnet. Eleverna valdes ut under observationerna utifrån intressanta

frågor som de ställde samt utifrån svar och lösningar till uppgifter som löstes under lektionen. I intervjuerna fick eleverna lösa andra uppgifter i ett arbetsblad. Det kan tänkas att fler kritiska aspekter hade kunnat identifieras om alla eleverna i klassen hade löst uppgifterna i arbetsbladet som användes innan intervjuerna och utifrån det hade andra elever blivit utvalda. Eftersom det inte är säkert att alla elever kom till tals vid lektionen i klassrummet hade ett arbetsblad för alla kunnat vara mer fördelaktigt för att få syn på alla elever och därmed kunde studien ha fått en högre reliabilitet.

Intervjufrågorna var passande till studiens syfte, då eleverna kunde svara på frågorna med fylliga svar om likhetstecknet. I intervjun undveks ledande frågor för att eleverna inte skulle svara på ett visst sätt och för att inte leda in eleverna i specifika tankebanor. De utvalda eleverna fick lösa uppgifter i arbetsbladet innan intervjufrågorna ställdes. Pilotstudier kan användas för att kontrollera att frågorna som ställs i intervjun är korrekt utformade, för att få svar som motsvarar syftet med studien och att frågorna inte missförstås. Med pilotstudier kan eventuella missförstånd undvikas och intervjufrågorna kan omformuleras för att fånga upp många olika svar (Bryman, 2011). En pilotstudie hade kunnat göra studien mer valid, då frågor hade kunnat omformuleras. Arbetsbladet hade bland annat två uppgifter som inspirerats av Runessons (2006) studie, där eleverna skulle placera in tecknen (+, – och =) på rätt plats i uppgifterna $4 _ 1 _ 3 _ 2$ och $10 _ 4 _ 2 _ 4$. Några av eleverna förstod vad de skulle göra, medan andra inte gjorde det. Tanken med uppgiften var att undersöka var eleverna valde att placera likhetstecknet, i början, mitten eller slutet av uppgiften. Eftersom några av eleverna inte förstod vad de skulle göra valdes uppgiften bort, då den inte skulle göra resultatet giltigt. Konkret material kan användas för att göra undervisningen tydligare (Adolfsson Boman et al., 2013). Det kan vara så att eleverna hade förstått uppgiften bättre om den hade gestaltats med konkret material och tecknen (+, – respektive =) på lappar som de skulle ha placerat ut mellan det konkreta materialet som gestaltade talen.

Vid en upprepning av studien hade troligen delar av resultatet blivit detsamma. Eftersom kritiska aspekter skiljer sig åt i olika elevgrupper kan resultatet förmodligen bli olika vid en upprepad studie. Att förstå likhetstecknet instrumentellt skulle kunna vara en kritisk aspekt som många elever identifierar, medan att förstå likhetstecknets relationella innebörd skulle kunna skilja sig åt i större utsträckning. Om studien gjorts i en annan klass, är det möjligt att andra kritiska aspekter hade synliggjorts, då elever identifierar olika kritiska

aspekter, beroende på omständigheter. Även variationsmönster kan skilja sig åt, beroende på vilken undervisning som studeras. Variationsmönster är beroende av vilka kritiska aspekter som lyfts fram i undervisningen och kan därmed skilja sig åt.

6.2 Resultatdiskussion

I resultatdiskussionen diskuteras variationsmönster och kritiska aspekter i förhållande till varandra. Även styrdokumentet och resultat i tidigare forskning diskuteras i förhållande till resultatet och kopplingar görs mellan studiens resultat samt kommande yrkesverksamhet. Avslutningsvis presenteras kortfattat förslag på vidare forskning.

