Från naturliga tal till hela tal
(från N till Z)

Vad kan göra skillnad för elevers möjligheter att bli bekanta med de negativa talen?

Anna Lövström

Licentiatuppsats i didaktik, med inriktning mot matematik

HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Jönköping 2015

Licentiatuppsats i didaktik, med inriktning mot matematik

School of Education and Communication

Jönköping University

Box 1026, 551 11 Jönköping, Sweden

www.ju.se

Titel: Från naturliga tal till hela tal (från N till Z) Vad kan göra skillnad för elevers möjligheter att bli bekanta med de negativa talen?

ABSTRACT

Anna Lövström, 2015

Title: From natural numbers to integers (from N to Z) What can make a difference to students´ possibilities to become familiar with negative numbers?

Language: Swedish with a summary in English

Keywords: negative numbers, learning study, variation theory, critical aspects, examples

The aim of the thesis is to gain knowledge concerning what pupils aged 8 and 9 need to learn to become familiar with negative numbers. The framework used in this research, variation theory, implies that students' problems in learning what was intended may have to do with the fact that some critical aspects of the studied object have not yet been discerned by the student. To get the pupils to understand the idea behind each critical aspect, carefully constructed examples were used. According to variation theory it is necessary to experience differences before you experience similarities. To answer the research question data was collected by using the learning study model. It is characterized by an iterative design where I as a researcher collaborate with teachers to try to find and orchestrate the critical aspects. The method is interventionist, which means that interventions are done in teaching. In the learning study I have cooperated with two primary school teachers and 64 pupils in four different classes. The data consists of video-recordings of lessons, pre- and posttests, interviews with pupils and notes from the meetings of the learning study group. When planning lessons as well as analyzing data, concepts relating to the theory of variation have been used as analytical tools.

This thesis contributes to research by investigating in detail what aspects students need to differentiate in order to become familiar with negative numbers. The results show that the pupils needed not only to discern, but also to differentiate three different critical aspects:

To differentiate the values of two negative numbers.

To differentiate the function of the minuend versus the function of the subtrahend in a subtraction.

To differentiate the minus sign for negative numbers versus the minus sign for subtraction.

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

FÖRORD

Min licentiatuppsats är färdig och forskarutbildningen som jag påbörjade i januari 2012 är genomförd. Det har varit en oerhört lärorik tid som gett mersmak att fortsätta undersöka relationen mellan undervisningens utformning och elevernas lärande. Det är många personer som utmanat och uppmuntrat mig samt gett stöd under arbetets gång. Jag vill tacka mina handledare Ulla Runesson och Constanta Olteanu. Ni har med enastående kompetens och till synes outtröttlig energi problematiserat och kommenterat mitt arbete.

Jag vill tacka ledningen för forskarskolan *Learning study – praktikutvecklande ämnesdidaktisk forskning*: Ingrid Carlgren, Inger Eriksson, Mona Holmqvist Olander och Ulla Runesson. Även till övriga licentiander inom forskarskolan vill jag rikta ett varmt tack för givande diskussioner och roliga stunder. Ett särskilt tack till Jönköpingsgruppen: Clare Lindström, Andreas Magnusson, Anders Nersäter samt Anja Thorsten. Vi har stått varandra nära i både med- och motgångar. Tack, Clare, för språkgranskningen av olika engelska texter. Tack till forskningsplattformen Matematikdidaktik på HLK, som bidragit med kloka infallsvinklar på mitt arbete. Jag vill också tacka Cecilia Kilhamn för många värdefulla synpunkter när det gäller analysen av learning studyn.

Denna uppsats hade inte blivit verklighet om inte lärare och elever hade samarbetat så fantastiskt bra som de gjort. Ett varmt tack till er alla som har deltagit i studien. Tack också till kollegor, skolledning, släkt och vänner för att ni trott på mig och min förmåga att genomföra forskarutbildningen.

Tack till min älskade familj, Emma, Daniel, Elin och Anders, som stått ut med mängder av dokument, ibland spridda över hela huset. På olika sätt har var och en av er uppmuntrat och inspirerat mig. Ni är guld värda!

Alby den 27:e augusti 2015

Anna Lövström

1. INLEDNING

Är det möjligt och meningsfullt att få elever i årskurs 2 och 3 att bli bekanta med de negativa talen? Hur ska i så fall en sådan undervisning läggas upp? Vad är det i undervisningens innehåll som eleverna behöver få syn på för att förstå att de negativa talen, liksom de naturliga talen, också är tal?

I Sverige utgör naturliga tal (N), det vill säga 0 och alla positiva heltal, centralt innehåll i årskurs 1-3 (Skolverket, 2011a). Naturliga tal samt negativa tal benämns tillsammans för hela tal (Z), vilka utgör en del av de rationella talen (Q) som utgör centralt innehåll i årskurs 4-6 (a.a.). Negativa tal är ett begrepp inom matematiken som upplevts som svårbegripligt genom historien (Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle & Lewis, 2014a). Forskning (a.a.) visar att matematiker, historiskt sett, upplevt samma hinder för att förstå de negativa talen som kan identifieras hos dagens skolelever. Begreppet negativa tal nämns dock inte explicit i grundskolans läroplan (Skolverket, 2011a). I kommentarmaterialet i matematik (Skolverket, 2011b) nämns negativa tal i samband med kommentarer kring *talsystemets utveckling från naturliga tal till reella tal*, som är ett centralt innehåll i årskurs 7-9:

> Som en illustration till hur talområdet utökas kan man tänka sig en tallinje med naturliga tal som ger ett glest intryck. När man sedan för in rationella tal, till exempel *negativa tal* och tal i bråkform, fylls tallinjen successivt på. I och med att de reella talen införs kommer tallinjen att vara helt fylld. De rationella och reella talen brukar ofta intressera barn i de lägre årskurserna. Det är därför upp till läraren att avgöra om dessa ska ingå även i de yngre elevernas utforskningar av tal. (Skolverket, 2011b, s. 14. *Min kursivering*)

Som framgår av citatet ovan är inte negativa tal ett begrepp som betonas i läroplanen, fastän negativa tal är viktiga och ligger till grund för utvecklingen av talområden samt för att genomföra beräkningar. Skolverket varken avråder från eller föreslår att negativa tal ska tas upp i de lägre årskurserna, utan konstaterar att det är upp till läraren att bestämma detta (a.a.). Mot bakgrund av den forskning som nämnts samt att läroplanen endast implicit tar upp undervisning om de negativa talen, väcktes mitt intresse för att studera undervisning om och lärande av negativa tal i årskurs 2 och 3.

Utifrån min erfarenhet introduceras negativa tal vanligen i form av uppgifter där temperaturer ska anges. Kilhamn (2011) har studerat hur metaforer[1] som exempelvis termometrar, skulder och tillgångar samt hissar användes och uppfattades i undervisningen. Det visade sig att läraren och eleverna tenderade att uppfatta det metaforen syftade till att peka ut på olika sätt. För läraren var det matema-

[1] Begreppet *metafor* används i denna uppsats utifrån Lakoff och Johnson (2003):"Because so many of the concepts that are important to us are either abstract or not clearly delineated in our experience (the emotions, ideas, time, etc.), we need to get a grasp on them by means of other concepts that we understand in clearer terms (spatial orientations, objects, etc.)" (a.a., s.115). Med metafor avses således en exemplifiering av tal som knyter an till verkligheten.

tiska objektet i fokus, medan eleverna istället fokuserade den fysiska verkligheten. Enligt min tolkning skulle det kunna betyda att läraren exempelvis ser minusgrader på termometern som en metafor för negativa tal, medan eleverna ser minusgrader i form av kyla. Kilhamns studie visar att undervisningen om negativa tal behöver studeras vidare (a.a.).

Även Ball (1993) har använt sig av olika metaforer[2] i sin studie om negativa tal i undervisningen. I relation till föreliggande uppsats är Balls studie intressant därför att hon arbetat med elever i åtta- nioårsåldern, som vanligtvis inte undervisas om negativa tal. Ball motiverar sitt arbete med negativa tal genom att lågstadiebarn i sitt vardagsliv har kännedom om tre vanliga metaforer för att visualisera negativa tal: att temperaturen kan vara under noll, att eleverna hamnar på minus i dataspel samt att vara skyldig någon pengar. Syftet med att undervisa om negativa tal för lågstadiebarn beskriver Ball (a.a.) som att försöka förena elevernas vardagliga, kvantitativa, förståelse med den formella matematiska förståelsen. Även Kilhamn (2011) föreslår att många aspekter av negativa tal kan lyftas fram betydligt tidigare än vad som sker idag. Eleverna skulle på så vis kunna hjälpas till en god taluppfattning för att sedan förstå operationer med negativa tal (a.a.).

Såväl Ball (1993) som Kilhamn (2011) upplever att det kan vara problematiskt att avgöra vilken metafor som är optimal i olika undervisningssituationer. Duval (2006) menar istället att fokus bör ligga på vilka olika representationer[3] av tal som används i undervisningen samt hur dessa kommuniceras till eleverna. Han ställer frågan huruvida det sätt som representationer används på, underlättar eller hindrar elevernas förståelse av det som ska läras (a.a.).

De studier om negativa tal i undervisningen som jag har kommit i kontakt med har i stor utsträckning skett ifrån ett utifrånperspektiv, dvs. forskare har studerat praktiken. Till stor del handlar forskningen om olika typer av undervisningsexperiment där forskare testat specifika modeller[4] av negativa tal i klassrummet (t.ex. Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre & Schappelle, 2014b; Linchevski & Williams, 1999). Forskning som beskrivs ifrån ett inifrånperspektiv, dvs. utifrån lärarens upplevelser av undervisning om och lärande av negativa tal är betydligt ovanligare. Ball (1993) utgör ett undantag eftersom hon både undervisar och bedriver forskning samtidigt. Ball genomförde ett undervisningsexperiment där planerade och genomförda lektioner följdes upp och reviderades fortlöpande. På ett liknande sätt gick Kullberg (2010) tillväga när hon, tillsammans med en grupp lärare, genomförde en learning study om negativa tal i årskurs sju och åtta. Även denna uppsats utgår ifrån ett inifrånperspektiv, eftersom

---

[2] Istället för metafor använder Ball (1993) begreppen *modell* och *representation* när hon beskriver sin undervisning.

[3] Med *representation* avser Duval (2006, s. 104): "signs and their complex associations, which are produced according to rules and which allow the description of a system, a process, a set of phenomena." Representation har i denna uppsats, utifrån citatet, tolkats stå för en exemplifiering som knyter an till det matematiska innehållet.

[4] Med modell avses här: en matematisk struktur som syftar till att återge viktiga aspekter av verkligheten (Kiselman & Mouwitz, 2008).

jag som lärare och forskningsledare samarbetat tillsammans med lärare på samma sätt som Kullberg (a.a.).

För att undersöka vad eleverna behöver lära sig för att kunna bli bekanta med de negativa talen används metoden *learning study* (Pang & Marton, 2003). I en learning study arbetar vanligen lärare och forskare tillsammans med att göra upprepade, systematiska ingripanden i undervisningen. Dessa ingripanden baseras på elevernas uppfattningar av det som ska läras (a.a.).

I en learning study, som i denna uppsats används tillsammans med variationsteorin (Marton, 2015), tas både elevers uppfattningar av det som ska läras samt lärarnas erfarenhet och tysta kunskap tillvara. Lärarna och jag som lärare och forskningsledare bedriver tillsammans forskning utifrån en teori och en modell som syftar till att bygga kunskap om ett väl avgränsat ämnesområde.

2. BAKGRUND

Att bekanta sig med de negativa talen har upplevts som komplicerat, både för matematiker genom historien och för dagens elever. Innebörden av exempelvis *tal*, *kvantitet* samt *minustecken* har varit föremål för omfattande diskussioner. Olika uppfattningar kring hur tal kan beskrivas, medför olika praktiska och teoretiska sätt att hantera dessa. Trots att det är ovanligt med undervisning om negativa tal för elever yngre än tio år, visar forskning (t.ex. Ball, 1993; Bishop et al., 2014b; Whitacre, Bishop, Lamb, Philipp, Schappelle & Lewis, 2012) att det är fullt möjligt.

2.1 EN FRAMVÄXANDE FÖRSTÅELSE AV DE NEGATIVA TALEN

Matematikhistorien visar oss att, då matematiker försökte konstruera de negativa talen, tog det lång tid och man stötte på en hel del problem (Bishop et al., 2014a; Ifrah, 2004; Schubring, 2005). Exempelvis rådde oenighet om huruvida tal skulle betraktas som representationer för en konkret mängd eller om tal också skulle kunna användas i en mer generell betydelse (a.a.). Samma sak har man funnit när elevers hanterande av negativa tal studerats (Bishop et al., a.a.). Det verkar således finnas likheter mellan hur det matematiska begreppet har utvecklats historiskt och hur elever utvecklar detta. Bishop et al. (a.a.) menar därför att det historiska perspektivet kan vara användbart för att identifiera möjliga källor till insikt och förvirring när det gäller förståelsen av negativa tal. I undersökandet av vad som kan göra skillnad för elevers möjligheter att bli bekanta med de negativa talen, ses här historien kring den framväxande förståelsen av negativa tal som värdefull.

Negativa tal användes redan under Handynastin (206 f.Kr. – 220 e.Kr.) i Kina vid beräkningar på räknebräden (Ifrah, 2004). Räknemarker av elfenben symboliserade de positiva talen som benämndes *zheng*, vilket betyder ”korrekta”, medan svarta räknemarker användes för negativa tal. De negativa talen kallades *fu*, som betyder ”falska” (a.a.). Även indierna använde tidigt de negativa talen. På 300-talet introducerade de dessutom nollan och det decimala positionssystemet, vilket anses ha bidragit till utvecklingen av mer abstrakta föreställningar om tal. Trots detta tidiga användande av negativa tal dröjde det ända till år 1484 innan fransmannen Chuquet införde dessa tal i Europa (a.a.).

Under flera hundra år efter det kämpade matematiker med att förstå och acceptera negativa tal. Klargörandet av den förvirring som rådde kring negativa tal i Europa borde, enligt Mumford (2010), tillskrivas engelskmännen Wallis och Newton som verkade under 1600-talet. Men så långt fram som år 1898 kan man i den brittiske matematikern De Morgans lärobok läsa att: $3 - 8$ *is an impossibility, it requires you to take from 3 more than there is in 3, which is absurd.* (De Morgan, 1898, s. 104). De Morgan avvisade negativa tal som självständiga tal, däremot såg han värdet av att använda negativa kvantiteter inom algebra (Bishop et al., 2014a). Bland matematiker har det under lång tid diskuterats fram och tillbaka huruvida de negativa talen kan accepteras. Genom historien framträder intressanta diskussioner dels kring relationen mellan kvantitet och tal, dels mellan minustecknets olika innebörder.

2.1.1 RELATIONEN MELLAN KVANTITET OCH TAL

Begreppet *kvantitet* kan matematiskt beskrivas som: *An entity that has a numerical value or magnitude.* (Clapham & Nicholson, 2013), det vill säga en enhet som har ett numeriskt värde eller storlek. Begreppet *tal* förklaras av Aleksandrov (1999) på följande sätt: *The number of objects in a given collection is a property of the collection, but the number itself, as such, the "abstract number", is a property abstracted from the concrete collection and considered simply in itself* (a.a., s. 8). Det innebär enligt Aleksandrov att *tal* betraktas som ett mer generellt och abstrakt begrepp än *kvantitet*, eftersom kvantiter i högre utsträckning är bundna till en konkret verklighet. Många av kontroverserna bakom acceptansen av negativa tal kan, enligt Schubring (2005), härledas från relationen mellan begreppen *kvantitet* och *tal*:

> Looking at concept development not under the limited aspect of the rule of signs, but under the more general one of the existence of negative numbers, one will observe that a foundational dimension underlies many of the controversies about their existence, which is not decidable by "true" or "false": this is the relation between quantities and numbers. The rather unspecific concept of quantity does not lend itself to conceptualizing the notion of "negative quantities," whereas the more specific concept of number proves to be more broadly applicable, and better adapted to developing the notion of negative numbers"— that is, as more general. (Schubring, 2005, s. 34)

Det ganska ospecifika begreppet *kvantitet* lämpar sig, enligt Schubring (2005), inte för att beskriva negativa mängder. Det gör däremot det mer specifika begreppet *tal,* som visat sig kunna tillämpas bredare samt på så vis vara bättre anpassat till att utveckla begreppet *negativa tal* (a.a.).

Inom den antika grekiska matematiken stod begreppet tal för en begränsad uppräkningsbar mängd, vilket innebär en snävare betydelse än vad vårt talbegrepp har idag (Bishop et al., 2014a). Distinktionen mellan räknebara kvantiteter, som även benämndes tal och mätbara kvantiteter, som benämndes magnituder, varade genom århundraden och kom att påverka matematiskt tänkande långt in på 1700-talet. Negativa tal användes i beräkningar, matematiker hade däremot betydligt svårare att acceptera negativa tal som självständiga tal. Det fanns en åtskillnad mellan den specifika domän av kvantiteter som matematiker benämnde som legitima tal, samt de kvantiteter som användes för att utföra beräkningar. Det faktum att vissa matematiker trots allt använde negativa tal i beräkningar ledde, enligt Bishop et al. (a.a.) fram till acceptansen av negativa tal. Under 1600- och 1700-talet diskuterades innebörden av begreppet tal intensivt (Schubring, 2005). Spänningar uppstod mellan vilken praktisk användning man hade av nya slags tal, jämfört med de klassiska teoretiska funderingar som matematiker brottades med (a.a.).

Acceptansen av de negativa talen som självständiga tal, tog fart i och med utvecklandet av algebra (Schubring, 2005). Användandet av symboler för att representera olika parametrar, generalisera lösningar samt systematisera procedurer medförde att matematiker började hantera tal som skilda från de begränsade och räknebara objekt som de i verkligheten relaterade till (a.a.).

2.1.2 OLIKA TOLKNINGAR AV MINUSTECKNETS INNEBÖRD

I Kina gjordes på 200-talet f.Kr ingen egentlig skillnad alls mellan minustecknens innebörd (Ifrah, 2004). Ett negativt tal sågs som ett tal som skulle subtraheras från en annan kvantitet eller ett belopp som ännu inte betalats. Vid subtraktionen $3 - 5 = -2$ användes tre räknemarker av elfenben och fem svarta räknemarker. Tre marker av vardera sorten tog ut varandra och två av den svarta sorten kvarstod. Även om det första minustecknet indikerar subtraktion, medan det andra indikerar negativt tal så fanns det i den kinesiska tolkningen inga funderingar på att skilja på dessa innebörder (a.a.). Genom historien och fram till idag kan man dock se andra matematiker som funderat kring minustecknets olika innebörder.

Algebraiskt tecken och tecken för operation

Den franske matematikern Prestet införde på 1600-talet beteckningarna *algebraiskt tecken* respektive *tecken för operation* för att skilja plus- respektive minustecknets olika innebörder åt (Schubring, 2005). I sin lärobok berättar Prestet att negativa tal har samma status som positiva tal samt försöker bevisa detta med hjälp av algebraiska resonemang. Det algebraiska tecknet användes för att visa om en kvantitet skulle ses som positiv eller negativ. Positiva kvantiteter var försedda med ett plustecken eller inget tecken alls, medan negativa kvantiteter var försedda med ett minustecken. När det gäller subtraktion begränsade Prestet de kvantiter som skulle subtraheras till positiva kvantiteter, exempelvis $3 - 2$ eller $2 - 3$, för att inte blanda ihop det algebraiska tecknet med tecknet som symboliserade operation (a.a.).

Kvantiteter består enligt Prestet av ett positivt område och ett negativt område, där varje område är oändligt stort (Schubring, 2005). Introduktionen av talet noll som en relativ kvantitet, möjliggjorde jämförelser av relationer mellan negativa och positiva kvantiteter. Prestet förklarade att minustecken skulle användas vid addition av två negativa kvantiteter, exempelvis $-3\ (-) - 2$, samt att plustecken skulle användas vid subtraktion av negativa kvantiteter, exempelvis $-3\ (+) - 2$. Han betraktade således additioner av negativa kvantiteter som en slags subtraktion, medan däremot subtraktion av negativa kvantiteter tolkades som addition. Tankar kring motsatta kvantiteter fanns inbyggda i Prestets sätt att använda tecknen, men i praktiken blev dessa regler ohållbara eftersom de var svåra att förstå. För att kunna särskilja ett algebraiskt tecken från ett tecken för operation, begränsade Prestet dessutom användningen av bokstavsbeteckningar inom algebran till att endast omfatta positiva kvantiteter (a.a.).

Sträckor och förflyttningar

På 1600-talet introducerade den engelske geometriprofessorn Wallis tallinjen (Heeffer, 2011). Problemställningen: *When a man advances 5 yards from A and he returns 8, how far is he then from his starting point?* (a.a., s. 14), visar att Wallis tolkade positiva och negativa tal som *sträckor* på tallinjen samt operationer som *förflyttningar* på tallinjen. Wallis hävdade att negativa tal inte alls är absurda och att de kan beteckna kvantiteter i den fysiska världen som exempelvis sträckor och förluster (Mumford, 2010). Det förekom dock invändningar mot att Wallis använde negativa tal för att representera den fysiska världen, eftersom detta begränsade vilka operationer som kunde genomföras (Heeffer, 2011).

Numerisk betydelse och specifik betydelse

Den franske 1700tals-matematikern Fontenelle beskrivs som den förste som i detalj studerade skillnaden mellan en kvalitativ och en kvantitativ aspekt av magnituder (Schubring, 2005). Han hävdade att varje positiv eller negativ magnitud har en *numerisk betydelse* som beskriver ett särskilt tal eller en särskild kvantitet. Magnituder som på något sätt är motsatta varandra får sin kvalité, eller *specifika betydelse*, just genom sin motsats. När två magnituder är motsatta, utesluter eller förkastar den ena den andra. En av magnituderna blir negativ i förhållande till den andra magnituden som blir positiv. Schubring menar dock att vid en närmare analys är det enbart de negativa kvantiteterna som anses vara försedda med specifik kvalité, medan endast de positiva kvantiteterna har privilegiet att vara försedda med numerisk kvantitet (a.a.).

Till skillnad från Prestet betraktade inte Fontenelle talet noll som en relativ kvantitet utan som ”ingenting”. Enligt Fontenelle var 1 det minsta talet eftersom talet noll inte har någon numerisk karaktär, vilket förklaras som att det inte är en kvantitet som kan ökas eller minskas. Ettan representerar den beståndsdel utifrån vilken alla de andra talen kan genereras. Fontenelle avstår på så vis från att konstruera ett generellt begrepp där positiva och negativa kvantiteter skulle kunna utgöra det gemensamma begreppet ”tal” (a.a.).

Tal som ska subtraheras och negativa tal

Den tyske matematikern Förstemann utarbetade på 1800-talet en konsekvent separation av begreppen kvantitet och tal (Schubring, 2005). Han opponerade sig emot att begreppet kvantitet användes i en mycket vid bemärkelse, så att till och med tal sågs som kvantiteter. Kvantiteter var enligt Förstemann bundna till det konkreta, medan tal bör ses som abstrakta relationer som är av en helt annan natur. Tal kan däremot användas för att beskriva relationer mellan kvantiteterna. Förstemann visade förslag på en utvidgning av talområdet, där aritmetik och algebra motiverar talens funktioner. I traditionell aritmetik uppstår inte motsatsen till addition, därför finns endast absoluta tal där. I algebra däremot, blir de absoluta talen positiva tal och talen som är motsatt additiva kallas negativa tal. Förstemann skiljde mellan *tal som ska subtraheras* och *negativa tal*. För att särskilja dessa båda begrepp använde han ett horisontellt streck över det tal som är negativt, för att indikera subtraktion användes minustecknet.

Förstemann använde talet 0 som ett neutralt element, som beskrivs ligga exakt mellan två motsatta tal. Talet 0 beskrevs som mitten eller det separerande talet, mellan de positiva och de negativa talen. Till skillnad från fransmannen Prestet betonade Förstemann att bokstävsbeteckningar inom algebra inte var begränsade till de positiva talen, utan att även de negativa talen kunde användas (a.a.).

En flexibel användning av minustecknet

Nutida didaktiska forskare som exempelvis Kilhamn (2011), Lamb, Bishop, Philipp, Schappelle, Whitacre och Lewis (2012) samt Vlassis (2004), förespråkar en flexibel användning av minustecknet. Vad detta innebär förklaras utifrån problemställningarna i Figur 1.

Problem	**Meaning of the minus sign**
$5 - 8 = \square$	Subtraction (a binary operation)
$\square + 5 = -2$	Symbolic representation for a negative number
Which is larger, $- - 4$ or -4?	The opposite of (a unary operation)

Figur 1. *Tre vanliga användningsområden för minustecknet, utifrån Lamb et al., 2012, s. 3.*

Problem 1 i Figur 1 indikerar subtraktion (Lamb et al., 2012). Minustecknet kan beskrivas som en binär operator därför att två tal förs in medan resultatet kan beskrivas med ett tal (Observera att Lamb et al. använder begreppet *variabel* istället för *tal*.). I problem 2 utgör minustecknet en symbolisk representation för ett negativt tal. I problem 3 kan $- - 4$ utläsas som ”motsatsen till negativ fyra”. Minustecknet används som unär operator, det vill säga ett tal förs in och även resultatet kan beskrivas med ett tal. När det gäller problem 2 är det också möjligt att betrakta minustecknet i -2 som en unär operator. Det inträffar om -2 ses som motsatsen till 2. Författarna pekar på vikten av att elever är flexibla och lär sig att röra sig mellan dessa tre tolkningar av minustecknet och lyfter särskilt fram betydelsen av ”motsatsen av” (a.a.).

2.1.3 HINDER OCH MÖJLIGHETER FÖR ATT FÖRSTÅ NEGATIVA TAL

Som nämndes i inledningen till detta kapitel ser Bishop et al. (2014a) likheter mellan hur begreppet negativa tal har utvecklats historiskt och hur elever utvecklar detta. De har jämfört hur matematiker genom historien betraktat negativa tal och 6-10-åringars sätt att se på negativa tal. Man har studerat *hinder* i betydelsen: förståelse eller kunskap som till en början kan stå i vägen för att förstå och operera med hela tal samt *möjligheter* i betydelsen: förståelse eller kunskap som kan möjliggöra framsteg i att förstå och operera med hela tal. Författarna intresserade sig för elevers initiala inlärning när det gäller att utvidga talområdet från naturliga tal (N) till hela tal (Z), men också för hur matematiker historiskt har hanterat negativa tal och operationer med dessa (a.a.).

Genom att intervjua elever samt analysera historiska data identifierade författarna följande gemensamma hinder för att förstå och operera med hela tal (Z): *magnitud*, *förekomst av kvantiteter som är mindre än ”ingenting”*, *att ta bort mer än man har (subtrahenden < minuend)*, övergeneraliseringar som att *addition inte kan göra något mindre*, vilket sker i exemplet $5 + (-1) = 4$, samt att *subtraktion inte kan göra något större*, vilket sker i exemplet $5 - (-1) = 6$.

Följande gemensamma möjligheter för att förstå och operera med negativa tal identifierades: *magnitud*, *ordning* samt *logisk nödvändighet*. Utifrån de historiska texterna identifierades även *beräkningsmässigt sätt att resonera* vara en möjlighet för att förstå och operera med hela tal. Bishop et al. (2014a) förklarar att även om beräkningsmässiga resonemang fungerade som en möjlighet för matematiker historiskt sett så gjorde det inte det för eleverna i studien. Detta ansågs bero på att eleverna ännu inte fått formell undervisning om hur beräkningar med hela tal kan genomföras (a.a.).

Att resonera utifrån magnituder kan således vara både ett hinder och en möjlighet. Både genom historien och hos eleverna fungerade en ensidig bild av tal som bundna till kvantiteter som ett hinder för att kunna förstå negativa magnituder. En del tidigare matematiker, exempelvis De Morgan (1898) och Wallis (Bishop et al., 2014a), menade att tal som var mindre än ”ingenting” inte heller kunde ha någon magnitud. Men både historiskt och av skolelever förekom också resonemang där de negativa talen ansågs representera mängder, exempelvis skuldbelopp eller ett håls djup. Då får de negativa talen plötsligt en innebörd, Bishop et al. (2014a) påpekar också att det var genom att betrakta negativa tal som skulder som dessa tal först användes i historien. Samtliga beskrivna hinder ovan kan sägas relatera till frågan som diskuterats tidigare i detta kapitel, nämligen den om skillnaden mellan en kvantitet och ett tal.