6.2.1 Variationsmönster

Eleverna behöver förstå likhetstecknet relationellt (Runesson, 2006) och de sex intervjuade eleverna har förståelse av likhetstecknets relationella innebörd. Analysen av det insamlade materialet visar att den kritiska aspekten att förstå likhetstecknets relationella innebörd är den enda aspekten där eleverna möter trion av variationsmönster: kontrast, generalisering och fusion. Utifrån det skulle slutsatsen kunna dras att alla eleverna har förståelse av likhetstecknets relationella innebörd på grund av att de har mött denna trio av variationsmönster. Samtliga elever har även förståelse av de kritiska aspekterna att det inte enbart måste finnas ett enda tal på höger sida i en utsaga och att en utsaga kan läsas från både höger och från vänster. Den kritiska aspekten att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt har alla elever även förståelse av. De har också förståelse av att alla tal i en matematikuppgift eller utsaga måste ingå för att uppgiften ska vara korrekt. I dessa kritiska aspekter mötte eleverna inte trion av variationsmönster till varje kritisk aspekt. Till alla kritiska aspekterna som eleverna identifierat, har de mött något av variationsmönstren kontrast, generalisering och fusion, förutom den kritiska aspekten att alla tal måste ingå i en uppgift. Aspekten att alla tal måste ingå i en uppgift, har eleverna inte mött alls under lektionen, men de hade ändå förståelse av den när de inte utelämnar något tal i en uppgift med strukturen $2 + 6 = 1 + _ + 3$. Det skulle kunna antas att elevernas relationella förståelse beror på att de har mött de kritiska aspekterna i tidigare undervisning. Det skulle även kunna vara så att de mött den kritiska aspekten genom trion av variationsmönster tidigare. Det skulle även kunna vara så att undervisning genom trion av variationsmönster inte behövs för att eleverna ändå ska förstå likhetstecknets innebörd.

Under lektionen lyftes sex kritiska aspekter fram, där olika variationsmönster användes. Fyra av de sex kritiska aspekterna behandlades enbart med variationsmönstret fusion, det

vill säga att den kritiska aspekten lyftes samtidigt med fler kritiska aspekter (Mårtensson, 2015). Enligt Lo och Marton (2011) är det emellertid fördelaktigt att undervisa om en kritisk aspekt i taget för att eleverna ska kunna knyta samman den kritiska aspekten med sina tidigare erfarenheter och kunskaper. Samtliga elever har förståelse av tre av fyra kritiska aspekter, trots att de endast har mött variationsmönstret fusion.

Elevernas goda relationella och instrumentella förståelse av likhetstecknet kan bero på att de har undervisats med trion av variationsmönster och därmed haft möjlighet att identifiera de kritiska aspekterna. Enligt Lo och Marton (2011) samt Runesson och Marton (2002) har elever större möjlighet att lära sig om de blir undervisade genom variationsteorin. Det skulle kunna antas att variationsmönstret fusion är tillräckligt för att eleverna ska förstå de kritiska aspekterna, utan att ges möjlighet att möta dem i kontrast och generalisering. Den identifierade kritiska aspekten att det ska vara ekvivalens i en kedja har inte alla elever identifierat. Det kan antas att fler elever hade fått en bättre förståelse av ekvivalens i en kedja om de hade fått undervisning om den kritiska aspekten i ett eller fler variationsmönster, där det synliggjorts att det ska vara ekvivalens genom hela kedjan. Eleverna behöver förstå att det inte enbart kan vara ekvivalens mellan två led, utan att det måste vara ekvivalens mellan alla led för att uppgiften ska vara korrekt.

Det skulle kunna antas att elevdiskussionerna under den observerade lektionen är en bidragande faktor till elevernas goda relationella och instrumentella förståelse av likhetstecknet. Elevdiskussioner är ett fördelaktigt arbetssätt för att elever ska få en relationell förståelse av likhetstecknet (Warren, 2007). Robin berättar i intervjun att de har mött större än och mindre än i undervisningen. Undervisning om likhetstecknet i relation till större än och mindre än kan vara en bidragande faktor till att eleverna har både en relationell och instrumentell förståelse. Att introducera likhetstecknet med större än och mindre än är också fördelaktigt för elevernas goda förståelse av likhetstecknet, enligt Hattikudur och Alibali (2010).

6.2.2 Kritiska aspekter

En kritisk aspekt som presenteras i bakgrunden (se kap. 3.2) är att eleverna behöver förstå att inte enbart addition behöver användas tillsammans med likhetstecknet (Bergqvist & Echevarría, 2011). Det är en kritisk aspekt som eleverna behöver förstå, men i undersökningen visade det sig att eleverna även behöver förstå att likhetstecknet kan användas tillsammans med alla räknesätten. Eleverna behöver identifiera att alla

räknesätten kan användas tillsammans med likhetstecknet, för att kunna förstå utsagor med strukturen $24 \div 3 + 4 = 6 \times 3 - 6$. Eleverna behöver också ges möjlighet att identifiera att en likhet inte behöver innehålla någon beräkning, utan att en likhet kan gestaltas som exempelvis $5 = 5$. Fyra av sex elever har identifierat att det inte är korrekt att skriva $5 + 4 = 9 + 3 = 12$. Förmodligen har de två elever som ännu inte identifierat den kritiska aspekten inte förstått att det ska vara ekvivalens genom hela kedjan när flera likhetstecken används. Det skulle även kunna antas att eleverna missade att kontrollera likheten genom *hela* kedjan och enbart såg varje led för sig, trots att de förstår att det är inkorrekt att skriva en kedja på detta sätt. De elever som ännu inte identifierat den kritiska aspekten skulle troligen vara hjälpta av att läraren undervisar om likheter i en kedja. Det är av vikt att likheter i en kedja lyfts fram i undervisningen (Hägström et al., 2010).

Under verksamhetsförlagd utbildning och vikariat på skolor har jag uppmärksammat att elever uppfattar olikhetstecknet (\neq) som ett tecken för att det är fel och att likhetstecknet inte kan användas. Till skillnad från elever jag mött tidigare menar den intervjuade eleven Robin att det inte är uppgiften som är fel, utan att det är fel tecken som används. Robins synsätt kan antas vara djupare än hos de elever jag tidigare har mött, då han ser betydelsen av att ha både likhetstecknet och olikhetstecknet (\neq). Det skulle kunna antas att elevers relationella förståelse av likhetstecknet också skapar förutsättningar för förståelse av användningen av olikhetstecknen. Att introducera likhetstecknet tillsammans med ”större än” och ”mindre än” kan vara fördelaktigt för att förstå likhetstecknets betydelse (Hattikudur & Alibali, 2010; Li et al., 2008). Det kan vara så att Robin förstår vikten av både likhetstecknet och olikhetstecknet på grund av att han tidigare har mött både större än och mindre än, vilket ger en annan möjlighet att förstå likhetstecknet både relationellt och instrumentellt.

Elevernas goda förståelse av likhetstecknet kan bero på det fördelaktiga arbetssätt som läraren använde med sanna och falska utsagor. Enligt Carpenter och Franke (2001) är sanna och falska påståenden ett fördelaktigt arbetssätt för att gynna en relationell förståelse av likhetstecknet. Öppna utsagor var också något eleverna mötte i undervisningen. Det skulle också kunna antas vara en bidragande faktor till elevernas goda förståelse av likhetstecknet, trots att eleverna inte mött trion av variationsmönster till alla kritiska

aspekter. Carpenter och Levi (2000) visar att öppna utsagor kan vara fördelaktiga att använda för att eleverna ska ges tillfälle att förstå likhetstecknets relationella innebörd.

6.2.3 Styrdokumentet

Enligt styrdokumentet (Skolverket, 2011a; 2011b) ska eleverna i årskurs 1–3 ges undervisning om likhetstecknets innebörd och om matematiska likheter. I slutet av årskurs 3 ska eleverna ha grundläggande förståelse av matematiska begrepp och eleverna ska kunna använda begreppen på ett fungerande sätt (Skolverket, 2011a). Eleverna i studien har grundläggande förståelse, eftersom de kan använda likhetstecknet på ett fungerande sätt, exempelvis i uppgiften $8 = 4 + _ + 3$. Eleverna visar både en relationell och en instrumentell förståelse av likhetstecknet. Det kan tänkas att en precisering av likhetstecknets betydelse i läroplanen hade lagt större fokus på att eleverna ska förstå likhetstecknet både relationellt och instrumentellt. Läraren i studien har troligen tolkat beskrivningen av likhetstecknet i styrdokumentet, som att eleverna ska förstå likhetstecknet tvådelade betydelse. Det skulle kunna antas att elevers förståelse av likhetstecknet i andra klasser, där lärare inte tolkar styrdokumentet på samma sätt som läraren i den här studien, inte har förståelse av likhetstecknets tvådelade betydelse.