Att kunna resonera om tal utifrån dess ordning ses av Bishop et al. (2014a) både hos tidigare matematiker och hos elever som en möjlighet för att förstå och operera med hela tal. De hänvisar till Lakoff och Núñez (2000) som identifierade ordning som en av de fyra grundmetaforerna för lärande i matematik. Att resonera utifrån logisk nödvändighet innebär att använda tal på ett mer formellt och algebraiskt sätt. Matematiker argumenterade kring huruvida negativa tal verkligen var meningsfulla, men när den formella synen på matematik vann över den mer kvantitativa uppfattningen accepterades de negativa talen som legitima matematiska objekt. Bishop et al. (a.a.) beskriver en elev som resonerar logiskt när hon ställs inför att lösa uppgiften $-5 - -3 = \square$. Eleven undersökte först $-5 + -3 = \square$ sedan jämförde hon uppgifterna med varandra och konstaterade att i den första uppgiften borde svaret ligga längre från de positiva talen än i den andra uppgiften. Eleven jämförde således operationerna subtraktion och addition och höll termerna konstanta. Eleven insåg att om additioner förflyttar resultatet längre från de positiva talen, då borde dess motsats, subtraktion flytta resultatet närmare de positiva talen (a.a.).

2.2 ATT FÅ TILLGÅNG TILL MATEMATISKA OBJEKT

Eftersom vi genom våra sinnen inte har direkt tillgång till matematiska objekt behöver vi hjälp med att få syn på objektens innebörd. I det följande visas tre olika teoretiska utgångspunkter för hur detta kan ske.

2.2.1 MED HJÄLP AV METAFORER

Enligt Lakoff och Núñez (2000) kan innebörden av matematiska begrepp uppfattas med hjälp av *metaforer*. En metafor ses som en avbildning från en källdomän, det vill säga mänskliga upplevelser från den fysiska världen, till en måldomän, som består av abstrakta begrepp. Lakoff och Núñez hävdar att grundläggande aritmetik förstås genom fyra metaforer, nämligen tal som: *en samling objekt*, *en konstruktion av objekt*, *uppmätta enheter som kan jämföras* samt *platser* eller *rörelser längs en väg*. Egenskaper hos måldomänen förstås i termer av egenskaper hos källdomänen, vilket innebär att källdomänen måste vara välkänd. Den grundläggande metaforen "aritmetik som rörelse längs en väg" belyser egenskaper hos tal som liknar egenskaper för platser och rörelser längs en sträcka till exempel talens ordinalitet, medan andra egenskaper kommer att vara ur fokus. I källdomänen kan då med hjälp av exempelvis tallinjen användas: (1) platser på en väg samt (2) förflyttning från ursprungsplatsen till plats A på vägen och förflyttning från ursprungsplatsen till plats B på vägen. I måldomänen motsvaras detta av: (1) tal samt (2) addition. Det behövs, enligt Lakoff och Núñez, alltid flera metaforer för att belysa ett begrepp. Kilhamn (2011) har undersökt hur metaforer används och kan användas i klassrummet. Hon kom fram till att metaforer kan vara till hjälp, men att de alltid har begränsningar. Kilhamn pekar också på att lärare och elever inte alltid förstår metaforerna på samma sätt, eftersom något som ses som en källdomän för läraren kan ses som måldomän av eleven (a.a.).

2.2.2 MED HJÄLP AV OLIKA REPRESENTATIONER

Duval (2006) lyfter fram begreppet *representationer* och hävdar att det mest centrala för lärandet i matematik är att kunna växla mellan olika representationsformer. Duval förklarar begreppet representation som "något som står för något annat". Duval fokuserar *semiotiska* representationer, det vill säga tecken med tillhörande komplexa associationer och menar att dessa uppstår som allmänna verktyg för att producera ny kunskap. Matematiska objekt är endast tillgängliga via behandling av dess semiotiska representationer, vilket gör matematiken svårtillgänglig. Duval lyfter fram två olika typer av transformationer: *treatment* (behandling) och *conversion* (konvertering). *Treatment* innebär omvandling inom ett specifikt system, t.ex. $4 - 3 \neq 3 - 4$, medan *conversion* innebär omvandling mellan olika system t.ex. från bild: ○○○○ till symbol: 4 (a.a.).

Ett matematiskt objekt, såsom exempelvis talet 5, kan inte upplevas direkt genom våra sinnen utan måste förstås i termer av dess representationer. För att undvika misstaget att förväxla det matematiska objektet med någon av dess representationer bör flera representationer av samma objekt upplevas och kontrasteras av eleven. Det är också viktigt att representationerna väljs med omsorg. Till exempel är det inte möjligt att förstå addition av positiva heltal genom att representera dem som punkter på en tallinje. Dock kan addition förstås på tallinjen om tal representeras dynamiskt, som upprepade enstegshopp eller som vektorer (Duval, 2006, i Sollervall, 2011).

2.2.3 MED HJÄLP AV NOGGRANT UTFORMADE EXEMPEL

Mason (2002) betraktar matematik som "the discipline of noticing" och betonar betydelsen av hur *exempel* utformas i matematikundervisningen. Enligt Mason kan exempel betraktas som medierande redskap genom vilka vi kan få kontakt med abstrakta idéer (a.a.). Goldenberg och Mason (2008) påpekar med utgångspunkt i Marton (2006), vikten av att elever uppmärksammar vad som är *lika* respektive *olika* i exempel. Att notera eller uppmärksamma är något som inte sker medvetet, därför måste man i undervisningen träna på att lägga märke till samt återberätta hur exempel är uppbyggda (Watson & Mason, 2006). Matematiska objekt blir enbart exempel när de ses som exempel på något: hypoteser och begrepp, tillämpning av tekniker eller metoder, olika typer av bevis, användning av diagram, särskilda notationer med mera (Goldenberg & Mason, 2008). Den grundläggande konstruktionen är handlingen att se något som ett exempel på en "sak". Således kan talet 36 ses som ett exempel på användning av platsvärde, som ett jämnt tal, som ett tal jämnt delbart med 3 eller som ett kvadrattal (a.a.).

I Figur 2 sammanfattas tre teoretiska utgångspunkter för hur innebörden av matematiska objekt ska kunna träda fram för oss.

Företrädare	**Centralt begrepp**	**Hur innebörden av matematiska objekt kan träda fram för oss**
Lakoff och Núñez (2000)	Metaforer	Genom att exempelvis betrakta *tal* (måldomän) som *en plats på en väg* (källdomän).
Duval (2006)	Representationer	Genom att exempelvis jämföra ”fem” utifrån en representation med äpplen eller symbolen för talet 5, vilket gör att två olika system av representationer kontrasteras.
Mason (2002)	Exempel	Genom att uppfatta vad som liknar respektive skiljer ett exempel från ett annat, samt kunna återberätta detta.

Figur 2. *Centrala begrepp samt hur innebörden av matematiska begrepp kan träda fram för oss, enligt tre teoretiska företrädare.*

2.3 OLIKA SÄTT ATT FÖRSTÅ TAL

Bishop et al. (2014b) hävdar, utifrån bland annat Lakoff och Núñez (2000), att elever huvudsakligen kommer att möta och utveckla tre olika sätt att betrakta tal nämligen en *ordinal*, en *kardinal* samt en *formell* förståelse av tal. De två första synsätten handlar om att ordna tal samt att se tal som en uppräkningsbar mängd. I det tredje synsättet ses tal som en formell enhet, eleverna närmar sig tal på ett algebraiskt sätt genom att generalisera från vad de redan vet är sant om heltal och operationer på dem. Med det formella synsättet kan tal behandlas abstrakt, som objekt som lyder regler. I mötet med hela tal (Z) behöver eleverna, enligt Bishop et al. (a.a.) kunna använda sig av vart och ett av dessa tre förståelser av tal.

2.3.1 ATT UTGÅ IFRÅN TALENS ORDNING

Idén om ordning är en grundläggande princip i vårt talsystem (Bishop et al., 2014b). En förståelse av heltal samt aritmetiska beräkningar med dessa kan byggas upp genom resonemang kring tals ordinala betydelse. Barns första erfarenheter av ordning uppstår när de lär sig att räkna och resonera om *före* och *efter*, samt *mindre än* och *större än*. Inom den ordinala förståelsen av tal så som Bishop et al. (a.a.) beskriver, sekvenseras och ordnas talen. Visserligen ses -3 som ett större tal än -4 men mindre än -2, men talen relateras dock inte nödvändigtvis till en beräkningsbar summa eller en uppräkningsbar kvantitet (a.a.).

Bishop et al. (2014b) undersökte hur den sjuåriga eleven Violet använde en modell som utgick från en ordinal förståelse av tal, för att framgångsrikt hantera hela tal och aritmetiska beräkningar med dessa. De använde sedan Violets modell som grund för att göra antaganden om hur förståelse av heltal kan grundas utifrån en ordinal syn på tal.

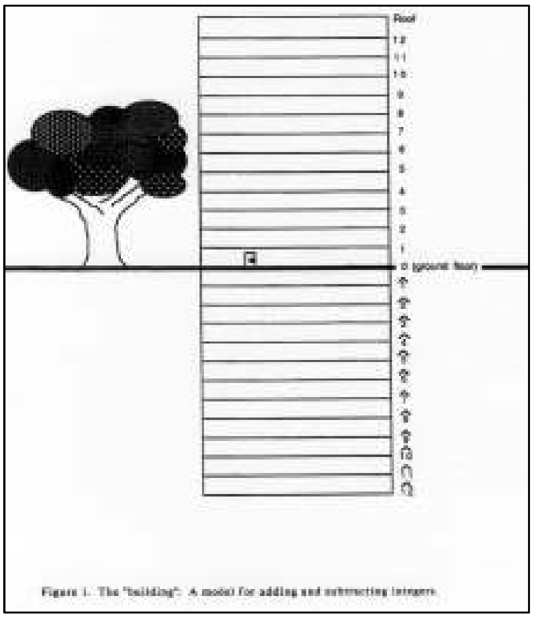
Violet uppmanades att räkna ut och resonera kring uppgifter av typen: $3 - 5 = \square$, $\square + 5 = -2$ samt $5 + \square = 2$. Forskarna konstaterade att Violet konsekvent drog nytta av sin ordinala förståelse av tal, vilket avspeglades i hennes användning av tallinjen liksom i förmågan att kunna överföra räknestrategier till negativa heltal.

Violets föreställning om tal inbegriper att hon uppfattar naturliga tal som en uppräkningsbar mängd av objekt, vilket kan räknas till en kardinal syn på tal (Bishop et al., 2014b). Negativa tal ses inte som en uppräkningsbar mängd av objekt. Både naturliga tal och negativa tal ses som en del av samma ordnade uppsättning eller sekvens av tal, vilket sammanfaller med en ordinal syn på tal. Även det faktum att Violet betraktar varje naturligt och negativt tal som en unik plats på tallinjen, stämmer överens med en ordinal syn på tal. I den tredje och avslutande intervjun börjar dock Violet att definiera negativa tal i relation till positiva tal, eftersom hon hävdar att negativa tal kan innebära att göra det motsatta. För att kunna addera ett negativt tal tänkte sig Violet att man skulle göra motsatsen (förflytta sig till vänster) mot vad man vanligtvis gjorde vid additioner (förflytta sig till höger). Detta resonemang använde sig Violet av när hon löste uppgiften $4 + \square = -3$. Bishop et al. (a.a.) betraktar detta sätt att resonera som en föregångare till ett mer formellt sätt att se på tal. Utifrån antagandet att negativa och positiva tal har motsatta effekter, utvecklade Violet en förståelse av att negativa tal kan betraktas som en förändring av riktning.

I de båda första intervjuerna uppfattade Violet addition som att få ett resultat som är större än startvärdet, medan subtraktion uppfattades som att ha ett lägre eller mindre resultat än startvärdet. På en tallinje representeras addition av förflyttning till höger, medan subtraktion innebär förflyttning till vänster. Under den tredje intervjun resonerade, som nämnts, Violet om positiva och negativa tal i termer av motsatt effekt. Detta medför att Violet utvecklade förståelsen av additioner och subtraktioner på tallinjen. På tallinjen betraktade hon sedan addition av en negativ värdeförändring som att göra motsatsen till det ”normala”, vilket innebär att det motsvarar förflyttning till vänster på tallinjen.

Även subtraktion av en negativ värdeförändring sågs av Violet som motsatsen till det normala, vilket medför att förflyttning i sådana fall sker till höger på tallinjen (a.a.).

Även Ball (1993) använde sig i sin forskning huvudsakligen av den ordinala förståelsen av tal. Utgångspunkten i arbetet med negativa tal är för Ball (a.a.) att matematiken bör utgå ifrån seriösa problemställningar som engagerar eleverna. Hon citerar Lampert (1990) som hävdar att elevers aktiviteter bör likna matematikers genom att exempelvis fokusera hypotesprövning och att undersöka mönster. I sin strävan att lära elever att tänka matematiskt, undersökte Ball undervisning om och lärande av negativa tal i sin egen klass med elever i åtta- och nioårsåldern. I sin undervisning utgick Ball ifrån en byggnad med flera våningar både över och under marknivå, se Figur 3.



Figur 3. *En bild av en byggnad med flera våningar som Ball (1993) använde i undervisningen om negativa tal.*

Ball (a.a.) motiverar sitt val av modell med att hon i sin analys av negativa tal samt operationer med dessa identifierade två intressanta komponenter, nämligen *riktning* och *magnitud*. Negativa tal kan, utifrån dess riktning, användas för att visa summan av motsatsen till något annat, exempelvis kan -5 användas för att representera en skuld på 5 dollar det vill säga motsatsen till att ha 5 dollar. Negativa tal kan också användas utifrån dess magnitud till att representera en placering i förhållande till 0, exempelvis kan -5 ses som en position fem enheter från noll. Att samtidigt inse att -5 på ett sätt är mer än -1 men på ett annat sätt mindre än -1, ser Ball som kärnpunkten i att förstå negativa tal: ”There is a sense in which -5 is more than -1 and equal to 5, even though, conventionally, the "right" answer is that -5 is less than both -1 and 5. This interpretation arises from perceiving -5 and 5 as both five units away from zero, and -5 as more units away from zero than -1” (a.a., s. 9). Eftersom Ball kände till att hennes elever tenderade att betrakta negativa tal som likvärdiga talet noll, hoppades hon att den klart positionella modellen ovan (Figur 3) skulle kunna motverka dessa tankar. Ball var dock medveten om att modellen hade begränsningar, bland annat när det gäller subtraktion av negativa tal. Eleverna uppmanades lösa uppgifter av typen: ”Take your person and put her on any floor. Have her take the elevator to another floor and then write a number sentence to record the trip she took.” och ”How many ways are there for a person to get to the second floor?” (a.a., s. 10 och 12.).

När klassen resonerade kring hur $6 + (-6)$ skulle tolkas med stöd av våningshuset uppstod, enligt Ball, en kris. Det blev svårt att förstå hur en person som befann sig på sjätte våningen ovanför marken, skulle kunna gå upp minus sex våningar. Ball använde sig av pengar som ett komplement till våningshuset. Utifrån indelningen av förståelser av tal som nämndes ovan (Bishop et al., 2014b), skulle användningen av pengar mer stå för en kardinal än en ordinal syn på tal. Svårigheterna med detta var att eleverna tenderade att undvika negativa tal och istället använde sig av ”att vara skyldig någon en viss summa pengar”. Ball skriver att efter att ha arbetat med våningshuset och pengar som metaforer[5] för negativa tal, så kunde samtliga elever jämföra heltal som exempelvis $-35 < 6$ och $6 > -6$ samt utifrån begreppen *under* och *över* noll förklara varför ett tal var större än ett annat. Ball kunde dock konstatera att då eleverna uppmanades att ange ett tal som hade ett lägre värde än -4, angav ungefär hälften av hennes elever ett tal som hade ett större värde. Ball drog slutsatsen att tals absoluta värde i form av dess magnitud är oerhört kraftfullt eftersom -5 kan betraktas som mer än 2, exempelvis ligger det längre ifrån 0 än vad 2 gör. Balls elever nådde således inte riktigt ända fram till den kärnbetydelse av negativa tal som hon som lärare utgick ifrån: Att samtidigt inse att -5 kan betraktas som mer än -1, men också mindre än -1.

2.3.2 ATT UTGÅ IFRÅN TALENS KVANTITET

En studie genomförd av Linchevski och Williams (1999) behandlar elvaåriga elevers transformeringar av kunskap från situationer utanför skolan till skolmatematiken. Med hjälp av ett scenario där människor går in och ut genom dörrarna till ett diskotek uppmanades eleverna att hålla reda på hur många som samtidigt befann sig i lokalen. Eleverna utvecklade intuitiva strategier när de exempelvis för att lägga till det antal som gick ut, tog bort det antal som gick in. Dessa strategier, menar Linchevski och Williams, hjälper eleverna med redskap för att senare klara av subtraktioner där man måste gå förbi noll. Så småningom klarade barnen av att tänka i balansräkning. För att få fram blå kulor när dessa tagit slut, lyfte en elev tillbaka 15 kulor av vardera sorten och förklarade att det inte påverkar balansen av hur många som gått in och ut. En annan strategi gick ut på att istället för att lägga till en ”utkula”, kan du lägga till en ”inkula”. När eleverna i framtiden jobbar med abakusen tänker sig Linchevski och Williams att de kommer att referera till situationen som skapades då människor gick in och ut från diskoteket (a.a.).

[5] Ball (1993) använder omväxlande begreppen modell och representation. Här används begreppet metafor eftersom våningshuset och pengar i denna uppsats anses utgöra en exemplifiering av tal som knyter an till vardagen.

Whitacre et al. (2012) undersökte hur tre elever i åldern 6, 8 och 10 år hanterade uppgifter som beskrevs i termer av ”glada” respektive ”ledsna” tankar. Inledningsvis förklarades att Jessica varje dag hade glada tankar och ledsna tankar. Om hon hade en glad tanke och en ledsen tanke då kände hon sig normal, alltså varken glad eller ledsen. Eleverna ställdes inför uppgiften: ”På måndagen hade Jessica 2 glada tankar och 7 ledsna tankar. Vilken typ av dag var måndagen?” Eleverna fick flera liknande exempel och uppmanades även att jämföra olika dagar med varandra. Elevernas svar visade tre olika sätt att värdera glädje och ledsamhet. Dessa var: 1. Teckenfunktion: Eleven jämförde de glada och de ledsna dagarna. Dagar identifierades som glada om de innehöll fler glada tankar än ledsna tankar och vice versa. En dag med lika antal glada och ledsna tankar identifierades som varken glad eller ledsen. 2. Balansfunktion: Eleven behandlade glada och ledsna tankar som att de parvis upphäver varandra. Om enbart glada tankar kvarstod betraktades dagen som glad, graden av glädje benämndes utifrån antalet glada tankar som återstod. Detsamma gällde för ledsna tankar. Om inga tankar alls fanns kvar betraktades dagen som varken glad eller ledsen. 3. Summan görs explicit: Antalet glada tankar översätts till positiva heltal och antalet ledsna tankar översätts till negativa heltal. Sammanlagd glädje eller ledsamhet angavs genom summan av de två heltalen. Resultatet tolkades i termer av glädje eller ledsamhet (a.a.).

Båda studierna tar sin utgångspunkt i det som Bishop et al. (2014b) skulle kalla en kardinal syn på tal. Linchevski och Williams (1999) samt Whitacre et al. (2012) hävdar dock att de i elevernas resonemang kan se begynnande abstrakta och formella resonemang vilka, enligt Bishop et al. skulle höra hemma i den formella synen på tal. Eleven Violet, som nämndes tidigare, använde sig av förståelsen att negativa tal kan betraktas som en förändring av riktning i uppgiften $4 + \square = -3$, vilket Bishop et al. (a.a.) betraktade som en föregångare till ett mer formellt sätt att se på tal. Således framstår det som möjligt för eleverna att uppnå en formell syn på tal både genom att utgå från talens ordning och genom att utgå från tals kvantitet.

2.4 EN LEARNING STUDY MED FOKUS PÅ NEGATIVA TAL

Kullberg (2010) genomförde en learning study med en grupp lärare och elever i årskurs sju och åtta. Denna typ av forskning skiljer sig åt från de undervisningsexperiment som tidigare beskrivits, bland annat genom att lärare och forskare arbetade tillsammans med att planera, genomföra, analysera och revidera lektioner. Modellen learning study som samtidigt fungerar som forskning och kompetensutveckling fokuserar, vanligen med stöd av variationsteorin, på ett specifikt kunskapsinnehåll (Pang & Marton, 2003). I den studie som beskrivs av Kullberg (a.a.) formulerades det specifika kunskapsinnehållet *Att kunna utföra beräkningar i addition och subtraktion med negativa tal, som exempelvis* $5 - (-3)$ *och* $(-5) + (-3)$ (Kullberg, 2010, s. 176).

Bakgrunden till Kullbergs studie beskrivs, bland annat utifrån Ball (1993) och Gallardo (1995), vara att forskning visar att elevers förståelse av addition och subtraktion med negativa tal är bristfällig och att anledningen till detta kan återfinnas i undervisningen. Ofta bygger undervisningen om negativa tal, enligt Vlassis (2004) på olika metaforer som gäller enbart i vissa situationer eller på regler som elever lär sig utantill. Vlassis (a.a.) förespråkar en större flexibilitet när det gäller hur minustecknet används, vilket i detta kapitel tidigare beskrivits utifrån forskning av Lamb et al. (2012). I studien identifierades fyra olika aspekter som kritiska för elevernas lärande (Kullberg, 2010, s. 176). Med *kritiska aspekter* avses det som learning study-gruppen fann att eleverna behövde lära sig för att göra det specifika kunskapsinnehållet till sitt eget.

1. *Minustecknets olika betydelser*, innebär att eleverna behöver urskilja skillnaden mellan subtraktionstecknet och tecknet för ett negativt tal.
2. *Subtraktion som skillnad*, är en aspekt som betonar att subtraktion kan ses både som en skillnad mellan tal och som 'ta bort'. Subtraktion kan ses som skillnaden mellan två tal på en tallinje, exempelvis skillnaden mellan (-2) och (-3) är 1.
3. *Perspektivet,* innebar att eleverna behövde urskilja att kommutativa lagen inte gäller för subtraktion, utan att en subtraktion kan ses som en jämförelse (skillnad) sedd från den första termen.
4. *Talsystemets uppbyggnad*, innebär att eleverna behöver urskilja att talens värde blir större ju längre åt höger på tallinjen man kommer.

Kritisk aspekt 1 ”minustecknets olika betydelser” beskrivs av Kullberg (2010) som vida omtalat i forskning, vilket även återspeglas i föreliggande uppsats litteraturgenomgång. Kritisk aspekt 2 ”subtraktion som skillnad” har, enligt Kullberg (a.a.), sin grund i att utmana elevernas föreställningar om att subtraktion enbart handlar om att ta bort en mängd från en annan mängd. Även historiskt har, som nämnts tidigare, uppfattningen om tal som kvantiteter hindrat förståelsen av negativa tal. Kullberg hävdar att kritisk aspekt 3 ”perspektivet” inte finns beskrivet i forskningslitteraturen. Aspekten ska förstås som att en jämförelse av skillnaden först görs och sedan efterfrågas från vilket perspektiv denna skillnad ska ses (a.a.). Om man likställer ”perspektivet” med att den kommutativa lagen inte kan tillämpas på subtraktion så finns det forskning om detta (Kilhamn, 2011; Olteanu & Olteanu, 2012). Kritisk aspekt 4 ”talsystemets uppbyggnad” har sin grund i att eleverna ansåg att tals värde ökar åt båda riktningar från noll räknat. Om man talar om talens absoluta värde stämmer detta, men inte annars (a.a.).

2.5 ATT INTRODUCERA NEGATIVA TAL BLAND YNGRE ELEVER

Vanligen möter svenska elever negativa tal först i årskurs 4 eller 5, beräkningar med negativa tal behandlas vanligen i årskurs 8. I den learning study som ligger till grund för föreliggande uppsats, introduceras dock negativa tal för elever i årskurs 2 och 3.

De flesta undersökningar som jag har kommit i kontakt med handlar om elever som är i mellan- och högstadieåldrarna, men det finns undantag. Bishop et al. (2014b) undersökte, som tidigare nämnts, hur den sjuåriga eleven Violet använde en modell som utgick från en ordinal förståelse av tal, för att framgångsrikt hantera hela tal och aritmetiska beräkningar med dessa. Samma forskare visar i undersökningen ”Happy and sad thougts” att elever i 6, 8 och 10-årsåldern kan resonera om motsatta magnituder på ett sätt som beskrivs som roten till ett algebraiskt tänkande (Whitacre et al., 2012).

Balls studie (Ball, 1993) är annorlunda inte bara för att hon forskar på och undervisar i sin egen klass, utan också för att åtta- och nioåriga elever vanligen inte möts av negativa tal i undervisningen. Ball (a.a.) beskriver att elevernas förståelse av de negativa talen inte riktigt utvecklades i den omfattning som hon planerat. Trots arbetet med våningshuset och med pengar kunde knappt hälften av eleverna ange ett tal vars värde var mindre än -4. Ball antog att eleverna skulle välja negativa tal för att beskriva skulder men det visade sig att de tenderade att undvika att använda negativa tal. En elev argumenterade:”There is no such thing as below-zero dollars!” (Ball, 1993, s.15) och separerade därför hur mycket pengar någon hade och hur mycket pengar som personen var skyldig någon annan.

Det finns också forskare som avråder från att introducera negativa tal bland yngre elever. Freudenthal (1987, citerad i Linchevski & Williams, 1999) drog slutsatsen att eftersom varken räknemodeller eller tallinjemodeller är helt tillfredsställande för att bygga en förståelse av negativa tal, bör införandet av dessa dröja tills eleverna har möjlighet att följa och tro på argument som bygger på matematiska strukturer eller mönster. Även Heeffer (2011) påpekar att begreppet negativa tal är mycket svårt att förstå och hänvisar till att i Belgien är själva undervisningen om operationer med negativa tal inte tillåten förrän eleverna är tolv år: ”the very teaching of operations on negative numbers is no longer allowed in education below the age of 12 in Belgium” (a.a., s.2). Eftersom negativa tal med yngre elever, enligt Heeffer, endast kan användas i konkreta situationer som temperatur och våningar i en byggnad, är det bättre att vänta tills eleverna förstår algebraiska resonemang. Heeffer skiljer dock mellan addition och subtraktion samt multiplikation och division, när det gäller negativa tal. De förstnämnda operationerna fungerar exempelvis att hantera med tallinjen, de två andra gör det inte (a.a.).

Otten (2009) däremot, hänvisar bland annat till Wilcox (2008) undersökning om sin sjuåriga dotters kunskaper om tal till vänster om noll. Otten hävdar att negativa tal förser elever med tidiga och värdefulla möjligheter att jobba med matematiskt tänkande. Utvidgningar från formella lösningssätt grundade i erfarenheten till mer abstrakta begrepp är, enligt Otten, karaktäristiskt för matematiken som disciplin. Det är möjligt att sättet elever lär sig hantera negativa tal har betydelse för hur elever möter framtida matematiska utvidgningar (a.a.).

Kilhamn (2011) beskriver hur rikt och omfattande begreppet negativa tal är. Hon menar därför attnegativa tal borde få större utrymme än det har idag, samt att många aspekter av negativa tal kan lyftas fram betydligt tidigare. Insikter som att exempelvis kunna se 0 som ett tal och inte enbart en representation av ingenting, att förstå hur subtraktion fungerar, samt att kunna hantera tallinjen är viktiga förkunskaper inför mötet med negativa tal. Eleverna skulle på så vis kunna hjälpas till en god taluppfattning för att sedan förstå operationer med negativa tal. Kilhamn anser att undervisningen om negativa tal behöver studeras vidare, en anledning är att fokus ibland på ett oreflekterat sätt hamnar på metaforer av negativa tal, exempelvis termometern (a.a.).