6.2.4 Yrkesverksamhet

De svårigheter som presenteras i bakgrunden och de kritiska aspekterna som presenteras i resultatet kan med fördel användas av lärare i undervisningen för att undvika elevers missuppfattningar av likhetstecknet. Aspekterna och de funna svårigheterna i det här arbetet kan vara en grund att utgå ifrån vid undervisning i andra klasser. De variationsmönster som presenterades i resultatet kan användas av lärare i sin undervisning, då undervisningsmomenten med variationsmönstren kan upprepas och utvecklas. De kritiska aspekter som enbart undervisas genom ett variationsmönster kan lärare utveckla genom att undervisas om med hjälp av trion av variationsmönster. Trion av variationsmönster skulle kunna tillämpas genom att likhetstecknet först ställs i kontrast mot olikhetstecknen. I variationsmönstret generalisering skulle eleverna sedan exempelvis kunna ges tillfälle att förstå att en uppgift kan ha två eller fler tal i högerledet, exempelvis i utsagan $2 + 3 = 1 + 4$. Sist, i fusion, skulle även den kritiska aspekten att alla räknesätt kan användas i en utsaga synliggöras, exempelvis genom att byta ut något led i utsagan till ett led med ett annat räknesätt än addition likt $8 - 3 = 1 + 4$.

6.2.5 Vidare forskning

Det hade varit intressant att göra en studie om elevers förståelse av likhetstecknet, där minst två klasser jämförs för att synliggöra skillnader i identifierade kritiska aspekter och i de variationsmönster som elever möter. Utifrån skillnader som eleverna möter i variationsmönster hade också jämförelser kunnat göras mellan elevernas förståelse för att därmed se om variationsmönster påverkar elevernas förståelse av likhetstecknet. Det skulle också vara intressant att jämföra två klassers förståelse av likhetstecknet genom att först göra ett förtest av elevernas förståelse av likhetstecknet. Därefter skulle de båda klasserna kunna undervisas i samma lärandeobjekt, men den ena klassen undervisas med en Learning Study och den andra klassen utan. Efteråt skulle ett eftertest kunna göras för att jämföra om det är mer gynnsamt att undervisas genom en Learning Study eller utan. En Learning Study handlar om att utveckla undervisningen till att bli bättre, där eleverna lär sig mer. Först görs ett förtest för att se elevernas nuvarande kunskaper och utifrån detta görs sedan en lektion som behandlar de kritiska aspekterna kring det givna lärandeobjektet med variationsmönster (Runesson, 2007; Wernberg, 2009). De kritiska aspekterna uppmärksammas i analysen av förtestet och genom litteratur (Runesson, 2007; Wernberg, 2009). Efter lektionens genomförande görs ett eftertest för att se vilket resultat lektionen gav. Utifrån eftertesterna revideras sedan lektionen för att skapa bättre förståelse för det som ännu inte förstås (Runesson, 2007; Wernberg, 2009).

Likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt (Runesson, 2006). För att undersöka om eleverna har förståelse av att likhetstecknet kan uppfattas både relationellt och instrumentellt skulle två textuppgifter kunnat användas i en kommande studie. För att undersöka en instrumentell förståelse hade en uppgift kunnat användas som exempelvis: Sara och Lars går till affären och köper glass för 17 kronor, en blomma för 35 kronor och en plastspade för 28 kronor. Hur mycket måste Sara och Lars betala? För att undersöka en relationell förståelse av likhetstecknet hade en uppgift kunna konstrueras som exempelvis: Karl har fem bollar i en blå låda och ett okänt antal bollar i en röd låda. Annie har tre bollar i en blå låda och nio bollar i en röd låda. Hur stort antal bollar har Karl i den röda lådan om han totalt har lika många bollar som Annie? Genom de båda textuppgifterna skulle det kunna identifieras om eleverna har förståelse av både likhetstecknets relationella och instrumentella innebörd i ett vardagligt sammanhang, och inte enbart i matematiska utsagor, som exempelvis i exemplet $5 + 8 = 22 - \underline{\quad}$.