3. PROBLEMFORMULERING

I uppsatsen undersöks vad elever i årskurs 2 och 3 behöver lära sig för att bli bekanta med de negativa talen, samt hur undervisningen kan utformas för att utveckla detta lärande. Att bli *bekant* med de negativa talen handlar om att förstå att de negativa talen, liksom de naturliga talen, är tal.

3.1 UPPSATSENS PROBLEMOMRÅDE

Utifrån föregående kapitel framgår att begreppet negativa tal av elever upplevs som svårt att förstå. Även matematikhistorien visar att negativa tal har varit en stötesten och problematiskt att få grepp om. Den forskning som finns om lärande av och undervisning om negativa tal handlar, med få undantag, om att forskare intervjuat elever samt testat någon slags modell för negativa tal ute i praktiken. Vad som däremot inte har undersökts i lika hög grad är relationen mellan undervisning om och lärande av negativa tal, det vill säga hur undervisningens utformning kan främja förståelse av de negativa talen. Undersökningar där elevernas uppfattningar av negativa tal blir till lektionens innehåll, samt där även lärarnas erfarenheter och kunskap används, är ovanliga.

3.2 UPPSATSENS SYFTE OCH FRÅGESTÄLLNINGAR

I flera av de undersökningar som nämnts i bakgrundskapitlet deltar yngre elever som ännu inte fått formell undervisning om negativa tal, vilket indikerar att begreppet skulle kunna introduceras tidigare än vad som sker idag. Med variationsteorin som teoretisk utgångspunkt samt med learning study som metod, syftar därför föreliggande uppsats till att belysa undervisning om och lärande av negativa tal i årskurs 2 och 3. Det ämnesdidaktiska bidraget kan ses som en fortsättning på två av de slutsatser som Kilhamn (2011) drar i sin avhandling. Dels föreslår Kilhamn att många aspekter av negativa tal kan lyftas fram tidigare än vad som görs idag, dels uppmärksammade hon att fokus i undervisningen ibland på ett oreflekterat sätt hamnar på metaforer av negativa tal som exempelvis termometern. I denna uppsats är det därför, som nämnts, elever i årskurs två och tre som deltar i learning studyn. Av intresse för uppsatsen är att utmana det oreflekterade sätt som metaforer och/eller representationer verkar användas på i undervisningen genom att förflytta fokus, från *hur* något ska läras till *vad* som ska läras och, då detta har identifierats, hur man på bästa sätt kan undervisa om det specifika innehållet. Det praktikutvecklande bidraget tar sin utgångspunkt i Carlgren (2012) och Elliot (2012) som påpekar att det behövs forskning som knyter samman teori och praktik. Sådan forskning bör detaljerat fokusera både vad som ska läras och hur detta kan ske (a.a.). I föreliggande uppsats fokuseras därför vad eleverna i studien behöver lära sig för att bli bekanta med de negativa talen. Av stor betydelse är också hur undervisningens uppläggning påverkar elevernas möjlighet till detta.

Följande frågeställning besvaras i uppsatsen:

- Vad behöver elever i årskurs 2 och 3 lära sig för att bli bekanta med de negativa talen?

4. UPPSATSENS TEORIRAM

Utifrån forskningsfrågan om vad elever i årskurs 2 och 3 behöver lära sig för att bli bekanta med de negativa talen, betraktas variationsteorin (Marton, 2015) med dess tydliga fokus på nödvändiga innehållsrelaterade aspekter av lärande kunna fungera som teoretisk utgångspunkt.

4.1 FOKUS PÅ VAD SOM SKA LÄRAS

Under de senaste trettio åren har uppfattningar om hur undervisning bör bedrivas förskjutits från att lärarna bör undervisa eleverna, till att eleverna uppmuntras till att själva söka kunskap (Kullberg, 2010). Marton (1994) beskriver detta som en innehållserosion där inte tillräcklig uppmärksamhet ägnas åt vad elever förväntas lära. Dagens pedagogiska diskussioner kännetecknas enligt Carlgren och Marton (2001) av *hur* någonting ska läras, det vill säga vilken metod som är lämplig att använda. Betydligt mindre uppmärksamhet ägnas åt *vad* som ska läras (a.a.). För att hitta effektiva sätt att arrangera för lärande måste man, utifrån variationsteoretiska antaganden, först fråga sig vad som ska läras (Lo & Marton, 2012). Sedan gäller det att hitta de olika villkor som befrämjar just detta lärande (a.a.).

För att ta reda på vad eleverna behöver lära sig för att, som i denna uppsats: *bli bekanta med de negativa talen*, räcker det inte med att använda sig av läroplanens innehåll. Målbeskrivningarna i läroplanen beskriver endast generellt vad alla elever i en viss ålder förväntas nå upp till. Om vi mer specifikt vill undersöka vad en viss elevgrupp behöver lära sig för att nå ett särskilt lärandemål, är inte läroplanens information tillräcklig. Som beskrivits i bakgrundskapitlet finns det en hel del forskning om hinder som kan stå i vägen vid lärandet av negativa tal. Exempelvis pekas en sammanblandning av minustecknets betydelser (Gallardo, 1995; Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004), samt ett ensidigt fokuserande av tals kvantitativa egenskaper (Bishop et al., 2014a), ut som hinder för lärande av negativa tal. Men inte heller med denna forskning når vi ända fram till att förstå vad det mer specifikt är som behöver synliggöras i undervisningen. För att komma åt det krävs dels kunskap om elevernas uppfattningar av det som ska läras, dels ett djupare utforskande av vad det objekt som ska läras innebär (Marton, 2015). Inom variationsteorin benämns det avgränsade lärandeinnehållet kopplat till en viss förmåga, som undervisningen syftar till att nå, för *lärandeobjekt* (a.a.).

4.2 ELEVERS UPPFATTNINGAR AV LÄRANDEOBJEKTET

Variationsteorin kan beskrivas som en teoretisk vidareutveckling av forskningsansatsen fenomenografi (Marton & Booth, 2000; Runesson, 1999). Fenomenografin undersöker människors uppfattningar av fenomen i omvärlden, medan variationsteorin även intresserar sig för hur lärandet kan utvecklas (Marton & Booth, 2000). Båda utgår ifrån en icke-dualistisk ontologi, där uppfattningar konstitueras som en relation mellan subjekt och objekt (Runesson, 1999). Objektet är alltid förbundet med ett erfarande subjekt, det vill säga människan. Med ett icke-dualistiskt synsätt på världen är det inte möjligt att samla generella påståenden om objektet som sedan överförs till subjektet. Utgångspunkten måste istället vara den lärandes uppfattning av objektet (a.a.). För att kunna besvara forskningsfrågan om vad elever behöver få syn på i mötet med negativa tal, är det därför inte tillräckligt att söka information i själva ämnet.

Det ontologiska antagandet får konsekvensen att relationen mellan subjektet och lärandeobjektet måste undersökas empiriskt. Det räcker således inte med att det som ska läras (objektet) genom forskningslitteratur och erfarenhet är välkänt, utan det är i elevens (subjektets) möte med objektet som uppfattningen bildas. Enligt variationsteorin fungerar vårt medvetande intentionellt, det vill säga vår uppmärksamhet riktas alltid mot något (Runesson, 1999). Vi urskiljer alltid något *som* något. Hur något uppfattas är beroende av individens sätt att urskilja delar av helheten, och att relatera delarna till varandra och till helheten. Skillnaden mellan att kunna och att inte kunna, kan ses som en skillnad i att kunna erfara något på ett visst sätt. Lärande innebär en förändring i sättet att erfara något. Förändringen kan innebära att andra aspekter kan bli urskiljda eller att vissa aspekter urskiljs samtidigt (a.a.).

4.3 VAD ELEVEN BEHÖVER FÅ SYN PÅ

Inom variationsteorin studeras relationen mellan subjektet och objektet med hjälp av begreppet *kritiska aspekter* (Marton, 2015). En kritisk aspekt kan formuleras som en åtskillnad eller distinktion som anses som nödvändig att få syn på för att det avsedda lärandet ska kunna ske (a.a.). Kritiska aspekter kan också beskrivas som det som eleven måste få syn på för att erfara ett kunskapsinnehåll på det sätt som planerats (Runesson, 2006). Ett urskiljande av de kritiska aspekterna betraktas således som avgörande för elevens lärande (a.a.). Vilka aspekter som är kritiska för ett lärandeobjekt kan växla mellan olika elevgrupper. Det innebär att de kritiska aspekterna måste undersökas empiriskt. I denna uppsats används metoden learning study, som beskrivs närmare i nästa kapitel, tillsammans med variationsteorin för att undersöka vad som förefaller vara kritiska aspekter av lärandeobjektet.

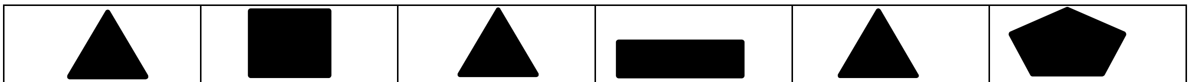
4.4 ATT ERFARA SKILLNADER FÖRE LIKHETER

I en lärandesituation är det, utifrån variationsteorin, nödvändigt att erfara skillnader innan man erfar likheter (Marton, 2015; Runesson, 2006). Detta antagande utgör en stark kontrast till hur innehållet traditionellt sett behandlats i undervisningen (a.a.). Att lära sig något handlar om att gå från en odelad helhet till att kunna urskilja kritiska aspekter av lärandeobjektet, för att sedan återgå till helheten med kunskap om relationen mellan delarna och helheten (Marton, 2015):

> For instance, a child who has learned to hit a target from a certain distance, with a ball of a certain weight, has learned the act of throwing as an undivided whole, as far as distance and weight are concerned. She cannot discern those aspects and hence cannot adjust to changes in them by taking the differences into consideration. If she can separate them, however, she should be able to adjust to any combination of values in those two dimensions of variation. (Marton, 2015, s.225)

Barnet som beskrivs i citatet ovan har lärt sig att träffa ett mål från ett särskilt avstånd, med en boll av en särskild vikt. Denna aktivitet genomförs som en odelad helhet, det vill säga barnet har ännu inte uppmärksammat att det finns aspekter som kan förändras och som hon måste anpassa sig till. Barnet behöver lära sig att beakta *olika* avstånd och *olika* vikter samt vilka konsekvenser det får för själva kastandet. För att vi ska kunna förändra vår uppfattning av något eller vår förmåga att göra någonting, krävs att vi kan separera ut aspekter ur helheten (Marton, 2015). Om vi alltid har betraktat eller gjort något på samma sätt hela tiden uppmärksammar vi inte vad det egentligen är vi ser eller gör. Det är först när något varierar som vi kan urskilja nya aspekter. Barnet i exemplet ovan kanske ställs inför att träffa målet från samma avstånd, men med en tyngre boll än tidigare. Enligt variationsteorin öppnas då en *dimension av variation* upp. *Dimensionen* utgörs av "vikt", medan de olika bollarnas vikt utgör två drag som kan varieras och jämföras med varandra. Det är när vi ser skillnader som vi kan uppfatta och ta till oss nya innebörder. När en dimension av variation öppnas upp för oss kan vi jämföra ett visst drag med ett annat, då framträder både aspekten och dragen samtidigt för oss (a.a.). Även dimensionen *avstånd* i exemplet ovan skulle kunna öppnas upp genom att två drag i form av olika långa sträckor ställs mot varandra. Om barnet kan ta skillnaderna mellan olika drag i beaktande kan hon återigen skapa en helhet, med skillnaden att hon nu har kunskap om relationen mellan delarna och helheten (Marton, 2015).

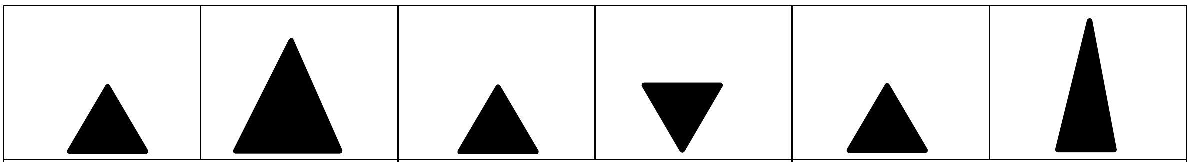
I undervisningen bör utgångspunkten vara *vad* som ska läras, det vill säga lärandeobjektet (Lo & Marton, 2012). För varje lärandeobjekt, samt för varje person som lär, finns det kritiska aspekter som den lärande måste kunna urskilja (a.a.). Hur kan de kritiska aspekterna göras möjliga att urskilja i undervisningen? Eftersom vi enligt variationsteorin inte kan urskilja någonting utan att uppleva variation av objektet i fråga, ses begreppen variation och invarians som centrala utgångspunkter i undervisningen (Lo & Marton, 2012). Det medför att, vad vi än vill lära någon, är det inte tillräckligt att enbart tala om vad själva objektet innebär utan vi måste också ge alternativ. I en undervisningssituation som syftar till att urskilja aspekter av det geometriska objektet triangel måste vi också lyfta fram vad en triangel *inte* är. Inledningsvis måste vi fokusera på skillnader, snarare än likheter (a.a.). Om antalet vinklar anses vara en kritisk aspekt av att förstå vad en triangel är, kan olika geometriska figurer ställas mot varandra (Figur 4).



A. Antalet vinklar i en triangel ställs mot antalet vinklar i en kvadrat.	B. Antalet vinklar i en triangel ställs mot antalet vinklar i en rektangel.	C. Antalet vinklar i en triangel ställs mot antalet vinklar i en femhörning.

Figur 4. *Antalet vinklar i en triangel kontrasteras mot antalet vinklar i andra geometriska figurer.*

Antalet vinklar kan ses som en dimension av variation som öppnas upp genom att triangelns vinklar (3 st.) ställs mot kvadratens och rektangelns vinklar (4 st.) samt mot femhörningens vinklar (5 st.). Det skulle då göras möjligt för eleverna att urskilja att antalet vinklar i en triangel skiljer sig åt från antalet vinklar i de övriga figurerna. Med variationsteoretiska termer skulle respektive antal vinklar i figurerna ovan benämnas för kritiska drag. Det mönster av variation som lyfts fram genom att erfara skillnaden mellan två drag benämns inom variationsteorin för *kontrast*. När eleven plötsligt blir medveten om ett kritiskt drag genom att kontrastera det med ett annat kritiskt drag separeras draget från objektet och en dimension av variation har öppnats (Marton, 2015). När det gäller triangeln, så kan antalet vinklar ses som en kritisk aspekt, det har däremot ingen betydelse vilken längd respektive sida i triangeln har. I undervisningen kan man därför även jämföra likheter mellan olika stora trianglar för att separera kritiska aspekter från andra aspekter av objektet (Figur 5).



A. Olika storlek, men lika antal vinklar	B. Olika orientering, men lika antal vinklar.	C. Olika längd på sidorna, men lika antal vinklar

Figur 5. *Generaliseringar som visar att triangelns storlek, orientering samt sidornas respektive längd inte är kritiska drag för att förstå vad en triangel är.*

Genom de olika jämförelser som görs i Figur 5 görs det möjligt att få syn på att en triangel fortfarande är en triangel oavsett storlek (A), orientering (B) samt sidornas längd (C). Inom variationsteorin ses det som ett nödvändigt villkor för lärande, att de för lärandeobjektet kritiska aspekterna görs möjliga att urskilja (Runesson, 2006). För att skapa förutsättningar för lärandet måste läraren dels veta vilka dessa är, dels öppna upp aspekternas kritiska drag och ställa dem mot varandra (a.a.).

4.5 VARIATIONSTEORINS ROLL I UPPSATSEN

Variationsteorin har i denna uppsats använts till att designa lektioner och elevtest, men också för att analysera huruvida de kritiska aspekterna gjordes möjliga att urskilja i undervisningen. Med hjälp av variationsteorin kunde fokus i learning studyn riktas direkt mot själva lärandeobjektet. Undervisningen byggdes upp kring hur de kritiska aspekterna skulle göras möjliga att urskilja. Aspekterna iscensattes med hjälp av olika exempel. I learning study-gruppen[6] betraktade vi de exempel (bl.a. $a + b = b + a$, $a - b \neq b - a$) som skulle användas i undervisningen utifrån vad i exemplen och mellan olika exempel som hölls invariant och vad som varierade. Exemplens roll blev därför att representera olika kritiska drag som kunde göra det möjligt att öppna upp de olika kritiska aspekterna. I analysen av lektionerna uppmärksammades huruvida de kritiska aspekterna gjordes möjliga att urskilja utifrån variationsteorins centrala begrepp variation, urskiljning och samtidighet (Marton, Runesson & Tsui, 2004). De variationsteoretiska begrepp som beskrivits i kapitlet har använts både för att analysera lärarnas undervisning och elevernas lärande. Analyser på två olika nivåer har genomförts vilket beskrivs under 5.3.8.

[6] Med learning study-gruppen avses de deltagande lärarna och jag själv.

Många försök har, enligt Nuthall (2004) gjorts för att förklara relationen mellan undervisning och lärande, det har dock saknats en användbar teori för att förstå vilken inverkan lärares ansträngningar ger för elevers lärande. Med det variationsteoretiska ramverket görs det möjligt att studera lärande och undervisning med hjälp av samma begrepp (Kullberg, 2010). Det innebär att det som läraren planerar att eleverna ska lära sig, vad som görs möjligt att lära under lektionen samt vad eleverna verkligen lär sig, kopplas samman och beskrivs med samma teoretiska begrepp (a.a.).

Utgångspunkten är ett samlat fokus på lärandets objekt, vilket i denna uppsats medför att jag utifrån forskningsfrågan avser att komma djupt in i en förståelse av lärandeobjektets beskaffenhet. Med hjälp av variationsteorins icke-dualistiska antagande kan relationer mellan eleverna och deras förståelse av negativa tal studeras. I det språkbruk som i föreliggande uppsats används för att sätta fokus på lärandets objekt förekommer emellanåt begrepp som för tanken till en dualistisk ontologi. Det gäller exempelvis formuleringar som *nödvändiga* distinktioner samt att *upptäcka de negativa talens existens*. Marton och Booth (2000) skriver att "vi kan inte beskriva en värld som är oberoende av våra beskrivningar eller av oss som beskriver den. Vi kan inte skilja den som beskriver från beskrivningen" (a.a., s. 148-149). Det innebär i denna uppsats att de formuleringar som nämndes, ska betraktas i förhållande till relationen mellan subjektet och lärandeobjektet. Världen är en del av själva erfarandet (a.a.), vilket innebär att distinktionerna inte kan ses som allmängiltigt nödvändiga. Likaså betraktas inte de negativa talen existera för eleven förrän någon slags relation upprättats mellan subjektet och objektet.

5. DEN EMPIRISKA STUDIEN

Den empiriska studien är av kvalitativ karaktär eftersom innebörden i de studerade fenomenen undersöks (Starrin, 2004). Forskningsansatsen learning study kan beskrivas som intervenerande, vilket innebär att ingripanden görs i undervisningen (Carlgren, 2012; Marton, 2015). Dessutom kännetecknas learning study av en iterativ design där jag som forskare har varit en del av interventionen (a.a.).

5.1 LEARNING STUDY SOM FORSKNINGSMETOD

För att kunna få svar på forskningsfrågan såg jag det som nödvändigt att samarbeta med lärare i deras genuina undervisningsmiljö. En speciell typ av kunskap söktes som handlar om vad som är avgörande att lära sig för att utveckla förmågan att bli bekant med de negativa talen. Kunskapen skulle både säga något om *vad* som är kritiskt och *hur* detta innehåll kan hanteras i undervisningen. För att komma åt denna kunskap användes learning study som forskningsmetod.

Learning study utvecklades, med inspiration från lesson study (Stigler & Hiebert, 1999) samt design experiment (Brown, 1992), i Hong Kong och introducerades i Sverige i början av 2000-talet (Marton, 2003). Det är en modell för lärares utvecklingsarbete men kan också, som i denna uppsats, användas i forskningssyfte (a.a.). Learning study kan beskrivas som en problemdriven forskning som utgår ifrån lärares professionella frågor (Carlgren, 2012). Till skillnad från många andra praktiknära forskningsmetoder bygger forskningsfrågor i learning study på ett väl avgränsat innehåll. Av Carlgren benämns detta som en *partikulär* forskning, där syftet är att fördjupa förståelsen av fenomen i en speciell konkret situation. Teorin, i denna uppsats variationsteorin, hjälper till att fördjupa förståelsen och blir därmed ett redskap för att lösa problem i praktiken (a.a.). Den iterativa och intervenerande design som kännetecknar learning study-cykeln gör att antaganden om vilka aspekter som är kritiska kan prövas, analyseras och revideras (Marton, 2015). Den partikulära forskningen uppstår och specificeras i själva praktiken genom att teori och praktik utvecklas tillsammans (Carlgren, 2012). Eftersom kunskapen genereras i dynamiska, tolkande och meningsskapande praktiker och avses att användas i andra sådana praktiker, måste lärarna vara en del av forskningen (Carlgren, 2012). Det kollaborativa arbetet i learning study-gruppen möjliggör att medlemmarna i gruppen uppmuntras till att sätta ord på sina tankar men också att dessa tankar ifrågasätts, på så sätt kan lärares tysta kunskap och erfarenheter bli till en del av forskningen (Elliot, 1991).

Genom den iterativitet som kom till stånd med hjälp av de cykler som beskrivs i 5.3.1, skedde en specificeringsprocess där ”praktiken förfinas parallellt med den teoretiska förståelsen av lärandeobjektet” (Carlgren, 2012, s. 77). Parallellt med att den learning study som denna uppsats utgår ifrån fortskred, utmejslades en alltmer specificerad förståelse av lärandeobjektets innehåll. Likaså fördjupades förståelsen för relationen mellan undervisning och lärande.

5.2 PILOTSTUDIE

En pilotstudie genomfördes under höstterminen 2012 tillsammans med fem speciallärare i samma kommun som huvudstudien. Studien handlade om negativa tal i årskurs två och tre, lärandeobjektet formulerades som: *Att förstå att det finns tal före noll på tallinjen.* Innan pilotstudien genomfördes hade jag handlett två olika learning studies i den aktuella kommunen. Genom pilotstudien fick jag emellertid erfarenhet av att arbeta med learning study utifrån ett forskningsperspektiv. Arbetet med denna learning study gjorde mig uppmärksam på att lärandeobjektet och de kritiska aspekterna är dynamiska och måste omformuleras efter de indikationer som lektioner och tester ger. Vi upplevde svårigheter, både språkligt och matematiskt, med att hitta användbara formuleringar för att beskriva de kritiska aspekterna.

De aspekter som vi betraktade som kritiska i pilotstudien var: *Att se talet noll som en skiljepunkt mellan positiva och negativa tal*, *Att minustecknet har olika betydelser i matematik, som subtraktion och som negativt tal*, samt *Att "ta bort"- tanken i subtraktion inte fungerar med negativa tal.* De lärdomar som vi drog utifrån studien var att talet 0 av många elever uppfattades som "ingenting", därför ansågs det inte finnas något lägre tal. Trots att vi i undervisningen jämförde positiva tal och negativa tal, samt subtraktioner och negativa tal, upptäckte vi också att det var flera elever som inte uppfattade skillnaden mellan minustecknets innebörder. En annan lärdom från pilotstudien var insikten att begreppet "fattas" skulle kunna vara hjälpsamt för elever som använder "ta bort-tanken" i subtraktion.

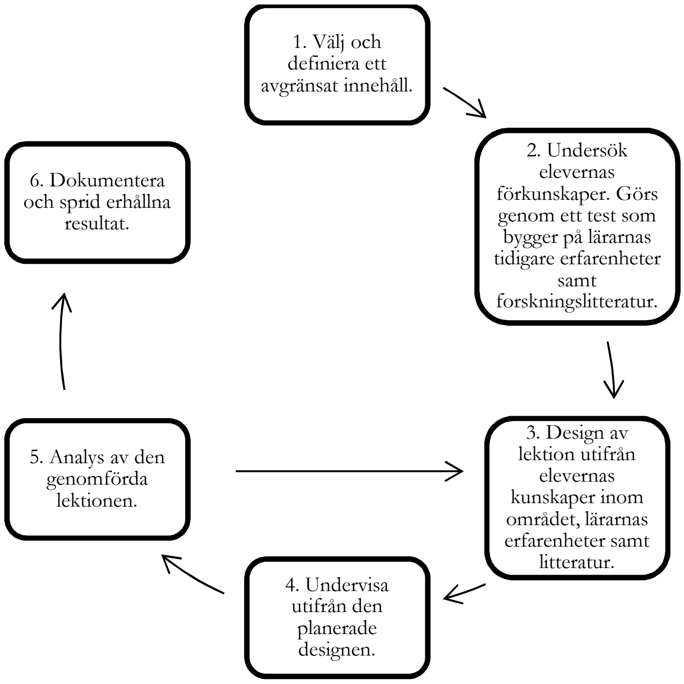
De tre nämnda kritiska aspekterna förde jag med mig in i studien som ligger till grund för föreliggande uppsats genom att presentera vårt resultat, tillsammans med övrig adekvat forskning om lärande av och undervisning om negativa tal, för den nya learning study-gruppen. Det är dock inte så att huvudstudien utgått ifrån och prövat de tre nämnda kritiska aspekterna. Dessa aspekter fanns dock med som ett diskussionsunderlag inför huvudstudien.

5.3 GENOMFÖRANDET AV LEARNING STUDYN

Huvudstudien genomfördes under höstterminen 2013 tillsammans med två lärare. En fördjupad analys av data från studien har skett efter att interventionen avslutades. Data för studiens analys utgörs av elevtest, intervjuer samt filmade lektioner. Även anteckningar från learning study-möten har använts i analysen. I två av de fyra lektionerna var jag den undervisande läraren.

5.3.1 DESIGN AV LEARNING STUDYN

Arbetsgången i learning study utmärks av en cyklisk process där bland annat förtest, analys, revidering samt eftertest utgör viktiga beståndsdelar (Lo, Marton, Pang, & Pong, 2004). Med inspiration från Lo et al. (a.a., s. 193) beskrivs de olika stegen i learning study-cykeln (Figur 6). Därefter beskrivs stegen i förhållande till designen av den learning study som utgör empiri i föreliggande uppsats.



Figur 6. *Learning study-cykelns olika steg.*

Inledningsvis deltog lärarna i en utbildningsdag om variationsteorin och learning study (se 5.3.4). Därefter resonerade learning study-gruppen, det vill säga de deltagande lärarna och jag, om vad som kunde vara ett avgränsat innehåll (1 Figur 6). Utifrån min forskningsfråga hade jag redan bestämt att det övergripande innehållet skulle vara negativa tal, i learning study-gruppen arbetade vi därför med att specificera ett lämpligt lärandeobjekt. I formuleringen av lärandeobjektet funderade vi både på hur det matematiska innehållet skulle formuleras, samt vad eleverna skulle förväntas kunna göra med detta innehåll. Vi valde att undersöka elevernas förförståelse med hjälp av ett skriftligt förtest (2). Förtestet skapades utifrån vad learning study-gruppen med utgångspunkt i tidigare erfarenheter och forskning antog var kritiska aspekter av det lärandeobjekt som valts. Utifrån förtesten (2) lades stor vikt vid att försöka förstå hur eleverna uppfattade begreppet negativa tal. I samband med att eleverna hade genomfört förtesten gjordes även intervjuer (se 5.3.6).

Utifrån vad eleverna svarade på förtestet samt intervjuerna, men också utifrån lärarnas erfarenheter samt forskningslitteratur, designades den första lektionen (3). En av lärarna undervisade eleverna i grupp 1 utifrån den planerade lektionen (4). Vi analyserade den filmade lektionen genom att undersöka vilka aspekter av lärandeobjektet som gjordes möjliga att lära (5). Vi använde oss också av skriftliga eftertest, som var identiska med förtestet. Även en analys av eftertesten samt ett par muntliga eftertestfrågor (se 5.3.6) utgjorde underlag för att revidera lektionen (5). De kritiska aspekter som hade identifierats omformulerades och därefter designades den andra lektionen, vilket innebar att vi återvände till steg 3 i learning study-cykeln ovan. En av de andra lärarna höll nu i lektionen och undervisade eleverna i grupp 2 (4). Lektionen analyserades sedan på samma sätt som beskrivits tidigare (5). Erfarenheterna från detta steg användes när den tredje lektionen skulle planeras (3). Den tredje läraren undervisade eleverna i grupp 3 utifrån den planerade designen (4). Efter den tredje analysen (5) upprepades steg 3 – 5 ytterligare en gång. Den tredje läraren undervisade även eleverna i grupp 4. Learning studyn bestod således av fyra upprepade cykler. Genom dessa cykler gjordes det möjligt för learning study-gruppen att planera för ingripanden, eller interventioner, i undervisningen. Utifrån analysen av data prövades vad som skulle kunna ses som kritiska aspekter för att utveckla det avsedda lärandet. Genom learning studyn tillhandahölls en struktur för att pröva kritiska aspekter i undervisningen.

Learning study-gruppens erfarenheter dokumenterades och spreds (6) genom en nätsida som tillhandahåller sammanfattningar av erhållna resultat. Inom kommunen spreds dessutom en filmad sammanfattning på intranätet.

5.3.2 URVAL AV DELTAGARE

För att nå intresserade pedagoger skickade jag ut ett informationsblad om syftet med mitt licentiatarbete. Jag hade också flera personliga kontakter med lärare i kommunen för att sprida information om mitt pågående projekt. Det resulterade i att två lärare som arbetade i årskurs 2 respektive 3 anmälde sitt intresse av att, tillsammans med sina klasser, delta i studien. För att kunna utforska lärandeobjektet antog jag och de andra två lärarna att det skulle behövas fler cykler än två. Vi skulle kunna ha löst detta genom att de två lärarna antingen genomförde fler lektioner i sin egen klass eller genom att de undervisade i andra klasser. Av olika anledningar var dessa lösningar inte att föredra. Istället deltog jag själv som undervisande lärare i två av de fyra lektionerna. Två andra lärare godkände att deras elever var med i learning studyn. Därför deltog ytterligare två tredjeklasser där jag själv blev den undervisande läraren. Jag hade dock inte undervisat eller träffat dessa elever tidigare.

Lärarna som deltog i studien hade olika utbildning och erfarenhet. En av lärarna var behörig att undervisa i matematik på lågstadiet och hade arbetat som lärare i ett och ett halvt år. En annan av lärarna var behörig att undervisa i matematik upp till årskurs 9 och hade arbetat som lärare i 19 år. Den tredje läraren hade inte formell behörighet att undervisa i matematik, men var utbildad tidigarelärare och hade arbetat i sex år. Den erfarenhet som gruppen hade av undervisning om negativa tal, var hämtad från kollegor som deltog i den studie som nämndes under 5.2. Lärare i den aktuella kommunen har redovisat erfarenheter från sina genomförda learning studies för varandra, vilket medför att alla lärare i kommunen kan förväntas ha en viss orientering om variationsteorin och learning study. Däremot hade två av dessa tre lärare inte själva deltagit i någon studie tidigare.

5.3.3 BÅDE FORSKNINGSLEDARE OCH LÄRARE

I learning studyn samarbetade jag i rollen som forskningsledare och lärare, tillsammans med två andra lärare. Anledningen till att jag valde att delta som undervisande lärare var att endast två lärare anmälde sitt intresse till att delta i studien. Min roll som forskningsledare innebar att jag förberedde gruppens möten genom att sammanställa vad som skulle diskuteras. Jag lyfte fram aktuella teoretiska begrepp, rättade elevtesten samt tittade igenom de filmade lektionerna. Under mötets gång fördelade jag ordet samt förde anteckningar om vad som diskuterades. Tillsammans studerade gruppen elevtesten för att se vilka olika svar eleverna lämnat. Vi gjorde också en gemensam analys av de filmade lektionerna och förberedde nästkommande lektion.

Att vara både forskningsledare och undervisande lärare kan innebära både för- och nackdelar. Lampert (1990) ser fördelar med att kunskaper som förknippas med forskning å ena sidan och kunskaper som förknippas med praktisk problemlösning i undervisningen å den andra, är integrerade i reflekterade och praktiska handlingar hos en och samma person. Det är först senare som kunskaperna separeras och reds ut i en analys. Kunskaper som används för att analysera lärandet är inte exakt samma kunskaper som behövs för att kunna undervisa (a.a.). Jag känner igen Lamperts resonemang från de lektioner där jag undervisade. När jag genomförde mina lektioner märkte jag hur jag helhjärtat gick in i rollen som lärare, att jag och eleverna kom mycket nära varandra och att jag var tvungen att helt och hållet koncentrera mig på situationen jag befann mig i. Det var också nödvändigt att fatta snabba beslut om hur de uppfattningar som eleverna gav uttryck för skulle kunna lyftas fram i lektionen. Vid analysen efteråt var det möjligt att ta ett steg tillbaka och att fundera över varför jag agerade som jag gjorde. Utifrån den studie som Ball (1993) genomförde med sina egna elever, funderar jag över om det inte kan ses som en fördel att forskning sker i elevers naturliga miljö. De elever som jag undervisade var visserligen inte bekanta med mig innan studien genomfördes, men de befann sig i sitt eget klassrum och hade även sin egen lärare där. Det innebar att den fysiska miljön var välbekant samt att eleverna kunde ställa frågor och söka bekräftelse hos sin lärare under lektionens gång.

Ett problem med att jag som forskningsledare undervisade kan uppstå när data ska analyseras. Det fanns risk för att jag skulle vinkla tolkningen av data och göra välvilliga tolkningar. För att förhålla mig kritisk till min egen insats har kollegorna i learning study-gruppen varit till stor hjälp. Detta märktes särskilt i analysen av lektion 3 eftersom kollegorna då, till skillnad från mig, hade med sig erfarenheter från att ha undervisat om negativa tal. Även i samtal med forskare och andra forskarstudenter har jag utifrån transkripten av lektionerna diskuterat vad som egentligen görs möjligt att urskilja.

I en learning study är det som regel lärarna själva som, utifrån något som identifierats som svårt för eleverna att lära, väljer ut vilket innehåll som studien ska fokusera (Runesson, 2011). I denna studie hade jag som forskningsledare redan i inbjudan till lärarna angett att det övergripande temat skulle vara undervisning om och lärande av negativa tal. Anledningen till detta val är att undervisning om och lärande av negativa tal behöver studeras vidare, vilket motiverats i bakgrundskapitlet. Tillsammans har learning study-gruppen under studiens gång försökt att finna en formulering där lärandeobjektet beskriver vad som behöver urskiljas för att eleverna ska kunna bli bekanta med de negativa talen.

Hur samarbetet ser ut i en learning study-grupp bestående av två lärare samt en lärare som samtidigt är forskningsledare, kan ifrågasättas. Konflikter kan, enligt Adamson och Walker (2011), uppstå mellan lärare och forskare på grund av stora skillnader i kunskaper om den teori som används. Att utveckla teoretiska kunskaper hos samtliga deltagare är därför av stor vikt. Även ämneskunskaperna kan se olika ut i gruppen, vilket i Adamson och Walkers studie visade sig i att lärarna själva inte hade klart för sig vad det innebar att kunna det som skulle läras ut. Samarbetet som beskrivs i Adamson och Walkers studie hindrades av frågor kring hierarki och rollfördelning. Det visade sig genom att deltagaren som egentligen var utsedd till forskningsledare inte fick gehör för sina förslag till förändringar av lektionen. Istället valde lärarna att undervisa såsom de brukade göra (a.a.). Under den learning study som ligger till grund för föreliggande uppsats uppstod inga märkbara konflikter av det slag som beskrivits ovan. De begrepp som används inom variationsteorin och learning study kan, enligt min erfarenhet från tidigare studier, uppfattas som svårbegripliga. Även ämnesinnehållet negativa tal kan ses som en utmaning att undervisa om. Min uppfattning är att vårt samarbete stärktes av att även jag undervisade. Som tidigare nämnts märktes detta bland annat i analysen av lektion 3 då mina kollegor, till skillnad från mig, hade erfarenhet av att undervisa om negativa tal.

5.3.4 LEARNING STUDY-GRUPPENS MÖTEN

Learning study-gruppens möten inleddes med en introduktionsdag i augusti 2013, där jag och kommunens tre andra learning study-handledare föreläste om variationsteorin och learning study. Även andra lärare i kommunen som skulle bedriva studier under hösten deltog i introduktionsdagen. Centrala begrepp som lärandeobjekt, kritiska aspekter samt olika variationsmönster stod i fokus denna dag. Vi resonerade även kring learning study-cykelns olika steg samt gav praktiska exempel från genomförda learning studies. Learning study-gruppen, det vill säga jag och de andra två lärarna, hann också med en första diskussion om vad det egentligen innebär att utvidga elevers taluppfattning från naturliga tal till hela tal. Ytterligare 10 möten genomfördes under höstterminen, varje möte varade i ungefär två timmar. En detaljerad beskrivning av tidpunkter och innehåll i learning studyn finns i Bilaga 1. Inför varje möte hade jag som forskningsledare planerat och strukturerat det innehåll som var aktuellt. Eftersom såväl variationsteorin och learning study som undervisning om negativa tal var nya områden för två av tre lärare, lade jag stor vikt vid en tydlig struktur samt repetition av olika begrepp.

5.3.5 ELEVTESTER

Elevernas förståelse av lärandeobjektet undersöktes både före och efter respektive lektion. Detta skedde med skriftliga för- och eftertest. Dessa test var inte standardiserade utan hade konstruerats i learning study-gruppen med stöd av mina handledare. Eftersom eleverna är unga diskuterades inledningsvis om skriftliga test verkligen var att föredra. Vi provade förtestet på en annan tredjeklass och det visade sig att det skriftliga testet fungerade tillfredsställande. Som beskrivits ovan användes även muntliga intervjuer för att fördjupa förståelsen för hur eleverna resonerade. Eleverna gjorde de skriftliga för- och eftertesten under ledning av respektive klasslärare, i de klasser där jag skulle undervisa ansvarade jag för att testerna genomfördes. Samtliga tester bedömdes först av mig som forskningsledare, sedan diskuterades elevlösningarna under learning study-gruppens möten. Förtesten genomfördes en vecka innan planeringen av lektion 1. Resultatet från samtliga skriftliga förtest låg till grund för planeringen av lektion 1. Eftertesten genomfördes två eller tre dagar efter respektive lektion. Dessa test användes för att få en uppfattning om hur framgångsrik undervisningen varit och för att kunna spåra förändringar i elevernas sätt att se på lärandeobjektet.

För att få en uppfattning om hur testet skulle tas emot av elever i den aktuella åldersgruppen provades det, som tidigare nämnts, ut i en tredjeklass med 17 elever. Efter utprovningen omarbetades uppgift 1d (Bilaga 2) från att innehålla både positiva och negativa tal, till att enbart innehålla negativa tal. Detta gjordes dels för att eleverna i hög utsträckning klarade av att ringa in det största talet, dels för att Ball (1993) pekar på vikten av att kunna jämföra negativa tal. Bokstavsnumreringen på uppgift 3 (Bilaga 2) togs bort eftersom eleverna blandade ihop uppgiftens bokstav med uppgiftens tal.

I det följande beskrivs och motiveras de uppgifter som användes för analys och bedömning inom och/eller efter learning studyn. Elevtestet visas i sin helhet i Bilaga 2.

1. Vilket tal i varje rad har störst värde? (Ringa in ditt svar).

a) $5, 2, 10, 6, 3$
b) $0, -4, 7, -3, -10$
c) $-8, 5, 8, 0, -5$
d) $-9, -1, -6, -2, -5$

Uppgift 1a och 1d bestod av att jämföra fem positiva tal respektive fem negativa tal och i varje grupp ringa in det tal som har störst värde. Detsamma gällde för uppgift 1b och 1c, men där fanns både positiva och negativa tal samt talet 0. Lösningarna på hela uppgift 1 bedömdes utifrån om det största värdet ringats in. Uppgiften formulerades för att pröva om eleverna kunde jämföra heltals värde, vilket utifrån forskningslitteratur (Ball, 1993) anses vara nödvändigt för att kunna upptäcka de negativa talens natur.

2. Skriv det minsta tal du kan komma på!

Uppgift 2 användes för att undersöka huruvida eleverna spontant valde att använda negativa tal för att beskriva det minsta tal de visste. Frågeställningen beaktades i learning study-gruppens analys, däremot togs frågan bort inför den fördjupade analysen på grund av att den kan upplevas vara otydligt formulerad. I elevtesterna finns det exempel på elever som, trots att de använder negativa tal när de besvarar andra uppgifter, väljer att ange noll som det minsta tal de kan komma på. Kanske hade eleven använt negativa tal om frågan varit annorlunda formulerad. Genom uppgiftens formulering kan det vara svårt att få fram vad eleven egentligen behärskar. Talet 0 är minst av de naturliga talen och det kan vara svårt för eleverna att avgöra vilken talmängd som åsyftas.

Syftet med learning studyn var att eleverna skulle bli bekanta med de negativa talen. För att skapa ett behov av att använda dessa tal antogs uppgifter av typen $a - b \neq b - a$ kunna vara av betydelse, vilket prövas i några av deluppgifterna nedan.

3. Räkna ut dessa uppgifter:

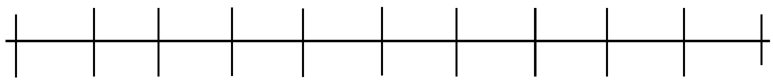
a. $3 - 2 =$_____ b. $2 - 3 =$_____ c. $6 - 4 =$____ d. $4 - 6 =$_____

e. $2 + 2 =$_____ f. $2 - 2 =$____ g. $-2 - 2 =$_____ h. $0 - 3 =$_____

Vi antog att eleverna skulle kunna svara att det inte gick att räkna ut de uppgifter ovan som ger negativ differens. Det skulle också kunna vara så att eleverna behandlade subtraktion kommutativt, det vill säga att termernas ordning inte tillmättes någon betydelse. Uppgifterna 3a-b respektive 3c-d är planerade för att få eleverna att få syn på de negativa talen. Dessa fyra uppgifter har använts i learning study-gruppens analys, medan den fördjupade analysen lyfter fram 3c och d. Även uppgift 3g redovisas i den fördjupade analysen. Det beror på att minuenden i uppgiften är ett negativt tal och det svar som anges på uppgiften kan avslöja huruvida eleverna kan anses ha utvecklat en bekantskap med de negativa talen. Hela uppgift 3 bedömdes utifrån om eleven angett korrekt svar på respektive deluppgift.

Konstruktionen av uppgift 9 utgår från att pröva dels om eleverna kan lösa en subtraktion som ger negativ differens, dels om detta kan göras med stöd av tallinjen.

9. Visa hur du räknar ut 4-7 på tallinjen!



Av Kinard och Kozulin (2012) beskrivs tallinjen som ett av de mest framstående matematikspecifika tankeredskapen. Problemet med den dominerande matematikundervisningen är, enligt författarna, att eleverna uppfattar matematiska tankeredskap som fakta eller innehåll snarare än som redskap för att organisera och konstruera matematisk kunskap och förståelse (a.a.). Eftersom tallinjen i uppgift 9 inte har några tal utskrivna ansågs den utmana elevers kunskaper om tallinjen. Vikten av att kunna se negativa tal både som ordinal- och kardinaltal lyfts fram av Bishop et al. (2014b). Tallinjen antogs av learning study-gruppen kunna erbjuda en struktur både för att se hur talen är ordnade i förhållande till varandra, samt för att kunna se antalsinnebörden. Uppgift 9 bedömdes utifrån om eleven kunnat visa med en sträcka från 4 och sju steg till vänster, samt att tallinjen hade numrerats så att det framgick vilka tal som fanns inom sträckan.

5.3.6 INTERVJUER

Vid två olika tillfällen inom ramen för learning studyn genomfördes intervjuer, nämligen inledande intervjuer samt eftertestintervjuer. Inledande intervjuer genomfördes enskilt med fyra elever i varje klass, totalt 16 elever. Dessa intervjuer genomfördes efter det gemensamma skriftliga förtestet, men före den första lektionen. Syftet var att resultatet av dem skulle kunna förbereda oss på vilka tankar om negativa tal vi kunde mötas av under lektionerna. Den huvudsakliga intervjufrågan handlade om barnens uppfattningar av vilka tal som finns före noll på tallinjen. Eleverna uppmanades under intervjun att skriva ett tal på ett ark papper. Intervjuaren, det vill säga jag, fortsatte med frågor som: *Är det ett stort eller litet tal? Skriv ett mindre tal, sedan ett ännu mindre tal. Skriv det minsta tal du kan! Vilket är det minsta tal som finns? Finns det inget mindre tal än det?* I intervjuerna följdes Doverborg och Pramlings (2012) rekommendationer för barnintervjuer, vilket exempelvis innebar att inte alltid nöja sig med det första svar eleven gav. Följdfrågor som återknyter till vad eleven sagt, samt en uppmaning om att berätta mera (a.a.) var rekommendationer som användes i intervjuerna.

Att genomföra eftertestintervjuerna fanns inte med från början i planeringen av learning studyn. När lektion 1 samt de skriftliga eftertesten väl hade genomförts, väcktes funderingar hos mig som forskningsledare om hur vi skulle kunna få fördjupad kunskap om hur eleverna egentligen resonerade kring negativa tal. För att komma åt detta valde jag ut två olika testfrågor som framstod som intressanta för att upptäcka de negativa talen. Uppgift 1a-d som handlar om att avgöra det största värdet av olika tal, valdes ut liksom 3a-h som handlar om att beräkna additions- och subtraktionsuppgifter (se Bilaga 2). Det var också så att eleverna lämnat intressanta svar på dessa uppgifter som verkade indikera vad som kunde vara kritiskt. Exempelvis hade elever svarat att -9 var talet som hade störst värde bland de negativa talen, eller att $4-6=0$ alternativt $4-6=2$. Att subtraktion antogs lyda under kommutativa lagen samt elevernas resonemang kring värdet av olika negativa tal, framstod som intressanta svar. Samtidigt resonerade vi kring varför inte fler elever hade kunnat lösa subtraktioner där två positiva termer gav en negativ differens.

Tanken var att fråga samtliga 19 elever i grupp 1 om en av de två uppgifterna men jag hade på grund av tidsbrist endast möjlighet att intervjua 12 elever. Utifrån vad eleverna hade svarat på det skriftliga eftertestet hade jag delat in klassen i två grupper där den ena gruppen hade lämnat mest intressanta svar på uppgift 1a-d, medan den andra gruppen var intressanta utifrån uppgiften 3a-h. Eleverna fick vid intervjutillfället den aktuella frågan urklippt från elevtestet och ombads av mig att lösa dessa uppgifter och samtidigt prata högt om hur de tänkte. Fyra elever ombads att lösa uppgift 1, medan åtta elever fick lösa uppgift 3. De 12 eftertestintervjuerna visade stor samstämmighet med de skriftliga eftertesten när det gäller vilka svar på uppgifterna som eleverna lämnat på individnivå. Det som tillkom genom eftertestintervjuerna var möjligheten att få reda på hur eleven resonerade sig fram till svaret. Eftersom det visade sig vara intressant att höra hur eleverna hade tänkt när de löste uppgifterna, genomfördes fyra eftertestintervjuer i grupp 2 samt tre i grupp 3. Eftersom värdet av tal inte jämfördes under lektion 1-3, riktades eftertestintervjuerna i grupp 2 och 3 in på enbart uppgift 3a-h. I den fjärde gruppen genomfördes inga eftertestintervjuer, vilket beror på att lösningsfrekvensen på det skriftliga eftertestet var hög. Vissa missuppfattningar som identifierades på eftertestet kunde spåras till uttalanden som gjordes på själva lektionen.

Samtliga 19 eftertestintervjuer spelades in på diktafon. Jag som forskningsledare lyssnade noggrant på intervjuerna samt transkriberade valda delar av dem. De användes sedan som diskussionsunderlag under learning study-gruppens möten i förhållande till vilka aspekter som kunde räknas som kritiska, men även i den fördjupade analysen. Resultatet av eftertestintervjuerna var värdefulla eftersom det gav learning study-gruppen insikt om på vilka olika sätt eleverna kunde resonera exempelvis när en uppgift med negativ differens skulle lösas.

5.3.7 VILLKOR FÖR LEKTIONERNAS GENOMFÖRANDE

Lektionerna genomfördes under hösten 2013 i fyra olika klasser, först i en andraklass sedan i tre tredjeklasser. Samtliga lektioner genomfördes på förmiddagen, lektionslängden varierade mellan 40 och 55 minuter (Figur 7).

Lektion	Årskurs	Antal elever	Datum för genomförande	Lektionstid	Undervisande lärare
1	2	19	27-sep	50 minuter	Klassläraren
2	3	16	22-okt	40 minuter	Klassläraren
3	3	15	20-nov	50 minuter	Jag
4	3	14	27-nov	55 minuter	Jag

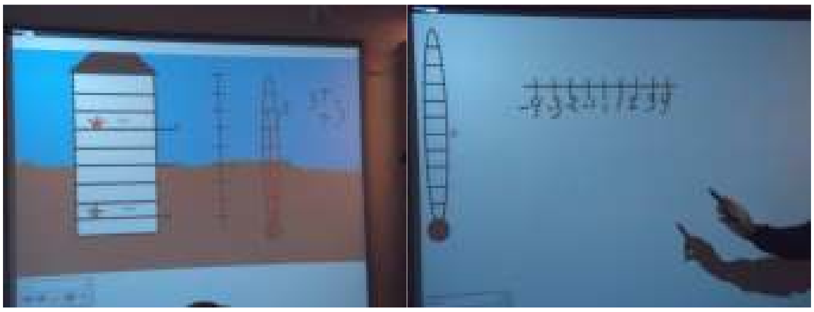
Figur 7. *Villkor för lektionernas genomförande.*

Som framgår av figuren genomfördes de tre första lektionerna med ungefär en månads mellanrum, medan den fjärde lektionen följde tätt efter den tredje. Anledningen till att den fjärde lektionen följde så tätt på den tredje är att learning studyn var tidsbegränsad till en termin. När learning studyn planerades var tanken att endast tre lektioner skulle genomföras, men ganska omgående tillfrågades klassläraren till ytterligare en tredjeklass om eleverna kunde delta i studien. När förtestet och de inledande intervjuerna genomfördes deltog därför elever från samtliga fyra klasser.

Under de två första lektionerna var jag närvarande i klassrummet som observatör och med ansvar för filminspelning samt ljudupptagning med diktafon. Jag deltog inte i diskussioner eller ingrep på något annat sätt. Från min placering längst bak i ena klassrumshörnet skrev jag ner kompletterande anteckningar. Även filminspelningen skedde från det hörn där jag satt, medan diktafonen var placerad längst fram i klassrummet. Anledningen till att två ljudkällor användes var dels en säkerhet i fall någon av dessa skulle sluta fungera, dels en hjälp till att bättre höra vad som diskuterades.

Under de två andra lektionerna undervisade jag själv, medan respektive klasslärare fanns med som trygghet för eleverna. Dessa lärare deltog inte i learning studyn men hade godkänt att eleverna fick vara med. Filminspelning och ljudupptagning sköttes av mig själv, genom att jag startade dessa apparater strax innan lektionen inleddes. Detta medförde att bilden i filminspelningen inte blev särskilt bra, eftersom kameran inte följde det som pågick under lektionen. Däremot blev ljudet bättre, eftersom kameran i dessa båda lektioner placerades längst fram bredvid en elev. Det kan ha påverkat studiens resultat att det var jag själv som undervisade. Eftersom jag hade ett övergripande ansvar för learning studyn och för att denna låg till grund för min licentiatuppsats, var jag mycket angelägen om att undervisningen skulle fungera optimalt. Jag hade dessutom erfarenhet från pilotstudien där jag tillsammans med den tidigare learning study-gruppen analyserat tio olika lektioner.

I samtliga lektioner är det läraren som leder lektionen med hjälp av en smartboard-presentation, där följande tallinjer används: våningshus, lodrät tallinje, lodrät termometer samt en horisontell tallinje (Figur 8 och 9).



Figur 8 och 9. *Olika slags tallinjer som användes under lektion 1-4.*

Samtliga lektioner genomfördes i helklass. Under lektionerna uppmanades eleverna med jämna mellanrum att diskutera en given frågeställning med sin bänkgranne. Detta var dock inte möjligt i samma utsträckning under lektion 4, eftersom eleverna med anledning av pågående nationella prov var placerade cirka en halvmeter ifrån varandra. Detta borde jag ha tänkt på innan lektionen, när sedan lektionen väl genomfördes var jag rädd att elevernas fokus skulle påverkas om bänkarna började flyttas ihop. Som lärare försökte jag hantera detta genom att ge eleverna egen tid att reflektera kring de givna frågeställningarna. Under lektion 1 och 2 genomfördes en skriftlig övning som handlade om temperaturförändringar. Övningen genomfördes först individuellt och sedan gick läraren igenom uppgifterna tillsammans med eleverna.

För att ge en översiktlig bild av undervisningen har lektionen delats in i fem olika lektionsmoment (Figur 10).

Lektionsmoment	Lektion 1	Lektion 2	Lektion 3	Lektion 4
I. Exempel där termerna endast bytt plats ($\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ samt $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$)	-	X	X	X
II. Bild av ett våningshus, placera ut tal vid våningarna.	-	X	X	X
III. Lodrät tallinje, placera ut tal.	X	X	X	X
IV. Bild av en termometer, avläsning samt beräkning av temperaturer	X	X	-	-
V. Horisontell tallinje, beräkning av additioner och subtraktioner	X	X	-	X

Figur 10. *Lektionsmoment under respektive lektion.*

Av figuren framgår att jämförelser av exempel där termerna bytt plats, genomfördes under lektion 2-4. Avseende det andra och tredje momentet bör nämnas att läraren under lektion 1 utifrån samtalet om vad våningarna skulle kunna kallas, placerade våningarnas namn direkt på den lodräta tallinjen och inte på själva våningshuset. I samtliga lektioner arbetade man mer eller mindre med att placera ut tal på den lodräta tallinjen, medan avläsningar och beräkningar på termometern endast användes under lektion 1 och 2. Under lektion 1, 2 och 4 genomfördes i olika utsträckning beräkningar av operationer på en horisontell tallinje.

5.3.8 ANALYS AV DATAMATERIALET

Analysen av datamaterialet har skett i två olika steg. En inledande analys gjordes inom ramen för learning study-gruppens arbete. Därefter genomfördes en fördjupad analys av mig som forskningsledare. Med utgångspunkt i forskningsfrågan om vad elever behöver lära sig för att bli bekanta med de negativa talen, ses begreppen kritiska aspekter och kritiska drag (Marton, Runesson & Tsui, 2004) som centrala analysverktyg. Även begreppen urskiljning, simultanitet och variation (Marton & Pang, 2006), användes som verktyg för analys.

Datamaterial som analyserats

Datamaterialet som ligger till grund för analysen visas i Tabell 1.

Tabell 1. *Sammanställning av data som ligger till grund för analys.*

Typ av data	Förtest	Intervjutranskript	Lektionstranskript	Eftertest	Anteckningar från grupp-möten
Antal	64	-	-	64	-
Antal sidor	-	35	40	-	10

Transkript från de intervjuer som genomfördes innan lektion 1 (Tabell 1), användes som en förberedelse på vilka uppfattningar vi kunde komma att mötas av i undervisningen. Det övriga datamaterialet i tabellen har använts för att identifiera vad som skulle kunna ses som kritiska aspekter, hur dessa skulle kunna göras möjliga att urskilja i undervisningen samt på vilket sätt undervisningen kring dessa aspekter kan ha betydelse för elevernas lärande.

Learning study-gruppens sammanställning och analys av skriftliga tester och intervjuer

Utifrån resultatet av de skriftliga förtesten, lärarnas erfarenhet samt ämnesdidaktisk litteratur diskuterades och formulerades inom ramen för learning studyn en hypotes om lärandeobjektets beskaffenhet. Denna beskrevs i form av förmodade kritiska aspekter, vilka visade vad som behövde urskiljas i undervisningen för att ett lärande skulle kunna möjliggöras. Som forskningsledare hade jag sammanställt elevsvaren på de olika uppgifterna i en Powerpoint-presentation. Respektive lärare studerade också förtesten i sin egen klass och vi tog upp elevlösningar som uppfattades vara intressanta i förhållande till de förmodade kritiska aspekter, som formulerats som utgångspunkt för konstruktionen av elevtestet. Utifrån dessa diskussioner skapades en undervisningsdesign, som användes i learning study-cykelns första lektion.