6.3 Slutsats

Syftet med studien är att undersöka elevers förståelse av likhetstecknet i årskurs 3 och hur undervisningen kan varieras för att bli så effektiv som möjligt. Studien visade att eleverna har både en relationell och en instrumentell förståelse av likhetstecknet. Eleverna möter också en variation av undervisning med trion av variationsmönster, det vill säga kontrast, generalisering och fusion. Elevernas förståelse är inte beroende av att de möter de kritiska aspekterna genom variationsmönstren kontrast, generalisering och fusion, men att de möter de kritiska aspekterna på något sätt i undervisningen med något variationsmönster. Dock kan det sägas att de variationsmönster som eleverna mötte i undervisningen har gett en god förståelse av likhetstecknet hos eleverna.

Studiens resultat anser jag kan användas av lärare i sin undervisning. De kan använda variationsmönstren som presenterats i undersökningen, som underlag för undervisning om likhetstecknets betydelse. De kritiska aspekterna som presenterats kan fungera som underlag för lärare, när de ska identifiera vilka kritiska aspekter som finns i deras elevgrupper. Studien ger också idéer för hur undervisning kan bedrivas om de kritiska aspekterna.

7 Referenser

- Abramsson, M., & Flarup, A. (2015). *Ett plus ett blir två: Introduktion av likhetstecknet i förskoleklass och årskurs 1*. Kandidatuppsats, Jönköping University, Högskolan för lärande och kommunikation.
- Adolfsson Boman, M., Eriksson, I., Hverven, M., Jansson, A., & Tambour, T. (2013). Att introducera likhetstecknet i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1. *Forskning om undervisning och lärande*, 10, 29–49. Hämtad från http://www.forskul.se/tidskrift/nummer10/att_introducera_likhetstecken_i_ett_algebraiskt_sammanhang_for_elever_i_arskurs_1
- Barlow, A. T., & Harmon, S. E. (2012). Problem Contexts for Thinking About Equality: An additional Resource. *Childhood Education*, 88(2), 96–101. doi:10.1080/00094056.2012.662121
- Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1982). *The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, NY. Hämtad från <http://eric.ed.gov/?id=ED214765>
- Bell, J., & Waters, S. (2016). *Introduktion till forskningsmetodik*. Lund: Studentlitteratur.
- Bergqvist, M., & Echevarría, C. (2011). En introduction till learning study. I T. Maunula, J. Magnussion & C. Echevarría (Red.), *Learning Study – undervisning gör skillnad* (s. 21–34). Lund: studentlitteratur.
- Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber AB.
- Carpenter, T. P., & Franke, M. L. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *Proceedings of the 12th ICM Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra, Australia, 1*, 155–162. Hämtad 13 februari 2015 från <https://minerva-access.uni-melb.edu.au/handle/11343/35000#files-area>
- Carpenter, T. P., & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in Primary Grades* (Research Report No. 00.2). Hämtad från National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science: <http://ncisla.wceruw.org/publications/reports/RR-002.PDF>
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating Arithmetic and Algebra in Elementary School*. Portsmouth, NH: Heinemann.