Intervjuerna, som genomfördes innan den första lektionen, sammanställdes av mig som forskningsledare utifrån vad eleverna exempelvis angett kunde komma före noll. Resultatet från dessa intervjuer användes, som nämnts, som en förberedelse för vilka uppfattningar vi skulle kunna komma att möta i undervisningen. När det gäller de skriftliga eftertesten sammanställdes även resultaten av dessa. Resultaten relaterades till de aspekter som förmodats vara kritiska, samt till lektionens genomförande. Det kunde exempelvis innebära att en aspekt som uppfattades vara kritisk utifrån eftertestet, kunde belysas och kanske fördjupas med hjälp av den filmade lektionen.

Bearbetning och analys av videoinspelade lektioner

Lektionerna filmades med videokamera och ljud togs även upp med hjälp av diktafon. De fyra lektionerna transkriberades av mig efter det att respektive lektion hade genomförts. Transkriberingarna gjordes i ett vanligt Worddokument, där även bilder som belyser vad som hände under lektionen klistrades in. Inom kvalitativ forskning är man, enligt Bryman (2011) ofta intresserad av att uppmärksamma både vad informanterna säger och *hur* detta sägs. I transkriberingarna som ligger till grund för analysen har detta dock inte genomförts fullt ut, eftersom särskilda tonfall och gester inte har beskrivits detaljerat. Däremot har allt som elever eller lärare säger transkriberats, vilket har varit till stor hjälp för att frekvent kunna återgå till materialet. Det är dock inte ordagrant transkriberat eftersom talspråk som förekommit under lektionen formulerats om till skriftspråk. När olika excerpt från lektionstranskripten används i denna uppsats förekommer ibland markeringen: (…) vilket innebär att ett kortare stycke, vanligen ett par rader, från transkriptet har utelämnats. Stycket har utelämnats därför att det inte ansetts ha betydelse för att kunna besvara forskningsfrågan. Markeringen (..) innebär att eleven eller läraren tvekar, tänker efter eller bara är tyst några sekunder.

Som en förberedelse inför learning study-gruppens analys- och planeringsmöte läste jag först själv noggrant igenom respektive lektionstranskript. Frågor som jag ställde till materialet var vad som gjordes möjligt att få syn på i förhållande till de kritiska aspekterna samt vilka kritiska drag som, med hjälp av olika exempel, ställdes mot varandra. I transkriberingen av respektive lektion fogade jag in kommentarer som handlade om vad eleverna gav uttryck för att de urskilde, samt hur läraren och andra elever genom undervisningen bidrog till detta. Därefter analyserade vi den genomförda lektionen med utgångspunkt i den förberedande analys som redan gjorts. Det innebar att lektionssekvenser diskuterades utifrån vilka *exempel* vi planerat att ha med i lektionen samt vilka av dessa som sedan genomfördes. Exemplens utformning relaterades till de kritiska aspekterna samt till begreppen urskiljning, simultanitet och variation (Marton & Pang, 2006). I jämförelsen av olika exempel diskuterades vilka drag som varierade respektive hölls invarianta, samt vilka konsekvenser detta verkade ha för att göra det möjligt att urskilja de kritiska aspekterna. Vad som gjordes möjligt att urskilja samt hur detta skedde utgjorde sedan, tillsammans med elevtester och eftertestintervjuer, underlag för planeringen av nästa lektion.

Den fördjupade analysen

Det andra steget i analysarbetet genomfördes efter det att learning studyn analyserats och sammanfattats inom learning study-gruppen. Denna analys innebar att jag, utifrån forskningsfrågan, återvände till datamaterialet och genomförde en fördjupad analys. Tidigare hade jag som forskningsledare befunnit mig mitt i studien, nu kunde jag ta ett steg tillbaka och betrakta processen mer distanserat. Jag hade nu större möjlighet att studera datamaterialet ingående och undersöka om det var möjligt att arbeta fram ytterligare preciseringar av de kritiska aspekterna. Även *vad* som ställdes mot *vad* då aspekterna iscensattes under respektive lektion kunde studeras ytterligare. Den fördjupade analysen innehöll således en kritisk tillbakablick på den första analysen genom frågeställningar av typen: Finns det evidens i datamaterialet för att de kritiska aspekterna verkligen har identifierats, eller är det något annat som kan vara kritiskt? Görs det som learning study-gruppen antar är kritiskt, möjligt att lära under lektionen? Med hjälp av vilka jämförelser görs detta?

Utgångspunkterna för de båda analyserna skiljer sig åt. De aspekter som hanterades under den fördjupade analysen hade redan prövats i undervisningen, vilket innebar att det innehåll som skulle analyseras var bekant för mig. En stor skillnad var också att jag i den fördjupade analysen hade mer tid till förfogande. Det första analysarbetet begränsades ibland av att learning study-gruppens möten låg relativt nära varandra i tid. Det innebar att jag inte hade obegränsat med tid till att förbereda mig på vad som kunde vara av värde att lyfta fram i analysen.

5.4 TROVÄRDIGHET OCH GENERALISERBARHET

Att ställa kritiska frågor och reflektera över kvalitetsaspekter är nödvändigt i all forskning (Larsson, 2005). Larsson beskriver trovärdighet i termer av *perspektivmedvetenhet*. Han pekar på vikten av att de antaganden som arbetet utgår ifrån konsekvent tillämpas i analysarbetet för att läsaren ska förstå hur resultatet är konstruerat (a.a.). Det teoretiska ramverket i detta arbete utgår ifrån att lärares undervisning har betydelse för elevernas lärande (Marton, 2006; Nuthall, 2004; Runesson, 1999). Utifrån Larsson (a.a.) gäller det då att vara medveten om vilka möjligheter, men också begränsningar som detta perspektiv medför. Det finns en risk för att det som är fokus för min uppmärksamhet överbetonas, eftersom andra delar av verkligheten hamnar utanför fokus. I det variationsteoretiska antagande som uppsatsen utgår ifrån, är undervisningens fokus att göra det möjligt för eleverna att urskilja kritiska aspekter av det som ska läras. Det skulle kunna hända att detta leder till att jag överbetonar detta och underskattar andra faktorer som kan ha betydelse för lärandet. I den komplexa skolmiljön finns mängder av andra faktorer som kan ha betydelse för lärande och undervisning, vilket inte heller förnekas av variationsteoretiska företrädare (Marton, 2015).

Variationsteoretiska begrepp gör det möjligt att analysera undervisning och lärande i jämförbara, eller kommensurabla, termer (Kullberg, 2010). Det innebär att samma teoretiska redskap används dels vid planering och analys av ett lektionsinnehåll, dels vid beskrivning av hur detta innehåll hanteras av läraren och uppfattas av eleverna. Men en risk med att använda samma teoretiska redskap för design och analys skulle kunna vara att analysen följer designen istället för att följa data (a.a.). I detta fall finns det risk för en slags bias, genom att jag som forskare endast ser det jag vill se. Om jag har planerat och ansträngt mig för att eleverna skall lära sig, kan risken vara stor att förändringar tolkas välvilligt. När för- och eftertest jämförs och analyseras i relation till den genomförda lektionen kanske alla förbättringar anses bero på undervisningens iscensättande. Det finns dock exempel inom learning studyn där learning study-gruppen utifrån hur undervisningen genomfördes förväntade sig ett bättre resultat på eftertestet än som var fallet. Det finns även exempel där resultatet på eftertestet var bättre än vad lärargruppen utifrån undervisningens genomförande hade väntat sig. För att hantera risken för bias var den fördjupade analysen betydelsefull, eftersom jag då hade möjlighet att re-analysera hela datamaterialet.

En problematisk punkt i specificeringsprocessen är alla vägval som görs. Den iterativitet som kännetecknar learning study-cykeln förutsätter att learning study-gruppen måste fatta många beslut. Frågan på vilka grunder ändringar i designen sker är av betydelse. Kullberg (2010) lyfter fram att slutsatserna om vilken roll de kritiska aspekterna har spelat för elevernas lärande alltid kan diskuteras och ifrågasättas. Kanske kan elevernas framgångar under lektionerna förklaras på annat sätt, eller kan kanske data från exempelvis test och lektioner tolkas annorlunda (a.a.).

Även frågan om elevtestens roll är viktig att ventilera när det gäller begreppet trovärdighet. Ett grundläggande problem är att de kritiska aspekter som testet avser att undersöka inte har identifieras empiriskt förrän i slutet av learning studyn. Det innebär att begreppet negativa tal tillsammans med vad learning study-gruppen utifrån litteratur och egen erfarenhet har identifierat som kritiskt, är det som undersöks genom testet. Testerna kan inte heller anses fånga upp allt det som händer under en lektion. Kanske är det så att eleverna lär sig något annat än just det som undersöks på testet. Vid konstruktionen av elevtestet har learning study-gruppen fått stöd av externa forskare som granskat och föreslagit omformuleringar, vilket påverkat kvalitén på testuppgifterna. Testet har, som nämnts, även provats ut av en tredjeklass som inte deltog i learning studyn. Vissa förändringar, som framförallt ansågs öka elevernas förståelse av vad som efterfrågades i uppgifterna, genomfördes.

Frågan om huruvida resultat från kvalitativa studier kan generaliseras undviks ofta enligt Larsson (2009). Med få undantag har kvalitativa studier svårt att undvika generaliseringsanspråk och det finns en risk för att forskare inte blir tagna på allvar om inte frågan diskuteras (a.a.). En kvalitativ studie kan ge ett kunskapstillskott genom själva gestaltningen, eftersom en väl genomförd analys kan resultera i ett nytt sätt att se på verkligheten (Larsson, 2005). En typ av generalisering som uttrycks av Larsson och som kan sägas gälla för detta arbete är begreppet *heuristisk kvalitet*. Det handlar om i vilken utsträckning läsaren av en studie kan övertygas om att se någon del av verkligheten på ett nytt sätt. En lyckad analys kan på så sätt medföra att resultatet används av exempelvis lärare i sitt sätt att tänka (a.a.). Att kunskapsprodukter från learning studies kan användas och utvecklas i andra sammanhang och av andra lärare har tidigare visats (t.ex. Runesson & Gustafsson, 2012). Dessa kunskapsprodukter har inte kopierats rakt av utan har anpassats till den nya kontexten. Även Carlgren (2012) stämmer in i argumentet att arbetet med att identifiera och att iscensätta kritiska aspekter inte kan lyftas ur sitt sammanhang, utan måste anpassas till respektive kontext. Kunskapen som här avses genereras i dynamiska, tolkande och meningsskapande praktiker och avses också att användas i andra sådana praktiker (a.a.).

5.5 ETISKA ÖVERVÄGANDEN

De etiska frågeställningarna i föreliggande uppsats betraktas utifrån såväl de deltagande lärarnas som de deltagande elevernas perspektiv.

Informationskravet (Vetenskapsrådet, 2011) uppfylldes gentemot lärarna genom att jag redogjorde för licentiatuppsatsens syfte i ett inbjudningsbrev, men också när learning study-gruppen hade sitt första möte. Det finns dock en gräns för hur mycket information som är möjlig att ge. Jag försökte att vara tydlig med mina forskningssyften men också med vad learning study, variationsteorin samt den avgränsade behandlingen av innehållet skulle kunna erbjuda lärarna ur ett fortbildningsperspektiv.

Information till elever och föräldrar om learning study-arbetet och min uppsats skickades genom klassläraren hem till föräldrarna (Bilaga 3). I enlighet med samtyckeskravet (Vetenskapsrådet, 2011) upplyste jag i brevet föräldrarna om att deltagandet var frivilligt. Eftersom eleverna är minderåriga ombads föräldrarna kryssa i om de samtyckte till att deras barn deltog i det beskrivna projektet. Underskrift krävdes också av föräldrarna. Vad gäller konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (a.a.) fick föräldrarna möjlighet att ge sitt tillstånd till hur de inspelade lektionerna fick användas. De kunde kryssa i antingen att inspelningarna enbart fick användas för licentiatuppsatsens syfte, eller att de också kunde få användas i framtida utbildning och forskning kring learning study.

För att försvåra en identifiering av elever som deltar i studien har alla namn ändrats, det är till och med så att vissa pojkar har fått flicknamn och vice versa. Anledningen till detta är att elevgrupperna är så pass små, från 14 till 19 elever, att det skulle kunna vara möjligt att identifiera vem det är som uttalar sig. Det kan även ses som ett etiskt dilemma att lärarna i studien kan känna igen sig själva och varandra. Frågan är om det går att undvika i ett learning study-arbete. Visserligen kunde fler lärare ha ingått i learning study-gruppen, med eftersom lektionerna är så noggrant beskrivna så hade deltagarna nog kunnat känna igen varandra ändå. I learning studyn betonades gruppens gemensamma ansvar för planering och genomförande av lektioner. Det var därför inte den enskilda lärarens prestation som var i fokus, utan lärandeobjektet i den gemensamt planerade lektionen.

6. RESULTAT

Resultatet av de båda analyserna medförde att de kritiska aspekterna omformulerades och preciserades. Vad, i lektioner, tester och intervjuer, som antogs ligga till grund för det som ansågs vara kritiskt beskrivs i detta kapitel. Om och i så fall hur exemplen genomfördes och uppfattades av eleverna är av betydelse. Likaså vilka metaforer och/eller representationer som har använts och hur dessa har använts. Varje presentation avslutas med en sammanfattning av hur respektive aspekt har preciserats under forskningsprocessens gång.

6.1 OMFORMULERING AV FÖRMODADE KRITISKA ASPEKTER

Inom learning studyn identifierades och formulerades inledningsvis ett antal förmodade kritiska aspekter. Dessa aspekter låg till grund för konstruktionen av för- och eftertest, liksom för genomförandet av lektion 1. När vi analyserade de förmodade kritiska aspekterna i ljuset av den genomförda lektionen, kom aspekterna att omformuleras i väsentlig omfattning. Därav följde att lektion 2-4 grundades på delvis nya och mer preciserade kritiska aspekter.

Vårt lärandeobjekt formulerades som: ”Att förstå att de negativa talen existerar, genom att inse att subtraktion av två positiva heltal kan ge negativ differens”. De aspekter som låg till grund för undervisningen i lektion 1 omformulerades, utifrån learning study-gruppens diskussioner, på följande sätt:

> 1. Att urskilja tals värde inom talområdet -10 till 10, omformulerades till: *Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal.*
>
> 2. Att urskilja riktningen för subtraktion på tallinjen, omformulerades till: *Att urskilja att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen.*
>
> 3. Att urskilja tecken för negativt tal samt tecken som indikerar subtraktion samt Att urskilja att negativa tal alltid har ett synligt tecken, omformulerades till: *Att urskilja tal både som platser och avstånd på tallinjen.*

Under analysen av lektion 1, utrycktes i learning study-gruppen en viss skepsis till att elever i årskurs 2 och 3 skulle kunna förstå att -5 både kan ses som mer och som mindre än -1 (se Ball, 1993). Vi enades dock om att försöka genomföra jämförelser av tal med en medveten variation (-2 och $2, -3$ och 2 samt -4 och -2). För att flytta fokus från talområde till jämförelse av tals specifika värde omformulerades den första förmodade kritiska aspekten: ”Att urskilja tals värde inom talområdet -10 till 10”, till: ”Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal”.

Vid learning study-gruppens granskning av genomförda exempel på operationer, fann vi att ju mer som hölls invariant mellan exemplen desto enklare verkade det vara för eleverna att få syn på vad som varierade. Detta väckte tanken att exempel som visar när kommutativitet gäller kan medföra att variationen begränsas och samtidigt bidra till att elever upptäcker ett behov av negativa tal. Hos Kullberg (2010) och Kilhamn (2011) fann vi dessutom stöd för att en tillämpning av kommutativa lagen vid subtraktion kan vara ett hinder för lärande av negativa tal. Diskussionen handlade därför om exempel av typen: $a + b = b + a$ samt $a - b \neq b - a$. Åsikter uttrycktes om att de två additionsexemplen troligen var alldeles för enkla, samt att eleverna kanske spontant använde sina kunskaper om additioner i mötet med de två subtraktionsexemplen. Egentligen var det enbart det fjärde exemplet, dvs. $2 - 3$, som sågs som nödvändigt för att kunna få syn på de negativa talen. Det fortsatta samtalet handlade om huruvida de tre första exemplen skulle underlätta en lösning av det fjärde exemplet, eller om de istället skulle stjäla uppmärksamhet från det exempel som verkligen var betydelsefullt. Learning study-gruppen beslutade sig dock för att prova att använda exempel av den typ som beskrivits ovan. För att fokusera huruvida den kommutativa lagen kan användas i addition och subtraktion omformulerades den andra förmodade kritiska aspekten: ”Att urskilja riktningen för subtraktion på tallinjen” till: ”Att urskilja att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen”.

När learning study-gruppen analyserade lektion 1 fann vi att våningshuset och termometern som metaforer för hela tal kunde medverka till att eleverna fick syn på de negativa talen. Men eftersom eleverna upplevde att de begrepp som relaterar till termometern var svåra att förstå, diskuterade learning study-gruppen ett minskat fokus på termometern som metafor. Vi koncentrerade oss därför på att utveckla möjligheten att urskilja negativa tal med hjälp av våningshuset. Under lektionen iakttogs dock svårigheter med att synliggöra minustecknets olika innebörder med stöd av våningshuset. Med inspiration från Lakoffs och Núñez (Lakoff & Núñez, 2000) teori om metaforer, planerade vi därför att använda tallinjen som en slags väg med olika platser och avstånd. Denna struktur antogs stödja både lärare och elever i att, genom subtraktioner förbi noll, få syn på de negativa talen. Learning study-gruppen antog att ett flexibelt användande av tal som plats och tal som avstånd kunde vara kritiskt för att få syn på de negativa talen. Av den anledningen omformulerades den tredje och fjärde förmodade kritisk aspekten: ”Att urskilja tecken för negativt tal samt tecken som indikerar subtraktion” och ”Att urskilja att negativa tal alltid har ett synligt tecken” till: ”Att urskilja tal både som platser och avstånd på tallinjen”. Fokus låg dock fortfarande på att synliggöra skillnaden mellan tecknet för ett negativt tal och subtraktionstecknet. Den nya formuleringen ansågs ge en struktur för hur detta skulle kunna ske.

6.2 ATT URSKILJA NEGATIVA TALS VÄRDE I FÖRHÅLLANDE TILL ANDRA HELTAL

För att göra det möjligt att få syn på den första kritiska aspekten, dvs att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal, har den horisontella tallinjen använts som representation av tal under lektion 1, 2 och 4. Under lektion 3 behandlades inte den första kritiska aspekten.

Jämförelse mellan tal

Den första kritiska aspekten handlar om: ”Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal”. Undervisningen tog sin utgångspunkt i en jämförelse av positiva och negativa heltal. Figur 11 visar planerade exempel (P) som skulle kunna lyftas fram, samt vilka exempel som genomfördes (G) i de olika lektionerna.

Tal som jämförs	Lektion 1		Lektion 2		Lektion 3		Lektion 4	
	P	G	P	G	P	G	P	G
-2 och 2	X	X	X	X	X	-	X	X
-3 och 2	-	-	X	-	X	-	X	X
-4 och -2	-	-	X	-	X	-	X	-
-3 och -2	-	-	-	-	-	-	-	X

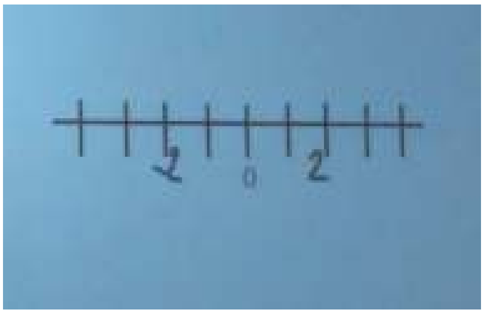
Figur 11. *De tal som planerades respektive genomfördes under lektion 1-4.*

Som framgår av figuren genomfördes inga jämförelser av tal alls under lektion 3, medan talen 2 och -2 jämfördes under lektion 1 och 2 (Figur 11). Under lektion 4 genomfördes två jämförelser mellan ett positivt och ett negativt tal, samt en jämförelse mellan två negativa tal. Som framgår av figuren genomfördes under lektion 4 en jämförelse av två negativa tal som inte fanns med i lektionsplaneringen.

I det följande beskrivs skillnader mellan lektionerna beträffande hur dessa jämförelser genomfördes. Anledningen till att vissa jämförelser, trots att de planerades, inte behandlades i olika lektioner presenteras i samband med resultaten för varje genomförd lektion. I presentationen av resultaten kommer även andra sekvenser än vad som anges i Figur 11 att tas upp, eftersom dessa sekvenser kan vara avgörande för vilka aspekter eleverna hade möjlighet att urskilja.

Lektion 1

Under lektion 1 genomfördes en jämförelse mellan talen -2 och 2 (Figur 12).



Figur 12. *Jämförelse av talen -2 och 2 med hjälp av en horisontell tallinje under lektion 1.*

Denna jämförelse beskrivs i Excerpt A. Siffran 2 hålls konstant medan tecknet framför siffran varierar.

Läraren suddar ut alla tal på den horisontella tallinjen förutom
-2 *och* 2.
[1] L: Ser ni det, vad är det för skillnad på de här talen?
[2] Ann: På den sidan är det ett minustecken.

[3] L: En av dem har ett minustecken, den där och en har inte det.

Läraren pekar på -2 *respektive* 2.

[4] L: Vad är det för likheter?

[5] Ann: Inga alls. Den som är där är jätteslarvig och den andra är snygg.

[6] L: Ja, det har du rätt i. Men om de vore lika snygga, vad är det för likheter då?

[7] Anton: Båda är tvåa.

[8] L: Ja, båda är tvåor.

(Excerpt A, Lektion 1, Tid: 40:56-41:41)

Genom lärarens frågeställning ([1]) ställs talen -2 och 2 mot varandra. Detta gör det möjligt att urskilja att siffran två kan ha ett minustecken framför sig, eller inget tecken alls (dvs. ett osynligt positivt tecken) eftersom den enda skillnaden är tecknet för talet. Utifrån excerptet ovan framgår att Ann uppmärksammar att -2, till skillnad från 2, har ett minustecken ([2]).

Under samma lektion beräknades differenserna $3-2$ och $3-4$ med hjälp av termometern som metafor för tal. Läraren förklarade att: ”När vi var under jord så gjorde vi på ett visst sätt. Över jord gjorde vi på ett annat sätt. Över nollan skrev vi på ett sätt och under nollan skrev vi på ett annat sätt.” (Excerpt J). När det gäller aspekten om tals värde kan eleverna därför på ett implicit sätt ha uppfattat de negativa talens värde genom deras placering i förhållande till 0.

Lektion 2

Inför lektion 2 diskuterade vi ett ökat fokus på att jämföra tals värde med stöd av tallinjen. Detta medförde att den första kritiska aspekten omformulerades till: ”Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal”. Denna formulering behölls under resterande lektioner. Förutom att jämföra -2 och 2, planerades en jämförelse mellan -3 och 2 samt -4 och -2. Trots detta jämfördes enbart talen -2 och 2 under lektionen eftersom tiden upplevdes som knapp. Inledningsvis diskuterades *skillnader* mellan talen.

[1] L: De som jag har markerat med varsin pil, vad är det för skillnad mellan de talen? *(*-2 *och* 2*)*

[2] Björn: Den ena gråter den andra ler.

[3] L: Kan du förklara det på ett annat sätt kanske?

[4] Björn: Ja, det ena har ett minustecken framför sig och sen det är under noll. Om man hamnar i det här i spel då får man minus 25 eller något. Då måste man plussa på någonting…poäng.

[5] L: I spel säger du?

[6] Björn: Ja data-, tv-spel.

[7] Bosse: Man kan hamna på minus.

[8] Björn: Ja.

[9] L: Oj då. Okej. Har vi fler tankar? …

[10] Beata: Att det som har minus framför är negativt.

[11] L: Vad kallar vi det som inte har något sådant tecken?

[12] Boel: Positivt.
(Excerpt B, Lektion 2, Tid: 20:51-22:22)

Även under lektion 2 ställer läraren -2 och 2 mot varandra genom att fråga efter skillnaden mellan talen ([1]). Detta gör det möjligt att urskilja att siffran två kan ha ett minustecken framför sig, eller inget tecken alls ([4]).

Eleven Björn öppnar upp möjligheter för andra jämförelser, exempelvis beskriver han skillnaden mellan de motsatta talen som att -2 ”gråter” och att 2 ”ler” ([2]). Björn jämför även talens placering i relation till 0 ([4]), samt en matematisk respektive en vardaglig beskrivning av var negativa tal kan förekomma ([4-6]). Orden *negativt* och *positivt* nämns som namn på de olika talen ([10], [12]). Dessa förslag på jämförelser lyfts inte explicit fram av läraren och relateras inte heller till tals olika värden. Detta medför att tals olika värden inte görs möjligt att urskilja.

I excerptet nedan visas diskussioner kring *likheter* mellan talen.

[1] L: Vad har vi för likheter mellan de här? *(-2 och 2)*
[2] Björn: Båda är en tvåa.
[3] L: Absolut. Har vi fler likheter?
[4] Benny: Båda ser ut på samma sätt, förutom minustecknet.
[5] L: Mm. Har vi fler, ännu fler?
[6] Beatrice: Båda har en pil under sig.
[7] L: Ja, det har de ju.
[8] L: Om ni tittar på nollan. Hur många steg ska vi gå för att komma till den tvåan (-2)? Hur mycket förflyttar vi oss? Hur många steg?
[9] Björn: Två.
[10] L: Om vi ska till den tvåan (2), hur många steg får vi förflytta oss från noll då?
[11] Benjamin: Två också
(Excerpt C, Lektion 2, Tid: 22:22-24:00)

Genom att läraren frågar hur många steg på tallinjen det är från 0 till -2 respektive 2 ([8], [10]), jämförs den negativa och den positiva tvåan med avseende på avståndet till noll. Detta gör det möjligt att urskilja att avståndet till 0 är lika stort för talen -2 och 2. Det som kommer fram under lektion 2, men inte under lektion 1, är således talens placering i förhållande till 0. Däremot fokuseras inte talens värde.

Lektion 3

Inför lektion 3 planerades samma jämförelser av tal som i lektion 2, trots detta genomfördes inga jämförelser av tal (Figur 11). Detta moment var planerat att ske mot slutet av lektionen, men det fanns inte tid kvar till detta moment och inte heller till att genomföra beräkningar på den horisontella tallinjen. Orsaken till detta kan vara att eleverna inte accepterade våningshuset som en metafor för tal. De verkade inte betrakta våningshuset som en tallinje vilket skulle kunna bero på att exemplen i början av lektionen ($3 + 1, 1 + 3, 3 - 1$ samt $1 - 3$) kontrollräknades med hjälp av fingrarna.

Lektion 4

Även inför lektion 4 planerades samma jämförelser av tal som för lektion 2 och 3. Under lektion 4 lyftes tre jämförelser fram, istället för -4 och -2 jämfördes talen -3 och -2.