- Christoffersen, L., & Johannessen, A. (2015). *Forskningsmetoder för lärarstudenter*. Lund: Studentlitteratur.
- Essien, A. A. (2009). An Analysis of the Introduction of the Equal Sign in Three Grade 1 Textbooks. *Phytagoras – Journal of the Association for Mathematics Education in South Africa, Sydafrika*, 69, 28–35. doi:10.4102/Pythagoras.v0i69.43
- Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2007). Children's understanding of Equality: a Foundation for Algebra. *Teaching Children Mathematics*, 6(4), 232–236. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41197398?seq=1#page_scan_tab_contents
- Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help?. *Journal of Experimental Child Psychology*, 107(1), 15–30. doi: doi:10.1016/j.jecp.2010.03.004
- Hägglström, J., Persson, E., & Persson, P–E. (2012). Taluppfattning, aritmetik och algebra. I B. Grevholm (Red.), *Lära och undervisa matematik från förskoleklass till åk 6* (s. 85–144). Stockholm: Norstedts.
- Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317–326. doi:10.1007/BF00311062
- Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(9), 514–519. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41182605?seq=1#page_scan_tab_contents
- Kullberg, A., Mårtensson, P., & Runesson, U. (2016). What is to be Learned? Teachers' Collective Inquiry into the Object of Learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 60(3), 309–322. doi: 10.1080/00313831.2015.1119725
- Larsson, S. (1986). *Kvalitativ analys – exemplet fenomenografi*. Lund: Studentlitteratur.
- Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of Differences in Children's Understandings of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. *Cognition and Instruction*, 26, 195–217. doi:10.1080/07370000801980845
- Lo, M. L. (2014). *Variationsteori – för bättre undervisning och lärande*. Lund: Studentlitteratur.
- Lo, M. L., & Marton, F. (2011). Towards a science of the art of teaching: Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 1(1), 7–22. doi: 10.1108/20468251211179678

- Magnusson, J., & Maunula, T. (2011). Variationsteorin ur ett undervisningsperspektiv. I T. Maunula, J. Magnusson & C. Echevarría (Red.), *Learning Study – undervisning gör skillnad* (s. 35–50). Lund: Studentlitteratur.
- Molina, M., & Ambrose, R. C. (2006). Fostering Relational Thinking while Negotiating the Meaning of the Equals Sign. *Teaching Children Mathematics*, 13(2), 1620–1633. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41199848?seq=1#page_scan_tab_contents
- Mårtensson, P. (2015). *Att få syn på avgörande skillnader: Lärares kunskap om lärandeobjektet*. Dissertations Series No. 29 (Doktorsavhandling, Jönköping University, School of Education and Communication).
- Olteanu, C., & Holmqvist, M. (2012). Differences in success in solving second-degree equations due to differences in classroom instruction. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(5), 575–587. doi: 10.1080/0020739X.2011.622807
- Pettersson, A. (2010). *Bedömning av kunskap för lärande och undervisning i matematik: Utveckla din bedömarkompetens*. Stockholm: Skolverket.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* (Doktorsavhandling, Acta Universitatis Gothoburgensis, Educational sciences).
- Runesson, U. (2005). Beyond discourses and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. *Cambridge Journal of education*, 35(1), 69–87. doi: 10.1080/0305764042000332506
- Runesson, U. (2006). Vad är möjligt att lära sig? Variationens och samtidighetens betydelse. I M. Holmqvist (Red.), *Lärande i skolan: Learning study som skolutvecklingsmodell* (s. 67–85). Lund: Studentlitteratur.
- Runesson, U. (2007). A collective enquiry into critical aspects of teaching the concept of angles. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 12(4), 7–25.
- Runesson, U., & Kullberg, A. (2010). Learning from variation – Differences in Learners Ways of experiencing Differences. I B. Sriraman, C. Bergsten, S. Goodchild, G. Pálsdóttir, B. Dahl & L. Haapasalo (Red.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (s. 299-317). Missoula: The Montana Mathematics Enthusiast.
- Runesson, U., & Marton, F. (2002). The Objekt of Learning and the Space Variation. I F. Marton & P. Morris (Red.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning* (s. 19–37). Göteborg: Acta Univeritatis Gothenburgensis.

- Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections of Processes and Objects as Different Side of The Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1–36. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/3482237?origin=JSTOR-pdf&seq=1#page_scan_tab_contents
- Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalences in Symbolic and Nonsymbolic Contexts: Benefits of Solving Problems With Manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 101(1), 88–100. doi:10.1037/a0013156
- Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 12(2), 88–95. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41182357?seq=1#page_scan_tab_contents
- Skolverket. (2011a). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr11*. Stockholm: Skolverket.
- Warren, E. (2007). Exploring an understanding of equals as quantitative sameness with 5 year old students. I J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Ceo. (Red.). *Proceedings of the 30st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 31, Korea, 4*, 249–256. Hämtad 15 januari 2016 från <http://www.emis.de/proceedings/PME31/4/248.pdf>
- Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna* (Doktorsavhandling, Högskolan Kristianstad, Nationella Forskarskolan i Pedagogiskt Arbete).