Jämförelse av värdet mellan talen -2 och 2

Lektion 4 skiljer sig åt från övriga lektioner när det gäller jämförelser mellan heltals värden. Det är enbart under lektion 4 som frågan ställs om vilket av talen -2 och 2 som har störst värde:

> [1] L: Hör ni nu har vi en liten grej här som jag undrar och det är: Vilket av de här talen är värt mest? Är det -2 eller är det $+2$? Negativ tvåa eller positiv tvåa? Vad säger Erika?
> [2] Erika: Positiv tvåa.
> [3] L: Den tycker du? Varför tycker du det?
> [4] Erika: Ehh, den är ju minus den är plus. Den är mycket..plus är högre än minus.
> [5] L: Det är helt rätt och det var det jag skulle komma till att den här pilen betyder att man kan fortsätta, men det betyder också att värdet på de här talen stiger ju längre bort man kommer.
> (Excerpt E, Lektion 4, Tid: 36:38-37:42)

Genom att läraren frågar vilket av talen som har störst värde ([1]) ställs talen -2 och 2 mot varandra på ett helt nytt sätt jämfört med tidigare lektioner. Nu räcker det inte med att betrakta talens utseende, utan talens värde fokuseras. Detta gör det möjligt att urskilja att 2 är mer värt än -2. Erika förklarar också att plus är värt mer än minus ([4]). Tidigare under lektionen förklarade eleverna att pilens riktning åt höger på tallinjen betyder att talen aldrig tar slut. Läraren återkommer till pilens betydelse genom att samtidigt använda pilen som indikation på värdeökning och oändlighet ([5]) Detta gör det möjligt att urskilja att talens värde ökar ju längre åt höger på tallinjen man kommer.

Jämförelse av värdet mellan talen -3 och 2

Under lektion 4 jämfördes, till skillnad från övriga lektioner, även talen -3 och 2 på tallinjen. Som tidigare nämnts, förde eleverna in innebörden av tallinjens pil som ett tecken på oändlighet, det vill säga att talen aldrig tar slut. Att pilen indikerar värdeökning och inte enbart oändlighet, fördes in av läraren och visas i följande lektionsutdrag:

> [1] L: Hur kan vi förklara för Ebbe hur han ska tänka? Förklara Emil!
> [2] Emil: Ehh..minus och plus. Plus är högre än minus bla bla.
> [3] L: Vet du vad Ebbe, vi sa att det var någonting med den här pilen. Vad var det med pilen?
> [4] Elin: Och det var min idé.

[5] L: Det var väldigt bra att du tog upp det, Elin. Vad var det med pilen, Emrik?

[6] Emrik: Det blev mer värde desto längre upp man kommer.

[7] L: Ja, desto längre åt det hållet man kommer desto högre blir värdet. Vilken är mest åt det hållet?

Läraren visar åt höger.

[8] L: Av -3 och 2?

[9] Ebbe: 2

[10] L: Ja, bra. 2:an är ju mest åt det hållet och då är ju den störst.

(Excerpt F, Lektion 4, Tid: 39:21-40:08)

När läraren frågar efter pilens betydelse ges eleverna möjlighet att ställa pilens båda innebörder mot varandra ([3]). Emrik lyfter fram just den innebörd som är aktuell i sammanhanget, nämligen att pilen indikerar värdeökning ([6]). Därefter jämförs talen -3 och 2 med varandra ([7], [8]), vilket möjliggör ett urskiljande av negativa tals värde.

Jämförelse av värdet mellan talen -3 och -2

Under lektion 4 jämfördes också, till skillnad från övriga lektioner, två negativa tal (-3 och -2) på tallinjen. Utmaningen ligger i att elevernas kunskaper om tals värde och magnitud från det naturliga talområdet nu inte räcker till, vilket eleven Erik ger exempel på i följande excerpt:

Läraren uppmanar eleverna att jämföra -3 *och* -2.

[1] L: Vilken har högst värde?

[2] Erik: -3

[3] L: -3 har högst värde tycker du? Hur tänker du då Erik?

[4] Elin: För att det är en sån´ siffra.

[5] L: Men heter du Erik? Hur tänker du Erik?

Svårt att höra vad eleven säger.

(Excerpt G, Lektion 4, Tid: 41:13-41:22)

Genom lärarens frågeställning ([1]) ställs värdet av -3 och -2 mot varandra. Detta riktar förmodligen elevernas uppmärksamhet mot talens placering på tallinjen i förhållande till pilens riktning. Trots detta anser Erik att -3 har ett större värde än -2 ([2]). Det verkar som om Erik generaliserar utifrån de naturliga talen genom att enbart beakta storleken på talens siffror. Läraren återknyter till frågan om vad pilen till höger på tallinjen indikerar:

[1] L: Du kanske tänker så som Elin sa? Det är ju jättesmart, men om vi ska tänka på pilen blir det verkligen rätt då?

[2] Elever: Nej.

[3] L: Då blir det knasigt va´, vad säger Erik?

[4] *Eleven säger ingenting.*
[5] L: Jättesmart förslag, men vad säger Emma?
[6] Emma: -2 är närmare åt det hållet.
[7] L: Ja, det är ju det. Det är ju faktiskt det, eller vad säger du Erik?
[8] *Eleven säger ingenting.*
(Excerpt H, Lektion 4, Tid: 41:22-42:02)

Återigen ställs pilens innebörd som indikation på värdeökning och oändlighet mot varandra, genom att läraren refererar till pilens betydelse ([1]). Enligt Emma har talet -2 det största värdet eftersom det är närmare åt höger än -3 ([6]). Däremot verkar Erik fortfarande osäker på vilket tal som har störst värde ([4], [8]).

Resultat på uppgifter i elevtestet som prövar heltals värde

Följande uppgift på elevtestet avsåg att komma åt huruvida eleverna hade urskilt den första kritiska aspekten: ”Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal”.

1. Vilket tal i varje rad har störst värde? (Ringa in ditt svar).

a. $5, 2, 10, 6, 3$
b. $0, -4, 7, -3, -10$
c. $-8, 5, 8, 0, -5$
d. $-9, -1, -6, -2\ -5$

Skillnaden mellan uppgift 1a och 1d är att i uppgift 1a förekommer det enbart positiva tal, medan det i 1d enbart förekommer negativa tal. Resultaten visar att samtliga elever kan jämföra positiva tal med varandra och identifiera det största värdet. Att jämföra negativa tal med varandra visade sig vara betydligt svårare. I såväl uppgift 1b som 1c finns både positiva och negativa tal samt talet 0. Eftersom dessa uppgifter har samma karaktär redovisas enbart resultaten på uppgift 1b (Tabell 2).

Tabell 2. *Antal elevsvar fördelade på olika svarsalternativ och respektive elevgrupp på uppgift 1b: Vilket tal har störst värde av:* $0, -4, 7, -3, -10$*?*

Grupp/svarsalternativ	1 N=19		2 N=16		3 N=15		4 N=14		Totalt N=64	
	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET
7	13	17	15	15	12	13	13	14	53	59
-10	6	1	1	1	3	2	1	-	11	4
0	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1

FT = förtest,

ET = eftertest

Grupp refererar till de olika lektionerna

Det kan ses som anmärkningsvärt att majoriteten av eleverna (53 av 64) redan innan lektionen genomfördes kunde avgöra att 7 har ett större värde än -10 (Tabell 2). Eleverna verkar ge uttryck för någon slags idé om att positiva och negativa tal skiljer sig åt. Som framgår av tabellen finns det dock en del elever som ringar in -10 som största värde. Jämförelsevis är det störst antal elever i grupp 1 som anser att -10 har störst värde, i eftertestet är det dock endast en elev i gruppen som anger detta svar.

Däremot när enbart negativa tal förekommer (Tabell 3) är antalet elever som kan jämföra dessa lågt både i för- och eftertest. Majoriteten av eleverna anger att -9 har det största värdet och få elever ringar in andra tal.

Tabell 3. *Antal elevsvar fördelade på olika svarsalternativ och respektive elevgrupp på uppgiften: Vilket tal har störst värde av:* $-1, -9, -6, -2, -5$*?*

Grupp/svarsalternativ	1 N=19		2 N=16		3 N=15		4 N=14		Totalt N=64	
	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET
-1	-	4	7	7	4	6	3	10	14	27
-9	17	14	9	9	10	9	11	3	47	35
-6	1	-	-	-	1	-	-	1	2	1
-5	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-
Inget svar	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1

FT = förtest,
ET = eftertest
Grupp refererar till de olika lektionerna

Antalet korrekta lösningar ökar något i grupp 1 och 3 (Tabell 3). Av eleverna i grupp 2 klarade knappt hälften av eleverna att avgöra vilket tal som var värt mest innan lektionen genomfördes. Eftertesten i grupp 2 visar dock ingen ökning, antalet korrekta lösningar är oförändrad mellan för- och eftertestet. Värt att notera är att på eftertestet kvarstår uppfattningen att -9 är mer värt än -1 hos drygt hälften av eleverna (35 av 64). Ett undantag är grupp 4 som i eftertestet kan jämföra negativa tals värde i högre grad än de andra grupperna. I grupp 4 är det 10 av 14 elever som efter lektionen kan avgöra att -1 har det största värdet (Tabell 3).

Jämförelse mellan lektionernas genomförande och resultatet på elevtestet

När det gäller kritisk aspekt 1: ”Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal”, framkommer stora skillnader mellan hur undervisningen genomfördes under de olika lektionerna, vilket också återspeglas i resultatet på elevtesterna. Figur 13 visar vilka mönster av variation som respektive exempel skapar och vilka aspekter som fokuseras samt vad som därmed gjordes möjligt att urskilja i lektion 1, 2 och 4. Det som varierar och det som är invariant ses i exempel A inom samma exempel medan det i B och C ses i relation till det föregående exemplet.

Tal som jämfördes	Mönster av variation	Fokuserade aspekter	Möjligt att urskilja	Lektion
A. -2 och 2	Invariant: siffran 2 Varierar: tecknet framför siffran	Minustecknet	Minustecknet	1, 2, 4
		Avståndet till 0	Avståndet till 0	2, 4
		Talens värde	Talens värde	4
B. -3 och 2	Invariant: det positiva talet Varierar: det negativa talet	Värdeökning	Negativa tals värde i relation till positiva tals värde	4
C. -3 och -2	Invariant: ett av de negativa talen Varierar: det andra negativa talet, tecknet framför siffran	Värdeökning	Ett negativt tals värde i relation till ett annat negativt tals värde	4

Figur 13. *Mönster av variation, fokuserade aspekter samt vad som gjordes möjligt att urskilja under lektion 1, 2 och 4.*

Vad som görs möjligt att urskilja under respektive lektion har att göra med vilka mönster av variation som lyfts fram under lektionen, men även med vilken aspekt som läraren fokuserar (Figur 13). I exempel A är variationsmönstret i de olika lektionerna likadant: siffran 2 hålls invariant medan tecknet framför siffran varierar. Däremot är de fokuserade aspekterna olika, vilket påverkar vad som görs möjligt att urskilja. Genom att siffran hölls invariant medan tecknet framför siffran varierade (Figur 13), gjordes det möjligt att urskilja att siffran 2 kan ha ett minustecken framför sig, eller inget tecken alls. Under lektion 2 och 4 gjordes det dessutom möjligt att urskilja att avståndet till noll är lika stort för de båda talen. Att urskilja tals värde uttrycks explicit i formuleringen av den aktuella kritiska aspekten: "Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal". Trots detta lyftes inte talens värde fram under lektion 1 och 2, utan först under lektion 4. Detta kan beskrivas som en stor skillnad med avseende på hur undervisningen genomfördes, eftersom tals värde därmed endast gjordes möjligt att urskilja under lektion 4.

I exempel B bibehålls det positiva talet från föregående exempel, medan -3 används för att utmana elevernas föreställningar om naturliga tal. Det positiva talet ses därför som invariant medan det negativa talet varierar i jämförelse med det negativa talet i exempel A. Eftersom värdeökning är en aspekt som fokuseras under lektion 4 ges eleverna möjlighet att urskilja negativa tals värde i relation till positiva tals värde. I exempel C bibehålls det negativa talet från föregående exempel, medan -2 används för att utmana elevernas föreställningar om de negativa talens värde. Som framgår av figuren betraktas -3 som invariant medan det negativa talet varierar i jämförelse med det negativa talet i exempel B. Även när det gäller exempel C fokuseras värdeökning under lektion 4 vilket medför att ett negativt tals värde i förhållande till ett annat negativt tals värde görs möjligt att urskilja.

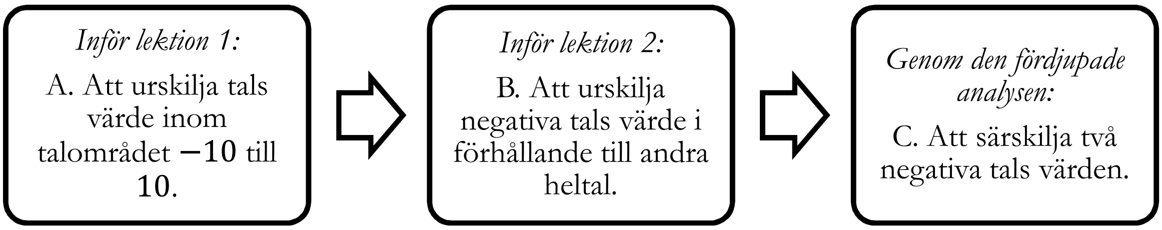
I början av lektion 4 berättade eleverna att pilen till höger på tallinjen indikerar att talen fortsätter i oändlighet. Läraren utmanade denna uppfattning, genom att ställa den mot uppfattningen att pilen på tallinjen också indikerar värdeökning. Att pilen på tallinjen indikerar oändlighet verkade vara en uppfattning som eleverna bar med sig från tidigare undervisning.

Samtliga jämförelser av tal som skedde under lektion 4 kopplades till att pilen indikerar värdeökning. Utifrån exempel A-C som visas i Figur 13 görs det under lektion 4 möjligt att urskilja pilen som en indikator på att talen ökar i värde ju längre till höger på tallinjen de är placerade.

"Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal" antogs av learning study-gruppen vara en kritisk aspekt för att elever i årskurs 2 och 3 ska kunna upptäcka de negativa talen. Utifrån resultatet på elevernas förtest verkade det dock inte vara jämförelsen mellan positiva och negativa tal som är kritiskt, eftersom 53 av de 64 eleverna redan på förtestet kunde avgöra att 7 har ett större värde än -10. På eftertestet ökade dessutom svarsfrekvensen från 53 till 59 (Tabell 2). Det innebär att trots att inga jämförelser mellan positiva och negativa tal på tallinjen förekom under lektion 1-3, klarade eleverna i hög utsträckning att besvara motsvarande uppgifter på elevtesten. Detta kan ha berott på att eleverna har uppfattat talens placering i förhållande till 0 i arbetet med genomförandet av olika subtraktioner. Det verkade däremot vara betydligt svårare att jämföra negativa tals värde, vilket visade sig i att endast 14 av 64 elever på förtestet kunde avgöra att -1 har ett större värde än -9 (Tabell 3). Det kan ses som anmärkningsvärt att det ändå var ett antal elever som kunde jämföra negativa tals värde, eftersom inte heller dessa jämfördes under lektion 1-3. Även här kan det vara så att eleverna har uppfattat talens placering i förhållande till 0 i arbetet med att genomföra olika subtraktioner. Tilläggas bör att hälften av de elever som angett -1 som största värde har blivit undervisade om negativa tal vid ett tidigare tillfälle. På eftertestet klarade knappt hälften av samtliga elever att avgöra vilket det största negativa värdet är. Det medför att man kan anta att jämförelsen av negativa tal kan vara kritiskt. När det gäller den kritiska aspekten: "Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal", verkar det istället vara förmågan att kunna jämföra två *negativa* tals värden som är avgörande för att förstå de negativa talens egenskaper.

Omformulering och precisering av den första kritiska aspekten

Learning study-gruppens analys- och planeringsmöten resulterade i två formuleringar kring vad som skulle kunna vara kritiskt när det gäller att urskilja tals värden (Figur 14 A och B). I den fördjupade analys som genomfördes efter avslutad learning study, preciserades den kritiska aspekten ytterligare (Figur 14 C).



Figur 14. *Omformulering och precisering av den första kritiska aspekten samt när respektive aspekt formulerades.*

Redan inför testkonstruktionen och planeringen av lektion 1 antog vi att jämförelsen av värdet mellan olika tal var betydelsefullt för att förstå de negativa talens natur. Därför formulerades inledningsvis den förmodade kritiska aspekten: ”Att urskilja tals värde inom talområdet -10 till 10” (Figur 14 A). Fokus kom dock att hamna på vilket talområde som var lämpligt för eleverna att hantera, vilket gjorde att frågan om tals värde hamnade i bakgrunden. För att flytta fokus från själva talområdet till jämförelser av tals specifika värde omformulerades den förmodade kritiska aspekten inför lektion 2 till: ”Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal” (Figur 14 B). Denna formulering bibehölls som en kritisk aspekt under lektion 2-4.

Trots att formulering och omformulering av den första kritiska aspekten har behållit fokus på tals olika värden, gjordes som tidigare nämnts, inga sådana jämförelser alls förrän under den fjärde lektionen (Excerpt E-H). Då ställdes dessutom två olika innebörder av pilen till höger på tallinjen mot varandra, nämligen som tecken på oändlighet respektive värdeökning (Excerpt E, F, H). Under lektion 1 och 2 gavs möjlighet att urskilja att enbart det ena talet har ett tecken, under lektion 2 och 4 riktades dessutom elevernas uppmärksamhet mot att avståndet till 0 är lika stort. Det sätt som den första kritiska aspekten hanterades på i lektion 4 skiljer sig åt i jämförelse med övriga lektioner. Kanske kan man säga att under lektion 1 och 2 gjordes mer ytliga egenskaper hos de olika talen möjliga att urskilja eftersom både positiva och negativa tal fokuserades, medan det i lektion 4 kom att handla om djupare egenskaper eftersom negativa tals värde specifikt fokuserades. Med ytliga egenskaper avses exempelvis att siffrorna är likadana (-2 och 2) samt att det ena talet har ett minustecken framför sig. Med djupare egenskaper avses talens placering i förhållande till 0 på tallinjen samt tals olika värden.

Det skulle också kunna uttryckas som att vi under lektion 1 och 2 stannade kvar vid en ganska generell jämförelse av talen. Det gjordes möjligt för eleverna att se att något var annorlunda och att något var lika mellan talen. Under lektion 4 däremot jämfördes talen utifrån värdeökningspilen på tallinjen. Det första exemplet (-2 och 2) underlättade förmodligen elevernas möjligheter att få syn på värdet av talen i nästkommande exempel (-3 och 2) samt (-3 och -2). De jämförelser som skedde har betraktats vara av något olika natur. Jämförelserna under lektion 1 och 2 har tolkats handla mer om att *urskilja* att något är annorlunda mellan talen i exemplet, medan jämförelserna under lektion 4 har tolkats handla om att verkligen *särskilja* det ena talets värde från det andra.

I den fördjupade analysen preciserades således den kritiska aspekten ytterligare. Den slutsats som kan dras är att det framförallt är förmågan att kunna särskilja värdet av två olika negativa heltal som verkar vara betydelsefullt för att kunna få syn på de negativa talen (Excerpt H och Tabell 3). Av den anledningen preciserades den kritiska aspekten: ”Att urskilja negativa tals värde i förhållande till andra heltal” till: ”Att särskilja två negativa tals värden” (Figur 14 B och C).

6.3 ATT URSKILJA ATT SUBTRAKTION INTE LYDER UNDER DEN KOMMUTATIVA LAGEN

För att göra det möjligt att urskilja den andra kritiska aspekten användes under lektion 2 endast numeriska symboler som representationer för tal. Under lektion 3 användes fingrar samt horisontella tallinjer som representationer för tal.

Jämförelse mellan operationer

Den andra kritiska aspekten som vi identifierade formulerades som: ”Att urskilja att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen”. Undervisningen tog sin utgångspunkt i jämförelser av olika additioner och subtraktioner. Figur 15 ger en bild av vilka jämförelser som planerades (P) respektive genomfördes (G) under de olika lektionerna.

Exempel		Lektion 1		Lektion 2		Lektion 3		Lektion 4	
		P	G	P	G	P	G	P	G
A.	$3+2$	-	-	X	-	-	-	-	-
B.	$2+3$	-	-	X	-	-	-	-	-
C.	$3-2$	X	X	X	X	-	-	-	-
D.	$2-3$	X	-	X	X	-	-	-	-
E.	$3+1$	-	-	-	-	X	X	X	X
F.	$1+3$	-	-	-	-	X	X	X	X
G.	$3-1$	-	-	-	-	X	X	X	X
H.	$1-3$	-	-	-	-	X	X	X	X
I.	$-2+2$	-	-	-	X	-	-	-	-

Figur 15. *Exempel som planerades respektive genomfördes under lektion 1- 4.*

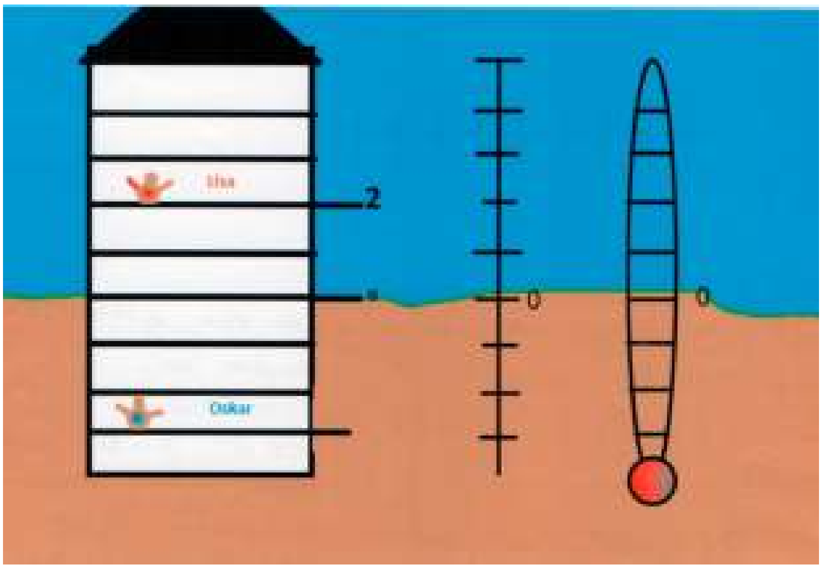
I samtliga exempel som learning study-gruppen planerade att genomföra fanns en potential för urskiljande inbäddad. Just i förhållande till den andra kritiska aspekten innebär det att varje exempel i Figur 15 får betydelse i relation till andra planerade exempel. Inför lektion 1 tänkte sig learning study-gruppen att exemplen $3-2$ och $2-3$ skulle kunna ställas mot varandra för att rikta uppmärksamheten mot att termerna i en subtraktion inte kan hanteras i vilken ordning som helst. Emellertid genomfördes endast det ena exemplet, vilket gjorde att potentialen för urskiljning gick förlorad. Mellan lektion 1 och 2 diskuterade vi att exempel uppbyggda kring den kommutativa lagens giltighet kanske kunde stödja eleverna i att upptäcka de negativa talen. Därför planerades att exempel A-D skulle användas under lektion 2. För att ge möjlighet att få syn på den kommutativa lagens giltighet är de två ingående termerna lika i de fyra exemplen. Vid en jämförelse av A och B kan eleverna lägga märke till att termerna i additionsexemplen har bytt plats, men att detta inte påverkar summan. Vid en jämförelse av exemplen A-C kan eleverna lägga märke till att i additioner förflyttar man sig åt höger på tallinjen, medan man i subtraktioner förflyttar sig åt vänster. Vid en jämförelse av exempel A-D kan eleverna dessutom lägga märke till att i subtraktioner påverkas differensen av termernas placering.

Av Figur 15 framgår att det inför lektion 2 utformades fyra exempel där additioner kunde ställas mot subtraktioner, det var dock endast subtraktionsexemplen som genomfördes. Under lektion 3 genomfördes exakt samma additions- och subtraktionsexempel som under lektion 4.

Lektion 1

Under lektion 1 genomfördes endast det ena av två planerade exempel, vilket gjorde att den planerade potentialen för urskiljning av den andra kritiska aspekten gick förlorad. Det fanns således ingen möjlighet att undersöka vilken betydelse termernas ordning har för subtraktionens differens. Däremot genomfördes tre exempel med syftet att upptäcka negativa tal genom temperaturförändringar. Dessa exempel samt vad som gjordes möjligt att urskilja beskrivs här, eftersom det kan ha betydelse för resultaten på elevtestet.

Exemplen $3+2, 3-2$ samt $3-4$, innehåller en stegvis ökande svårighetsgrad från en enkel addition och subtraktion till en mer utmanande beräkning där differensen är ett negativt tal. Om tallinjen används kan eleverna lägga märke till att en förflyttning sker förbi talet 0. Diskussionen kring $3-4$ utgick från termometern i Figur 16. Våningshuset och den lodräta tallinjen diskuterades tidigare under lektionen.



Figur 16. *Termometern användes för att beräkna* $3 - 4 = -1$.

[1] L: …Vi är på tre grader plus, sedan har vi fyra grader kallare. Var hamnar vi då?

Läraren pekar på 3 på termometern i Bild 3.

[2] Elever: Ehhh??

En elev kommer fram och pekar på ett steg under nollan.

[3] L: Då sätter vi en liten markering där tycker jag. Där hamnar vi då. Vi kan räkna stegen. Vi kan räkna tillsammans nu. Här är vi.

Läraren pekar på tre på termometern. De räknar tillsammans 1, 2, 3, 4, samtidigt som läraren följer med fingret.

…

[4] L: Minus. Och hur skriver man det som en räknehändelse nu då?

[5] Anja: Fyra minus…

[6] L: Var stod vi först och främst?

[7] Arvid: 3.

[8] L: 3 minus fyra är lika med ..vad ska jag skriva där?

[9] Andreas: 1.

[10] L: 1? Förklarar 1, om jag skriver ett där, att vi är under nollan? Eller vad hamnar vi på för tal där egentligen? Om ni tänker på den här tallinjen som vi ritade innan.

(Excerpt I, Lektion 1, Tid: 32:05- 33:45)

Läraren talar om och pekar ut att startpunkten är plus tre grader, eleverna tillfrågas efter slutpunkten ([1]). Flera elever är tveksamma, men en av eleverna går fram till tavlan och pekar ut slutpunkten ([2, 3]). Eleverna ombeds formulera beräkningen på termometern som en räknehändelse ([4]) Det innebär att termometern används som en metafor för tal. Läraren ställer förslaget 1 mot den plats under noll som redan har pekats ut som slutpunkt ([9, 10]). Läraren drar elevernas uppmärksamhet till den lodräta tallinje som tidigare under lektionen gjordes som en modell av vad våningarna i våningshuset kunde kallas ([10]). Diskussionen fortsätter:

[11] Arvid: Man tar $3 -$ eller vänta nu.

[12] Arvid: Då hamnar vi på noll.

[13] L: Hamnar vi på noll då? Nollan är här. Läraren pekar på noll. Jo, nollan är ju där, men vi hamnar där.

Läraren visar var nollan och var -1 *är markerade på termometern.*

[14] L: Tänk på vad vi skrev innan här, när vi gjorde den här tallinjen. När vi gick uppåt eller neråt.

Läraren visar på den lodräta tallinjen.

[15] När vi var under jord så gjorde vi på ett visst sätt. Över jord gjorde vi på ett annat sätt. Över nollan skrev vi på ett sätt och under nollan skrev vi på ett annat sätt.

[16] Anja: Minus.

[17] L: Minus. Har ni hört talas om det i grader? Att det är minus en grad ute?

[18] Elever: Mm.

(Excerpt J, Lektion 1, Tid: 33:46-34:05)

Återigen ställer läraren två tals placeringar mot varandra nämligen talet 0 som står utskrivet (Figur 16), samt platsen för -1 ([13]). Läraren hänvisar tillbaka till arbetet med de tidigare representationerna av tallinjen samt gör tre olika jämförelser av riktningar och placeringar av negativa och positiva tal: neråt ställs mot uppåt ([14]), under jord ställs mot över jord och under nollan ställs mot över nollan ([15]).

Gruppen av exempel: $3 + 2, 3 - 2$ samt $3 - 4$ användes inte för att visa att kommutativitet inte gäller för subtraktion, utan för att eleverna genom temperaturförändring skulle upptäcka de negativa talen. De olika exemplen jämfördes dock inte med varandra utan behandlades var för sig. I undervisningen användes grader på terometrarna som metafor för tal. När en beräkning av respektive exempel skett med hjälp av termometern, uppmanade läraren eleverna att med tal formulera en räknehändelse. Denna räknehändelse skrevs upp på tavlan. Dessutom refererade läraren till de representationer som tidigare använts under lektionen, genom att förklara att de negativa talen är placerade *neråt*, *under jord* samt *under nollan* och att de positiva talen kan beskrivas med motsatt riktning eller placering. Lektion 1 skiljer sig på så vis från övriga lektioner, genom att läraren med flera olika begrepp frekvent och genomgående hänvisade tillbaka till de tidigare metaforerna och/eller representationerna av tallinjen avseende riktning och/eller placering av negativa och positiva tal. Detta skedde inte i lika stor utsträckning i övriga lektioner.

Lektion 2

Under lektion 2 jämfördes differensen av $3-2$ och $2 - 3$, vilket visas i följande lektionsutdrag:

[1] L: Jag skulle vilja veta…

Läraren skriver $3 - 2 =$ *på tavlan.*

[2] L: Vad är det?

[3] Bea: 1.

[4] L: Man har tre och tar bort 2, då får man 1 kvar.
[5] Bea: Mm.
(Excerpt K, Lektion 2, Tid: 00:27-00:40)

Utifrån excerptet framgår att läraren efterfrågar ett korrekt svar, snarare än hur eleverna kommer fram till svaret ([2]). Subtraktionen $2 - 3$ behandlades på följande sätt:

[1] L: Om vi gör så här istället.
Läraren skriver $2 - 3 =$ *på tavlan.*
[2] L: Svara inte med en gång utan prata med kompisen som sitter bredvid. Hur gör man för att räkna ut det här? …L: Vad har ni kommit fram till?
[3] Elevpar 1: 0
[4] L: 0?
[5] Elevpar 2: minus 1.
[6] L: Vad säger nästa par?
[7] Elevpar 3: Ehh..0
Läraren frågar vidare.
[8] Elevpar 4: Minus ett
[9] Elevpar 5: Minus ett.
[10] L: Det var lite olika svar där. …Vad svaret på det där talet blir, det kommer vi att komma tillbaka till..lite senare den här lektionen. Hur man ska tänka, hur man ska räkna här.
(Excerpt L, Lektion 2, Tid: 00:45-02:20)

Även om läraren efterfrågar hur exemplet ska räknas ut så är det elevernas förslag på svar som uppmärksammas ([2-10]). De föreslagna differenserna ställs dock inte mot varandra, inte heller relateras $2 - 3$ till $3 - 2$. Elever bidrar med förslagen 0 ([3-7]) samt -1 ([5], [8], [9]). Läraren konstaterar att eleverna lämnat olika svar samt lovar att återkomma till lösningen längre fram ([10]). Det är endast en representation som används för att lösa de båda exemplen, nämligen beräkningar med hjälp av numeriska symboler.

Mot slutet av lektionen beräknades först $-2 + 2$ sedan $2 - 3$ på en horisontell tallinje, men inte heller då jämfördes exemplen med varandra. Två andra exempel, $2 - 4$ samt $-2 - 4$, räknades också ut på tallinjen. Vad som då gjordes möjligt att urskilja beskrivs under avsnitt 6.4.

Utifrån den andra kritiska aspekten gjordes det under lektion 2 möjligt att urskilja att $3 - 2 = 1$ samt att $2 - 3 = 0$ eller -1. Det gjordes dock inte möjligt att urskilja att den kommutativa lagen inte gäller för subtraktion.

Lektion 3

Under lektion 3 användes exemplen $3 + 1$, $1 + 3$, $3 - 1$ och $1 - 3$ för att visa att kommutativa lagen gäller för addition men inte för subtraktion. Lektionen inleddes med en jämförelse av additionsexemplen för att visa att i addition påverkas inte summan av i vilken ordning termerna hanteras. När de gäller exemplen $3 - 1 =$ och $1 - 3 =$ spelar dock ordningen på termerna stor roll för differensen. Följande excerpt visar hur det förstnämnda subtraktionsexemplet hanteras:

[1] L: $3 - 1$ står det nu, och vad står det sen´?
[2] Calle: är lika med två.
[3] L: Det är lika med två säger du. Håller ni andra med?
[4] Elever: Jaa.
[5] L: Att $3 - 1 = 2$?
[6] Elever: Jaa.
[7] L: Då ska vi se om ni tar upp er hand. Kan vi visa det? Vad börjar vi med?
[8] Elever: 3.
[9] L: Får jag se, allihop! Kom igen! 3 börjar vi med och vad händer sen´?
[10] Cecilia: Sedan blir det ett minus.
[11] L: Inte rakt ut, alla vill tänka.
[12] L: Vi har 3 och vad händer sen´?
[13] Calle: Tar bort en.
[14] L: Vi tar bort en och då? Då stämmer det va´? Vad blir det?
[15] Christer: 2.
(Excerpt M, Lektion 3, Tid: 05:02-05:25)

När subtraktionen $3 - 1$ ska kontrollräknas uppmanar läraren eleverna att använda fingrarna ([7]). Fokus hamnar på differensen och inte på processen som leder fram till differensen ([7-15]). Det som görs möjligt att urskilja är vad subtraktionens differens blir.

Lektionen fortsatte med exemplet $1 - 3$. Tanken var att de båda subtraktionsexemplen i relation till varandra skulle göra det möjligt att urskilja att termernas ordning har betydelse. Differenserna 2 och 0 framkom som möjliga lösningar på subtraktionen $1 - 3$. Eleverna tillfrågades hur de tänkte men kunde inte svara på det. Läraren uppmanade även denna gång eleverna att kontrollräkna med hjälp av fingrarna. Det resulterade i en diskussion mellan två elever där en av eleverna föreslog 0 som lösning på exemplet $1 - 3$ medan den andra eleven föreslog -2, vilket visas i följande excerpt:

[1] Charlie: Man kan ta bort hur mycket som helst från 0,
det blir fortfarande 0.
[2] L: Man kan ta bort hur mycket som helst från 0, okej, och det blir 0? Okej, vad tänkte du Cecilia?

[3] Cecilia: Det blir -2.

[4] L: Du tänker att det blir -2? Hur tänker du då?

[5] Cecilia: Jag tänker om det blir 0 då…ehh..det blir det ju inte, eftersom att det fortsätter med minus. För då alltså, då måste det bli -2.

[6] L: Okej. Vad säger ni om det? Skulle det kunna vara så som Cecilia säger? Då testar vi. Vi har 1, vi ska ta bort 3.

Läraren och eleverna använder fingrarna.

[7] L: Vi kan ju faktiskt börja med att ta bort? 1.

[8] Elever: Och sen´ 2.

[9] L: Som fattas. Skulle det kunna vara så?

Eleverna funderar och säger något tveksamt ja.

[10] L: Vad säger Carola?

[11] Carola: Nej.

[12] Charlie: 3 är ju mer än 1, så då måste det ju vara 0. För 3 är ju mer om man tar 1. Om man tar bort 3 från 1 då blir det ju 0 för det blir ju ingenting.

(Excerpt N, Lektion 3, Tid: 13:10-14:29)

Charlie anser att man kan ta hur mycket som helst från 0, det blir ändå 0 ([1]). Cecilia opponerar sig och förklarar att eftersom talen fortsätter på minus kan inte differensen bli 0, utan borde bli -2 ([5]). Läraren uppmanar eleverna att kontrollräkna med hjälp av fingrarna ([6]). Med detta sätt att kontroll-räkna finns inte samtliga exempel tillgängliga på whiteboarden samtidigt. Det gör att potentialen för urskiljning som finns inbyggd i gruppen av exemplen går förlorad. Eleverna ges inte möjlighet att få syn på de negativa talen med hjälp av att kommutativitet inte gäller för subtraktion. Det skulle kunna bero på att beräkningarna som sker med hjälp av fingrarna inte kan jämföras med varandra eftersom de inte finns kvar i elevernas blickfång samtidigt. Det kan också vara så att beräkningar med hjälp av fingrar befäster en uppfattning av tal som kvantiteter. Då blir det märkligt att ta bort fler objekt än man har, vilket eleven Charlie ger uttryck för.

Lektion 4

Under lektion 4 används exakt samma grupp av exempel som under lektion 3. Det som skiljer lektionerna åt är de representationer som användes vid beräkning, samt huruvida representationerna fanns tillgängliga samtidigt framför eleverna. Under lektion 3 kontrollräknades de exempel som användes med hjälp av fingrarna på den ena handen. Subtraktionerna beskrevs i termer av att ta bort en mängd, vilket för tanken till tal som kvantiteter. Under lektion 4 däremot användes istället en horisontell tallinje för kontrollräkning.

[1] L: … Ni har haft $3 + 1 = 4, 1 + 3 = 4$ och $3 - 1 = 2$. Vad kan komma nu?

[2] Elever: Gånger, nej minus. $1 - 3$. En till minus.

Läraren visar det fjärde exemplet: $1 - 3 =$.

[3] L: Vad står det här? Läs den här uppgiften, Erik?

[4] Erik: $1-3=$ ehhh…2.

[5] L: Det är ditt förslag? 2. Fler förslag? …

[6] Elever: 0.

[7] L: 0 är ett förslag. Då har vi 2 och vi har 0. Fler förslag?

(Excerpt O, Lektion 4, Tid: 07:20-08:16)

Av excerptet framgår att det finns elever som urskiljer mönstret som exemplen skapar ([2]), vilket även skedde under lektion 3. Som förslag till lösning framförs, precis som i den tredje lektionen, 2 och 0 ([4, 6]). Därefter frågar läraren eleverna hur lösningarna ska kunna kontrolleras:

[1] L: Hur kan vi få reda på vad det blir, är det någon som har något förslag?

[2] Elsa: Hämta en miniräknare.

[3] L: Ja, men det tror jag inte vi gör. Vi gör på något annat sätt. Vi visar på något annat sätt. Elsa?

[4] Elsa: Talli…nej?

Eleven pekar på tallinjerna som ritats upp på tavlan.

[5] L: Vi kan använda den tallinjen. Ska vi försöka? Nu är det ju lite knepigt här hör ni. Nu måste ni verkligen vara med. Vi kan i alla fall se: var börjar vi i den uppgiften? Det tror jag vi kan vara överens om. Vad säger Elof?

[6] Elof: 3

[7] L: Börjar vi på 3 i den uppgiften?

[8] Elof: Nej, 1.

[9] L: Vi börjar faktiskt på 1. Är ni med på det?

[10] Elever: Mm.

[11] L: Vi börjar på 1. Då sätter jag dit en stjärna här, så vet vi att det är där vi börjar. Där står vi. Vad händer sen´?

(Excerpt P, Lektion 4, Tid: 08:46-09:38)

Exemplet $1-3$ kontrollräknas på tallinjen där uträkningen av subtraktionen $3-1$ finns kvar ([4, 5]). Eleven Elof är inte säker på vilket som är subtraktionens startpunkt, men genom att 3 som startpunkt ([7]) och 1 som startpunkt ([8]) ställs mot varandra görs detta möjligt att urskilja. Lektionen fortsätter med frågor om riktning och storlek på sträckan i subtraktionen:

[1] L: Ska vi gå fram, ska vi gå bak?

Läraren visar med gester. Eleverna är engagerade.

[2] L: Vad säger Emil?

[3] Emil: Bak.

[4] L: Bak, säger du. … Minuset betyder att vi ska gå bak. Hur många steg ska vi gå bak? Hur många steg? Ellinor?

[5] Ellinor: 3.

[6] L: Okej, är ni med nu då, då börjar jag gå: 1….?

Tyst ett par sekunder.

[7] L: Men nu kom jag till….?

(Excerpt Q, Lektion 4, Tid: 09:39-10:15)

Läraren ställer riktningarna *framåt* och *bakåt* mot varandra ([1-4]), vilket riktar elevernas uppmärksamhet mot att i subtraktion förflyttar man sig åt vänster på tallinjen. Under lektion 3 och delvis lektion 2, beskrivs subtraktionsexemplen i termer av att ta bort en mängd från en annan mängd. Under lektion 4 däremot beskriver läraren subtraktionen genom en rörelse: hur många steg som ska tas samt i vilken riktning förflyttningen sker ([1-6]). Efter ett steg bakåt har läraren kommit till 0, frågan som väcks är vad som ska hända nu ([7]). Tallinjen har inte några markeringar till vänster om noll men inte heller en skarp gräns. Så här fortsätter lektionen:

[1] L: Vad ska jag göra nu? Nu måste ni vara lite uppfinningsrika här. Jag ska gå tre steg, men jag kan ju…? Vad ska jag göra?

[2] Emanuel: Minus.

[3] L: Minus?

[4] Emanuel: Minus..ehh 2.

[5] L: Minus 2. Vad tänker du?

[6] Emanuel: Man kan fortsätta.

[7] L: Minus två är ditt förslag och du säger att man kan fortsätta?

[8] Emanuel: Bakåt.

[9] L: Okej, då drar jag ut här då.

Läraren förlänger tallinjen till vänster om talet 0.

[10] L: Vad ska i så fall komma här då? Emanuel?

Läraren pekar på talet till vänster om 0.

[11] Emanuel: -1.

[12] L: Aha. Och där?

[13] Emanuel: -2.

[14] L: Och där?

[15] Emanuel: -3.

[16] L: Okej, vad säger ni om det? Var det ett bra förslag?

[17] Elever: Jaa.

[18] L: Det är ju ett jättebra förslag. För vad händer nu Emil?

[19] Emil: Det är ju minus där bak.

(Excerpt R, Lektion 4, Tid: 10:20-11:17)

Läraren riktar elevernas uppmärksamhet mot att någonting speciellt håller på att hända samt uppmuntrar eleverna till att lösa problemet ([1]). Emanuel föreslår differensen -2 och att man kan fortsätta bakåt på tallinjen ([2-8]). Additionsuträkningarna som gjordes på en horisontell tallinje finns kvar på tavlan liksom en likadan tallinje, med uträkningen av $3 - 1$, som är placerad under additionerna. Läraren förlänger den nedre tallinjen och Emanuel talar om vilka tal som ska placeras ut till vänster om noll ([9-15]). Lektionen fortsätter med att subtraktionen $1 - 3$ kan lösas med stöd av tallinjen:

[1] L: Nu kan vi ju fortsätta hör ni. Där började vi på 1, det var vi överens om.

Läraren visar exemplet på tallinjen.

[2] L: Sen skulle vi backa tre steg och det är ju inga problem nu, eller hur? 1 steg, 2 steg och 3 steg och var hamnar vi då? Var hamnar vi någonstans då? Ella?

[3] Ella: På tvåan.

[4] L: Vi hamnar på 2:an, men det är något speciellt med den här tvåan. Vad är det som är speciellt?

[5] Ella: ?

[6] Emma: Det är en minustvåa.

[7] L: Det är en minustvåa. Vad säger Ebbe?

[8] Ebbe: Det är en minustvåa.

[9] L: Minus två.

[10] Emrik: Bara att den är bakom nollan.

[11] L: Den är bakom nollan, precis. Här kom ju faktiskt Emanuel och hjälpte oss här och hittade…helt nya tal kan man säga. Jag vet inte om ni har sett de här talen förut?

(Excerpt S, Lektion 4, Tid: 11:18-12:18)

Läraren pekar ut var subtraktionen startar samt storleken på sträckan ([1, 2]). Därefter försöker läraren dra elevernas uppmärksamhet till att den tvåa som utgör slutpunkt är speciell, vilket gör det möjligt att urskilja att det handlar om ett negativt tal som placeras till vänster om noll ([4-11]). Under lektion 4 användes numeriska symboler samt den horisontella tallinjen som representationer för tal.

Uppgifter i elevtestet som prövar förståelsen för den kommutativa lagen

När det gäller den andra kritiska aspekten: ”Att urskilja att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen”, har uppgifterna $6-4$ och $4-6$ från elevtestet valts ut. Syftet med uppgifterna var att få fram huruvida eleverna urskiljer att kommutativitet inte gäller för subtraktion. När det gäller hur frågan om kommutativitet behandlats under de olika lektionerna framkommer stora skillnader, vilket också i viss mån återspeglas i resultaten på elevernas eftertest. Lösningar på elevtestet avseende de nämnda uppgifterna visas i Tabell 4 och 5.

Tabell 4. *Antal elevsvar fördelade på olika svarsalternativ och respektive elevgrupp på uppgiften:* $6-4=$.

Grupp/svarsalternativ	1		2		3		4		Totalt	
	N=19		N=16		N=15		N=14		N=64	
	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET
2	18	15	15	14	15	10	12	14	60	53
3	-	-	-	1	-	1	-	-	-	2
0	1	-	-	-	-	1	-	-	1	1
-2	-	1	1	1	-	1	1	-	2	3
$2-$	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1
1	-	1	-	-	-	1	1	-	1	2
4	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1
10	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1

FT= förtest,
ET= eftertest
Grupp refererar till de olika lektionerna

Det som är intressant utifrån Tabell 4 är att antalet korrekta lösningar sjunker mellan för- och eftertest i samtliga grupper, förutom i grupp 4. Kolumnen ”totalt” visar att svarsalternativen mellan för- och eftertest ökar från fyra till åtta olika svar. $6-4$ är en beräkning som eleverna i årskurs 2 och 3 har klarat av sedan länge, nu blir de plötsligt osäkra. Av tabellen framgår att det framför allt är i grupp 1 och 3 som antalet svarsalternativ på eftertestet ökar. En förklaring till detta kan vara att eleverna uppmärksammat att termernas ordning i en subtraktion har betydelse, men ändå inte är säkra på hur termerna ska hanteras. De sex elever som enligt Tabell 4 ger svaret -2 eller $2-$ på subtraktionen

$6-4$, svarar 2 på subtraktionen $4-6$ (Tabell 5). Även en av de elever som svarat att $6-4=0$, svarar att $4-6=2$. Den kombination av svarsalternativ som dessa elever ger skulle kunna tyda på att termerna hanteras i fel ordning. Det verkar inte vara subtrahenden som dras från minuenden, utan tvärtom. Man skulle kanske kunna se det som att eleverna har en idé om att betydelsen av termernas ordning skiljer sig åt i subtraktion jämfört med addition, men att de väljer att använda minuenden som subtrahend. I Tabell 5 visas de svarsalternativ som eleverna gav på uppgift 3d, att beräkna $4-6$.

Tabell 5. Antal elevsvar fördelade på olika svarsalternativ och respektive elevgrupp på uppgiften: $4-6=$.

Grupp/svarsalternativ	1 N=19		2 N=16		3 N=15		4 N=14		Totalt N=64	
	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET
-2	-	9	4	11	-	3	1	10	5	33
-0	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1
-4	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1
0	7	3	2	-	7	3	2	-	18	6
1	-	-	-	-	-	1	1	-	1	1
2	10	5	10	4	8	7	10	4	38	20
3	1	1	-	-	-	-	-	-	1	1
4	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1
Inget svar	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-

FT = förtest,
ET = eftertest
Grupp refererar till de olika lektionerna

Uppgifter av typen $4-6$ betraktades av oss i learning study-gruppen som viktiga för att undersöka om eleverna är medvetna om att de negativa talen existerar. Utifrån Tabell 5 framgår att samtliga elevgruppers svarsfrekvens har ökat mellan för- och eftertest. I förtestet klarar fem elever av att lösa uppgiften, medan drygt hälften av eleverna löser den på eftertestet. Precis som i uppgiften $6-4$ ökar antalet svarsalternativ i grupp 1 och 3. Av tabellen framgår att de vanligaste svarsalternativen på förtestet är att $4-6=2$ (38 av 64) alternativt 0 (18 av 64). På eftertestet anser fortfarande 20 elever att differensen är 2, medan sex elever svarar att differensen är 0. Elever som svarar att $4-6=2$ kanske generaliserar kunskaper från addition där den ordning termerna hanteras i inte har någon betydelse för summan. Det skulle också kunna vara så att eleverna inte ens lägger märke till att termerna har bytt plats. Elever som svarar att $4-6=0$ tänker kanske som eleven Charlie under lektion 3, att ingenting kan vara mindre än noll, eftersom noll är "ingenting" (Excerpt N).

Följande utdrag ur eftertestintervjun visar hur eleven Jenny stannar vid 0 samt dessutom blandar ihop i vilken ordning termerna ska behandlas i subtraktionerna $6-4$ och $4-6$:

[1] Intervjuare: Och hur tänker du då? ($6-4$)
[2] Jenny: Sex är ju ett större tal än fyra och då blir det ju noll.
[3] I: Sex är ett större tal än fyra.
[4] J: Mm. Jag tar och kryssar över det.
Eleven skriver dit 0 på uppgiften $6-4=$
[5] I: Och här då?
[6] J: $4-6=2$
[7] I: Hur tänker du där då?
[8] J: Jag har fyra, eller jag har…sex och tar bort fyra.
[9] I: Mm. Är det lika med?
[10] J: Två.
(Excerpt T, Intervju 1, 2013-10-03)

Jenny verkar inte ha fått syn på de negativa talen eftersom hon anser att ett större tal minus ett mindre, resulterar i differensen 0 ([2]). Hon använder dessutom minuenden som subtrahend, det vill säga hon drar ifrån det större talet från det mindre i uppgiften $6-4$ ([2]). När det gäller uppgiften $4-6$ säger Jenny först att hon har fyra men ändrar sig sedan till sex ([9]). Det innebär att hon återigen vänder på termerna och använder minuenden som subtrahend, differensen blir därför 2 ([11]).

Såväl det skriftliga som det muntliga eftertestet indikerar att det finns elever som tendererar att blanda ihop minuenden och subtrahenden i subtraktioner. När ett större positivt tal ska subtraheras från ett mindre positivt tal finns det elever som väljer att stanna vid noll. Kanske beror det på att eleverna betraktar tal som kvantiteter.

Jämförelse mellan lektionernas genomförande och resultatet på elevtestet

Att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen formulerades som en kritisk aspekt först efter lektion 1. Intressant att notera är att trots att inga exempel av typen $a+b=b+a$ samt $a-b\neq b-a$ förekom under lektion 1, så löste 9 av 19 elever uppgiften $4-6$ på eftertestet (Tabell 5). En förklaring till detta kan vara att eleverna under lektion 1 hade möjlighet att urskilja de negativa talens placering, nämligen: *neråt, under jord* samt *under nollan* (Excerpt J). Förutom detta skrevs våningarna i våningshuset ut direkt på den lodräta tallinjen under lektion 1, vilket medför att den metafor för tal som våningshuset står för jämfördes och kopplades till den lodräta tallinjen som representation för tal. Även i arbetet med termometern och den horisontella tallinjen jämförs metaforerna (våningshuset och termometern) samt representationerna (lodrät och horisontell tallinje) med varandra. Lektion 1 skiljer sig således från övriga lektioner genom att läraren i stor utsträckning hänvisar tillbaka till tidigare metaforer och representationer för tal avseende riktning och/eller placering av negativa och positiva tal. Vad som gjordes möjligt att urskilja i lektion 2, 3 och 4 utifrån de mönster av variation som olika exempel skapar samt vilka aspekter som fokuserades, visas i Figur 17.

Exempel	**Mönster av variation**	**Fokuserade aspekter**	**Möjligt att urskilja**	**Lektion**
$3-2$ $2-3$	Invariant: de positiva termerna 3 och 2, räknesättet Varierar: minuendens värde i relation till subtrahendens värde	Resultat	Differensen mellan två tal kan vara positivt eller negativt	2
$3+1$ $1+3$ $3-1$ $1-3$	Invariant: de positiva termerna 3 och 1 Varierar: termernas placering, räknesättet	Räknesätt	Räknesätt	3
$3+1$ $1+3$ $3-1$ $1-3$	Invariant: termerna Varierar: termernas placering, räknesättet	Minuend och subtrahend	Subtraktion är icke kommutativt	4

Figur 17. *Mönster av variation samt vad som gjordes möjligt att urskilja under lektion 2, 3 och 4.*

Under lektion 2 genomfördes, som framgår av Figur 17, jämförelser mellan $3-2$ och $2-3$. Subtraktionerna ställdes dock inte emot varandra, vilket resulterade i att den kritiska aspekten om Kommutativa lagens giltighet för subtraktion inte öppnades upp och gjordes möjlig att urskilja. Det är enbart exemplens positiva eller negativa differenser som görs möjliga att urskilja, eftersom fokus under lektionen snarare hamnar på resultatet av subtraktionen än på när den kommutativa lagen inte gäller. Dessutom användes endast en representation av tal, nämligen numeriska symboler. Resultatet från elevtestet visar dock att svarsfrekvensen på uppgiften $4-6$ ökar från fyra till elva elever mellan för- och eftertest. En kraftfull jämförelse som relaterar till den tredje kritiska aspekten och som diskuteras under rubrik 6.4, kan ha påverkat det ökade resultatet i grupp 2.

Under lektion 3 och 4 genomfördes exemplen $3+1$, $1+3$, $3-1$ samt $1-3$. I både lektion 3 och 4 presenterades exemplen ett och ett med hjälp av en smartboard. Eleverna iakttog variationen i exemplen genom att kommentera att termerna var desamma, men att de bytt plats med varandra. Att de rörde sig om två olika räknesätt kommenterades också. Det som skilde sig åt mellan lektionerna var hur och vilka olika representationer av tal som användes. Under lektion 3 användes fingrarna för kontrollräkning, medan horisontella tallinjer användes under lektion 4. Från Figur 17 framgår att det som fokuseras och det som görs möjligt att urskilja i lektion 3 är de olika räknesätten. Under lektion 4 fokuserades minuenden och subtrahenden, vilket medförde att det gjordes möjligt att urskilja att den kommutativa lagen enbart kan användas vid addition (Figur 17). Resultatet från elevtestet från grupp 3 visar att svarsfrekvensen på uppgiften $4-6$ enbart ökar från noll till tre mellan för- och eftertest. Medan svarsfrekvensen i grupp 4 ökar från ett till tio mellan för- och eftertest. Det låga resultatet på eftertestet (efter lektion 3) skulle kunna bero på att fingrarna är ett otillräckligt hjälpmedel för att kunna urskilja resultatet i det fjärde exemplet $(1-3)$, samt för att jämföra addition och subtraktion avseende kommutativitet. De tallinjer som användes under lektion 4 (se Figur 18) inbjuder till jämförelser på ett helt annat sätt än vad operationer med stöd av fingrarna gör. Att några elever ändå klarar att besvara uppgiften $4-6$ efter lektion 3 kan bero på att en elev i klassen, Cecilia (Excerpt N) argumenterade för att $1-3=-2$ och att "det fortsätter med minus" när man har kommit till 0.

Under lektion 4 räknas additionsexemplen ut på en horisontell tallinje, under denna visas en likadan tallinje på vilken subtraktionsexemplen räknas ut (Figur 18).

Exempel	Representationer av operationer	
$3+1=4$ $1+3=4$	Numeriska symboler	
$3-1=2$ $1-3=-2$	Numeriska symboler	

Figur 18. *Exempel och representationer som användes under lektion 4.*

Som nämnts tidigare fanns de fyra exempel som visas till vänster i Figur 18 tillgängliga på smartboarden i både lektion 3 och 4. En stor skillnad mellan lektionerna är dock att beräkningarna som gjordes som kontrollräkning på två tallinjer också fanns tillgängliga samtidigt på whiteboarden under lektion 4. Detta innebär att under lektion 3 fanns endast en slags representation av tal tillgänglig på tavlan (numeriska symboler), medan det under lektion 4 fanns två representationer tillgängliga samtidigt (numeriska symboler och horisontell tallinje). Fingrarna användes visserligen som representation under lektion 3, men exemplen kunde enbart jämföras ett och ett. Det gjordes därför möjligt för eleverna att samtidigt erfara de numeriska symbolerna i exemplet $3+1=4$, med tre fingrar plus ett finger som är lika med fyra fingrar. Inför nästa exempel $1+3=4$ fanns inte representationen med fingrarna kvar i elevernas blickfång, vilket kan ha försvårat en jämförelse mellan exemplen.