Bilaga 1 Observationsschema

Kritiska aspekter:	Kommentarer:	Variationsmönster:
KA1 – Förståelse av likhetstecknets relationella innebörd.		
KA2 – Det behöver <i>inte</i> endast finnas ett enda tal på höger sida av likhetstecknet.		
KA3 – ”Svaret” behöver <i>inte</i> vara på höger sida.		
KA4 – Det kan vara fler än två tal på sidorna av likhetstecknet.		
KA5 – Likhetstecknet kan inte bara användas vid addition.		
KA6 – Utsaga kan läsas från både höger och vänster.		
KA7 – Eleverna kan förstå likhetstecknet både instrumentellt och relationellt.		
KA 8 – Det ska vara ekvivalens i en kedja.		

Bilaga 2 Arbetsblad

Fyll i talen som fattas på raderna.

Namn: _____

$$15 + 6 = \underline{\quad}$$

$$20 - 11 = \underline{\quad}$$

$$7 = 2 + \underline{\quad}$$

$$11 = \underline{\quad} - 5$$

$$13 \neq 5 + \underline{\quad}$$

$$7 = \underline{\quad} - 8$$

$$4 + 1 + 3 = \underline{\quad}$$

$$8 = 4 + \underline{\quad} + 3$$

$$15 \neq 17 - \underline{\quad}$$

$$8 = \underline{\quad} + 8$$

$$1 + \underline{\quad} + 2 = 6 - 1$$

Kan man skriva så här? Ringa in ja eller nej.

$$2 + 6 = 3 + 5 \quad \text{ja} \quad \text{nej}$$

$$12 + 6 = 20 - 2 \quad \text{ja} \quad \text{nej}$$

$$9 = 9 \quad \text{ja} \quad \text{nej}$$

$$5 \neq 10 - 5 \quad \text{ja} \quad \text{nej}$$

$$5 + 4 = 9 + 3 = 12 \quad \text{ja} \quad \text{nej}$$

Sätt in tecknen (= + -) som saknas.

$$4 _ 1 _ 3 _ 2$$

$$10 _ 4 _ 2 _ 4$$

Kan du skriva den här uppgiften på något annat sätt?

$$6 + 4 = 10$$

Bilaga 3 Intervjufrågor

1. Hur skulle du beskriva det här tecknet? = (Visa likhetstecknet på en lapp)
2. Vad används tecknet till?
3. Hur skulle du beskriva det här tecknet? \neq (Visa olikhetstecknet ”inte lika med” på en lapp)
4. Vad används tecknet till?
5. Vid vilka räknesätt kan likhetstecknet användas?
6. Hur många tal kan det finnas på varje sida om likhetstecknet? (Visa likhetstecknet och peka på varje sida om likhetstecknet)

Bilaga 4 Informationsbrev

Informationsbrev till vårdnadshavare

Hej!

Jag heter Matilda Abramsson och går på lärarprogrammet med inriktning förskoleklass till årskurs 3 på Högskolan för lärande och kommunikation i Jönköping.

Jag läser min sista termin och ska skriva mitt sista examensarbete. Då ska jag observera en lektion i klassen och sedan intervjua några elever. Intervjuerna kommer handla om likhetstecknet och uppfattningar av det. Elevernas kunskaper kommer inte bedömas. Intervjuerna kommer spelas in med ljud för att kunna analysera materialet efteråt. Elevernas deltagande är frivilligt och kommer endast göras med er tillåtelse.

Alla data som samlas in kommer behandlas konfidentiellt, det vill säga att namnen på deltagarna kommer inte lämnas ut till någon annan mer än min handledare på högskolan, Annica Otterborg. Inte heller namnet på skolan kommer nämnas. Materialet som samlas in kommer sedan att raderas tre månader efter att arbetet har blivit godkänt.

Är det något ni undrar över kan ni maila mig på *@student.ju.se

Jag godkänner att mitt barn _____ (namn) får intervjuas med ljudupptagning om likhetstecknet.

Datum

Målsmans underskrift