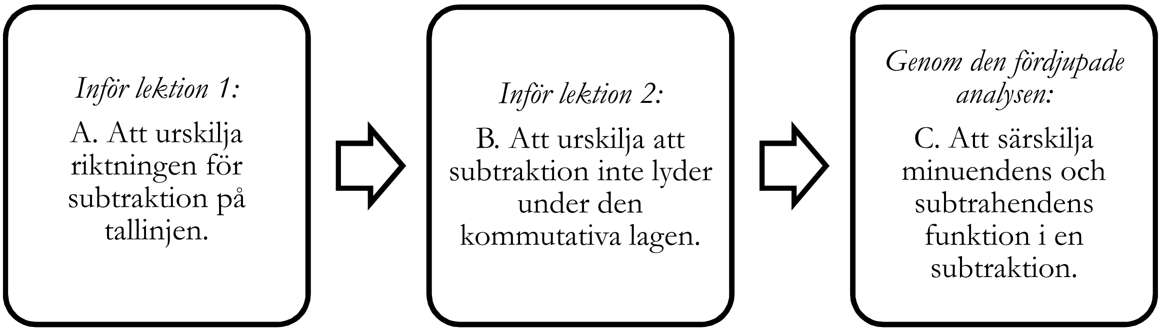
En annan skillnad mellan lektion 3 och 4 är att de genomfördes med utgångspunkt i två olika synsätt att se på subtraktion. Under lektion 3 och i viss mån också under lektion 2, handlade subtraktion om att ta bort en mängd från en annan mängd. Talen behandlades som kvantiteter. Under lektion 4 däremot handlade subtraktion om rörelse och en särskild riktning på tallinjen. Talen var då inte bundna till kvantiteter.

De första tre exemplen (Figur 18) som användes under lektion 3 och 4 kan användas okomplicerat i båda de synsätt på subtraktion samt förståelser av tal som beskrivits. Men när $1-3=-2$ ska beräknas förefaller vissa elever bli fundersamma. Då subtraktion betraktas som att ”ta bort” någonting från något annat, framstår det som svårt att ta bort ett större antal än vad minuenden visar. Eleven Charlie argumenterade under lektion 3 för att man kan ta bort hur mycket som helst från 0 differensen blir ändå 0 (Excerpt N). Detsamma gäller Jenny i eftertestintervjun som vid beräkning av $6-4$ både vänder på termernas ordning, samt hävdar att eftersom sex är större än fyra måste differensen vara 0 (Excerpt T).

När det gäller kritisk aspekt 2: ”Att urskilja att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen”, verkar det inte vara självklart för eleverna att det är subtrahenden som ska dras från minuenden. Beräkningarna under lektion 2 handlade om att ”ta bort” något från något annat, vilket inte gjorde det möjligt att urskilja de negativa talen i lika hög utsträckning som beräkningar utifrån ”rörelse och en särskild riktning”. Det kan också vara så att det avgörande handlar om vilka transformationer som görs mellan olika representationer och om detta görs samtidigt eller inte. Det kan hända att fingrarna kanske hade fungerat bra som representation om man under lektionen valt att avbilda operationen med fingrarna på tavlan. Då kanske även det fjärde exemplet $1-3$ kunde ha lösts genom att två fingrar ”fattades”.

Omformulering och precisering av den andra kritiska aspekten

Learning study-gruppens analys- och planeringsmöten resulterade i två formuleringar kring vad som skulle kunna vara kritiskt när det gäller att urskilja subtraktioners riktning på tallinjen samt att kommutativitet inte gäller vid subtraktion (Figur 19 A och B). I den fördjupade analys som genomfördes efter avslutad learning study, preciserades den kritiska aspekten ytterligare (Figur 19 C).



Figur 19. *Omformulering och precisering av den andra kritiska aspekten samt när respektive aspekt formulerades.*

Inledningsvis antogs riktningen för subtraktion på tallinjen vara en kritisk aspekt för att kunna bli bekant med de negativa talen. Under lektion 1 genomfördes dock inga jämförelser av exempel som skulle kunna hjälpa till att öppna upp den förmodade kritiska aspekten: ”Att urskilja riktningen för subtraktion på tallinjen” (Figur 19 A). I learning study-gruppen diskuterade vi ett ökat fokus på jämförelser av exempel där subtraktioners riktning synliggjordes och även ett ökat fokus på relationen mellan riktning och resultat (negativa differenser). Inför lektion 2 förmodades att välplanerade variationsmönster av typen $a + b = b + a, a - b \neq b - a$ skulle kunna möjliggöra en förståelse av att den kommutativa lagen inte kan tillämpas i subtraktioner. Aspekten om den kommutativa lagen antogs kunna vara till hjälp för att få syn på de negativa talen (Figur 19 B). Riktningens betydelse betraktades kunna ingå i den nya omformuleringen. Även i forskning finns uttryckt att elever tenderar att behandla subtraktion kommutativt (Kilhamn, 2011; Kullberg, 2010). I den fördjupade analysen framkom dock att det inte enbart var den kommutativa lagens giltighet som var det som var kritiskt, utan även att kunna särskilja att subtrahenden ska dras från minuenden (Figur 19, exempel C). Det skulle kunna uttryckas som att det inte räckte för eleverna att veta att $a - b \neq b - a$, det vill säga att termerna i en subtraktion inte kan byta plats med varandra utan att det påverkar differensen. Eleverna uppvisade en osäkerhet när det gäller vilken term som ska dras från vilken (Excerpt I och P). Det visade sig genom att elever kunde påstå att $4 - 6 = 2$, medan $6 - 4 = -2$ (Tabell 4 och 5). Detta indikerar att det finns elever som inte har uppfattat skillnaden mellan minuendens och subtrahendens funktion i subtraktionen. Det vill säga att det är subtrahenden (b) som ska subtraheras från minuenden (a) i uttrycket $a - b = c$. Även den andra kritiska aspekten har således omformulerats från att *urskilja* något till att *särskilja* något från någonting annat. Det verkade inte vara tillräckligt att enbart urskilja att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen (Figur 19 B), utan det behövde också göras möjligt att särskilja minuendens och subtrahendens funktion (Figur 19 C).

6.4 ATT URSKILJA TAL BÅDE SOM PLATSER OCH AVSTÅND PÅ TALLINJEN

För att göra det möjligt att få syn på den tredje kritiska aspekten har den horisontella tallinjen och numeriska symboler använts som representationer för tal. Under lektion 1, 2 och 4 relaterades representationerna till varandra i mer eller mindre hög utsträckning. Under lektion 4 samt delvis under lektion 2 fanns representationerna samtidigt synliga i elevernas blickfång.

Jämförelse inom och mellan subtraktioner

Den tredje kritiska aspekten som identifierades inom learning study-gruppen formulerades som: ”Att urskilja tal både som platser och avstånd på tallinjen”. Aspekten formulerades för att göra det möjligt att urskilja två olika innebörder av minustecknet, nämligen som tecken för subtraktion och som tecken för negativt tal. Undervisningen tar sin utgångspunkt i jämförelser inom och mellan subtraktioner. Det innebär att exempelvis $3 - 1 = 2$ betraktades utifrån hur exemplet är uppbyggt avseende start- och slutpunkt, avstånd samt riktning på tallinjen, men att det också jämfördes med hur andra exempel är uppbyggda. Figur 20 ger en bild av vilka exempel som planerades (P), respektive genomfördes (G), för att visa skillnaden mellan tal som plats och tal som avstånd.

	Lektion 1		Lektion 2		Lektion 3		Lektion 4	
Exempel	P	G	P	G	P	G	P	G
A. $3 - 1$	-	-	-	-	X	X	X	X
B. $1 - 3$	-	X	-	-	X	X	X	X
C. $3 - 2$	X	X	X	X	-	-	-	-
D. $2 - 3$	X	-	X	X	-	-	-	-
E. $2 - 4$	X	-	X	X	X	-	X	-
F. $-2 - 3$	X	-	X	-	X	-	X	X
G. $-2 - 4$	X	-	X	X	X	-	X	X

Figur 20. *Subtraktionsexempel som planerades respektive användes under lektion 1- 4.*

Som diskuterades i avsnitt 6.3 användes exempel A-D (Figur 20), i varierande omfattning för att göra det möjligt att urskilja att kommutativitet inte gäller för subtraktion. Dessa exempel innehåller även potential för att jämföra tal som plats och tal som avstånd, vilket medför att de också kan diskuteras i relation till den tredje kritiska aspekten. Exemplen F och G är dock särskilt intressanta utifrån den tredje kritiska aspekten. Det beror på att i $-2 - 3$ samt i $-2 - 4$ inleds subtraktionerna med ett negativt tal, vilket förväntas underlätta för en jämförelse av minustecknets olika innebörder. Om minustecknets olika innebörder genom något av de nämnda exemplen ställs mot varandra, så kan det göras möjligt för eleverna att få syn på att termerna i en subtraktion kan vara positiva och negativa tal. I exempel A-E användes enbart positiva tal. Exempel E planerades som en övergång till exempel F och G genom att använda resultatet från exempel E som minuend. Med hjälp av dessa exempel (A-D samt E-G) planerades för jämförelse mellan tal och subtraktioner utifrån strukturen startpunkt, riktning, storlek på avstånd samt slutpunkt. Under lektionerna tillvaratogs dock exemplens gemensamma potential i olika utsträckning, vilket visas i det följande.

Lektion 1

Inför lektion 1 planerades fem olika exempel som skulle kunna visa skillnaden mellan tal som plats och tal som avstånd på tallinjen, endast ett av dessa exempel: $3-2$ genomfördes. Detta exempel räknades ut med hjälp av en lodrät termometer med avsikt att synliggöra temperaturminskning, således gjordes det inte möjligt att urskilja tal som plats och tal som avstånd på tallinjen. Exemplet $1-3$ genomfördes som en beräkning med hjälp av en horisontell tallinje, trots att vi inte hade planerat det. Följande utdrag visar hur exemplet hanterades. Läraren och eleverna har just diskuterat hur $3+2$ beräknas på en horisontell tallinje.

> [1] L: Om vi istället står på ettan där säger vi. Uppgiften är $1-3=$. Var hamnar jag på tallinjen då?
> [2] Annika: På 2
> [3] L: På två? $1-3$. Här står jag. Läraren pekar på 1. Vilket håll ska jag gå åt? Ska jag gå ditåt eller ditåt?
> *Läraren pekar till höger och till vänster.*
> [4] Annika: Vi kommer till $1-$. Vi står på ettan och sedan hoppar vi förbi 0 och så tvåan. Ettan menar jag.
> [5] L: Hur många steg är det?
> [6] Annika: $1, 2$
> [7] L: Hur många steg skulle vi gå? …
> [8] Andreas: 3, då hamnar vi på tvåan.
> [9] L: Vi står där och så hamnar vi på tvåan, vilken tvåa?
> [10] Andreas: -2. …
> [11] L: L: Titta på tallinjen. Vad ska jag skriva för svar?
> (Excerpt U, Lektion 1, Tid: 46:25-47:20)

Additionsexemplet $3+2$ samt subtraktionsexemplet $1-3$ ställdes inte mot varandra eftersom de inte fanns samtidigt på tallinjen utan löstes sekventiellt. Även om exemplen hade varit visuellt synliga samtidigt på tallinjen, så saknas en inbyggd potential för urskiljande. I de båda exemplen är det olika räknesätt och olika termer men ändå positiva tal. För att få en inbyggd potential för urskiljande är variationen däremot medvetet strukturerad så att endast det som läraren strävar efter att eleverna ska få syn på varierar, medan andra faktorer hålls invarianta. Utifrån Excerpt U så görs dock vissa jämförelser inom exemplet möjliga att urskilja. Läraren pekar till höger respektive vänster och frågar eleverna åt vilket håll förflyttning sker ([3]). Det görs möjligt att urskilja att i subtraktion sker förflyttning till vänster på tallinjen. Storleken på avståndet jämförs genom att Annikas förslag på två stegs förflyttning, ställs mot lärarens fråga om hur många stegs förflyttning exemplet egentligen innehåller ([5-8]). Det görs möjligt att urskilja att storleken på avståndet är tre steg. Slutligen sker en jämförelse mellan den positiva och den negativa tvåan som slutpunkt i exemplet. Genom att läraren frågar vilken tvåa som operationen slutar på, görs det möjligt att urskilja att -2 är slutpunkt ([9, 10]). I utdraget ovan används två olika representationer för tal, nämligen den horisontella tallinjen samt numeriska symboler. Läraren relaterar dessa båda representationer till varandra genom uppmaningen att på tallinjen söka information om vad svaret på exemplet kan vara ([11]).

Lektion 2

Inför lektion 2 planerades samma fem exempel som var tänkta att genomföras under lektion 1, fyra av dessa exempel användes. Beräkningen av $3-2$ och $2-3$ beskrevs i avsnitt 6.3. Dessa båda exempel relaterades varken till varandra eller beräknades med hjälp av tallinjen. Det som gjordes möjligt att urskilja var vilken differens respektive subtraktion resulterar i. Det fanns däremot två andra exempel som jämfördes med varandra, nämligen $2-4$ och $-2-4$. Läraren skrev först upp exemplet $2-4$ på smartboarden, därefter beräknades det tillsammans med eleverna med hjälp av en horisontell tall-linje. Läraren och eleverna kunde konstatera att $2-4=-2$, varpå $-2-4$ placerades under det nyss uträknade exemplet:

Läraren skriver $-2-4$ *under* $2-4=-2$.
[1] L: Prata med den du sitter bredvid: blir det samma svar på den som där?
Eleverna diskuterar parvis.
[2] L: Blir det samma svar på de två uppgifterna? Vad kom ni fram till Björn?
[3] Björn: Nej.
[4] L: Och varför kom ni fram till att det inte skulle vara samma?
[5] Björn: Ehh för att -2 är ju mindre än 2.
[6] L: Jaa, det är det. Har vi fler tankar?
[7] Benny: -2 i ena och 2 i andra
[8] L: Man börjar på ett annat tal, ja.
[9] Beatrice: Och att man börjar på den som slutade på innan. Som blev svaret på den innan på den förra frågan.
[10] L: Mm. Bessie hade ni någon tanke också?
[11] Bessie: Ja, man börjar på negativ två och sedan hoppar man bakåt så att det blir minus tre, minus fyra, minus fem, minus sex.
(Excerpt V, Lektion 2, Tid: 32:38-33:30)

Läraren riktar fokus mot jämförelsen av subtraktionernas resultat ([1]). I och med att läraren frågar varför resultatet inte blir likadant, görs det möjligt att urskilja de olika startpunkterna -2 och 2 ([4-8]). Beatrice uppmärksammar att startpunkten i den ena subtraktionen utgör slutpunkt i den andra ([9]). Bessie visar förståelse av det negativa tecknet och minustecknet ([11]), däremot förs ingen diskussion om vilket tecken som indikerar ett negativt tal respektive en subtraktion. Både den horisontella tallinjen samt beräkningar med hjälp av numeriska symboler användes som representationer för tal i det första exemplet. Det andra exemplet skrevs visserligen upp nedanför föregående exempel, men det beräknades inte med hjälp av tallinjen. Inte heller skrevs differensen i exemplet ut, utan diskuterades enbart i relation till det föregående exemplet. Exemplen relaterades till varandra, men beräkningen av det andra exemplet fanns inte tillgängligt på smartboarden.

Lektion 3

Exemplen $3-1$ och $1-3$, som planerades och användes för att synliggöra den andra kritiska aspekten, har redan behandlats i avsnitt 6.3. I likhet med motsvarande exempel under lektion 2, relaterades inte heller dessa till varandra eller beräknades med hjälp av tallinjen. Det som gjordes möjligt att urskilja var vilken differens respektive subtraktion resulterade i. Vi hade dessutom planerat för ytterligare tre jämförelser, vilka även fanns med i planeringen av lektion 1 och 2. Dessa genomfördes emellertid inte under lektion 3.

Lektion 4

Inför lektion 4 planerade learning study-gruppen att använda exakt samma exempel som under lektion 3, fyra av de fem planerade exemplen genomfördes. Exemplen $3-1$ och $1-3$ användes i början av lektionen tillsammans med $3+1$ och $1+3$, detta har redan beskrivits i relation till den andra kritiska aspekten. De båda första exemplen användes dock, tillsammans med $-2-3$ och $-2-4$, även mot slutet av lektion 4 i syfte att synliggöra den tredje kritiska aspekten.

Differensen av $-2-3$ föreslogs av eleverna vara 1, -5 eller -1. Läraren frågade eleverna hur man skulle kunna komma fram till en lösning. Eleven Emil refererar i följande excerpt till den horisontella tallinje som finns på whiteboarden, där $3-1$ och $1-3$ just har räknats ut:

[1] Emil: Jag tror att det är så här: den där tvåan är ju en negativ tvåa som är på den där tallinjen. Ja och sen´ har vi ju en negativ trea där med.
[2] L: Ja.
[3] Emma: Nej det är ingen..
[4] Emil: Jo, det är en negativ trea.
[5] Emma: Det sa ju du nyss.
[6] Emil: Det är ju minus där, då blir det en negativ tvåa och en negativ trea.
[7] L: Mm. Oj, hör ni nu hamnar vi i något riktigt intressant. Det är faktiskt lite skillnad på det tecknet och det tecknet även om de ser likadana ut.
Läraren pekar på minustecknet som indikerar negativt tal samt minustecknet som indikerar operation.
[8] L: En viktig grej, vad tänkte du säga Emil?
[9] Emil: Det kan vara en minustvåa minus tre.
[10] L: Ja, en minustvåa minus tre. Det var ju väldigt bra sagt. Så du tänker att det är en negativ tvåa?
[11] Emil: Ja och en positiv trea.
[12] L: Just det. Då skulle vi behöva göra som Emil sa, då skulle vi behöva skriva så här:
Läraren skriver dit ett plustecken framför 3:an.
[13] L: För att den här är egentligen positiv.

(Excerpt W, Lektion 4, Tid: 51:15-52:10)

Eleverna Emil och Emma resonerar om vad de olika tecknen i exemplet har för betydelse ([1-6]), vilket är anmärkningsvärt eftersom detta inte diskuterats alls i tidigare lektioner. Den negativa tvåa som eleven Emil refererar till utgör slutpunkten i subtraktionen $1 - 3 = -2$ ([1]). Läraren ställer elevernas förslag mot varandra genom att göra eleverna uppmärksamma på att tecknens innebörder faktiskt skiljer sig åt ([7]). Emil föreslår att det första tecknet kan ha med ett negativt tal att göra och det andra tecknet med subtraktion ([9-13]). Trots att skillnaden mellan tecknen gjordes möjlig att urskilja, ställer sig eleven Emelie frågande till detta när $-2 - 4$ ska beräknas:

[1] L: Resonera med er själva: Hur ska man lösa den här uppgiften? Emelie säger här att hon fattar inte ens uppgiften. Hur tänkte du Emelie?
[2] Emelie: Är det negativ fyra eller en positiv fyra?
[3] L: Ja, är det en negativ fyra eller positiv fyra det kan man ju verkligen undra.
[4] Emrik: Det är..en vanlig för det är bara *ett* minustecken där emellan.
[5] L: … Det här är ju ett *tal.*
Läraren ringar in talen -2 *och* 4.
[6] Emelie: Jaha!
[7] L: Det här är ett *tal* och här har vi ett *tecken*. Nu ska vi se vad gör vi? Berätta hur vi gör, Ester!
[8] Ester: Börjar på minus två.
[9] L: Du börjar på minus två. Då är vi här, vad händer sen´?
[10] Ester: Jag går fyra steg bakåt.
[11] L: Fyra steg bakåt: $1, 2, 3, 4$. Vad hamnar vi på?
[12] Ester: -6
[13] L: Ja, det är ju strålande. Och då blir svaret?
[14] Elever: -6
[15] L: Just det.
[16] Elever: Det var ju inte svårt.
(Excerpt X, Lektion 4, Tid: 53:05-54:00)

Genom Emelies fråga ställs en negativ fyra mot en positiv fyra i exemplet $-2 - 4$, läraren lyfter fram jämförelsen genom att föra frågan vidare till klasskamraterna ([2, 3]). Emrik förklarar att det är en positiv fyra eftersom det endast är *ett* minustecken mellan talen, läraren kompletterar resonemanget med att ringa in talen i exemplet ([4, 5]). Emelies uttalande visar att det gjorts möjligt att urskilja tecknens olika innebörder ([6]). Som framgår av excerptet klarar eleven Ester att hantera subtraktionen i förhållande till strukturen startpunkt, riktning, storlek på avstånd samt slutpunkt ([7-12]). Under lektion 4 användes den horisontella tallinjen samt beräkningar med hjälp av numeriska symboler, som representationer för tal.

Uppgifter i elevtestet som prövar förmågan att urskilja tal som plats och tal som avstånd

Resultatet på två uppgifter från elevtestet som berör den tredje kritiska aspekten presenteras här. I Tabell 6 visas resultatet från uppgift 9, som består av att visa hur $4-7$ räknas ut på en tallinje där inga tal finns utplacerade. I Tabell 7 visas resultatet från uppgift 3g, som innebär att beräkna $-2-2$. I den sistnämnda uppgiften framgår inte huruvida eleven har relaterat sin beräkning till tallinjen, däremot prövas om eleven förstår skillnaden mellan tecken för negativt tal samt tecken för subtraktion.

Tabell 6. *Antal elevsvar fördelade på olika svarsalternativ och respektive elevgrupp på uppgiften:* $4-7=$.

Grupp/svarsalternativ	1 N=19		2 N=16		3 N=15		4 N=14		Totalt N=64	
	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET
Korrekta lösningar	-	12	2	10	-	-	-	12	2	34
Inkorrekta lösningar	19	7	8	5	8	11	14	2	49	25
Inget svar	-	-	6	1	7	4	-	-	13	5

FT = förtest,
ET = eftertest
Grupp refererar till de olika lektionerna

Av Tabell 6 framgår att antalet elever som löste uppgiften $4-7$ ökade från ett fåtal på förtestet (2 av 64) till drygt hälften på eftertestet (34 av 64). I både grupp 2 och 3 fanns elever som valt att inte besvara uppgiften. I grupp 1, 2 och 4 förbättrade sig eleverna avsevärt i att kunna räkna ut subtraktionen $4-7$på tallinjen. I förhållande till antalet elever i respektive grupp, är det efter fjärde lektionen som högst svarsfrekvens erhålls. I grupp 3 är antalet korrekta lösningar 0 både i för- och eftertest.

Tabell 7. *Antal elevsvar fördelade på olika svarsalternativ och respektive elevgrupp på uppgiften:* $-2-2=$

Grupp/svarsalternativ	1 N=19		2 N=16		3 N=15		4 N=14		Totalt N=64	
	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET	FT	ET
-4	-	7	3	9	-	-	-	11	3	27
$4-$	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1
-3	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1
-1	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1
$1-$	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-
-0	1	4	-	1	-	2	-	-	1	7
0	16	5	13	5	12	9	12	2	53	21
2	-	1	-	-	1	1	1	1	2	3
3	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-
4	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1
6	1	-	-	-	-	-	1	-	2	-
Inget svar	-	1	-	-	1	1	-	-	1	2

FT = förtest,
ET = eftertest
Grupp refererar till de olika lektionerna

Majoriteten av eleverna, 53 av 64, angav redan på förtestet att $-2-2=0$ (Tabell 7). Under lektion 1, 2 och 3 ökar antalet svarsalternativ från för- till eftertest, vilket kan ses som att lektionen har utmanat elevernas föreställningar om vad subtraktionen kan resultera i. Efter samtliga lektioner, utom lektion 3, har resultatet stigit mellan för- och eftertest. Lektion 4 skiljer sig från de andra genom att svarsalternativen minskar från för- till eftertest. Grupp 4 har dessutom högst antal elever som klarar att lösa uppgiften. Intressant att notera är att svarsalternativet -4 och svarsalternativen 0 samt -0, hade i stort sett lika hög svarsfrekvens på eftertestet (27 respektive 28 elever). Det finns elever i grupp 1, 2 och 3 som efter lektionen svarar att $-2-2=-0$. I samtliga grupper finns det också elever som efter lektionen svarar att $-2-2=0$.

Jämförelse mellan lektionernas genomförande och resultatet på elevtestet

Hur exemplen utformas och används ser ut att påverka vad som görs möjligt att urskilja i respektive lektion. Av den anledningen diskuteras här hur potentialen i gruppen av exempel togs tillvara. Detta kopplas också till resultatet på elevtestet. Vilket mönster av variation som respektive exempel skapar samt vilka aspekter som fokuserades visas, tillsammans med vad som därmed gjordes möjligt att urskilja (Figur 21).

Exempel	Mönster av variation	Fokuserade aspekter	Möjligt att urskilja	Lektion
$1-3$ $3+2$	Invariant: positiva tal Varierar: räknesättet	Riktning, plats, avstånd	Riktning, plats, avstånd	1
$2-4$. $-2-4$	Invariant: subtrahend, räknesättet Varierar: minuend	Riktning, plats, avstånd	Plats, avstånd	2
$3-1$ $1-3$	Invariant: positiva tal, räknesättet Varierar: placeringen av talen 1 och 3	Räknesätt	Resultatet	3
$3-1$ $1-3$ $-2-3$. $-2-4$	Invariant: räknesättet, subtrahenden är positiv Varierar: minuenden (positiv och negativ)	Tecken för subtraktion, tecken för negativt tal	Skillnaden mellan tecken för subtraktion och tecken för negativt tal	4

Figur 21. *Vad som gjordes möjligt att urskilja under lektion 1-4 utifrån de mönster av variation som olika exempel skapar.*

Av Figur 21 framgår att eleverna under lektion 1 gavs möjlighet att urskilja riktning, plats och avstånd på tallinjen. Eleverna i grupp 1 klarade efter lektionen, i stor utsträckning av att visa hur $4-7$ räknas ut på en tallinje där inga tal fanns utplacerade. Möjligen kan detta förklaras genom att olika representationer av tal antingen aktivt användes eller refererades till under lektion 1. Läraren använde i varierande utsträckning strukturen med tal som plats och tal som avstånd, trots att vi ännu inte hade diskuterat detta. Drygt en tredjedel av eleverna i grupp 1 kunde beräkna $-2-2$ på eftertestet (se Tabell 7). Nästan hälften av eleverna svarade att subtraktionen resulterar i 0 eller -0.

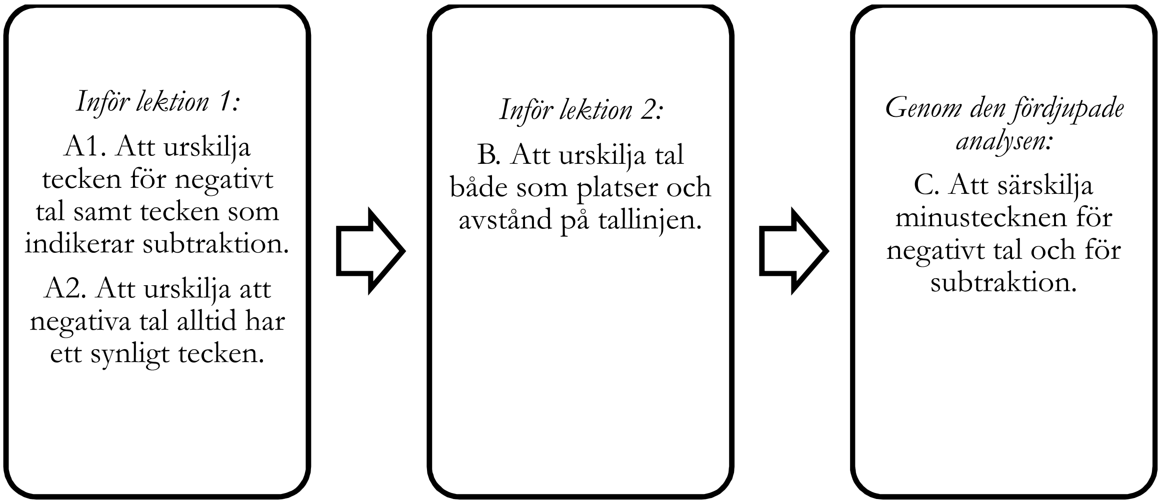
Under lektion 2 gavs eleverna möjlighet att urskilja plats och avstånd på tallinjen. De båda exemplen relaterades till varandra genom att läraren ställde frågan om differenserna var lika stora. (Figur 21). Det första exemplet genomfördes genom att läraren rörde sig mellan två olika representationer av tal: numeriska symboler och en horisontell tallinje. Det andra exemplet skrevs visserligen upp med numeriska symboler under det första exemplet och relaterades i diskussionen till detta, men beräkningen skrevs inte ut på tallinjen och inte heller skrevs differensen ut med siffror. En viss form av samtidighet har ändå ansetts förekomma mellan exemplen, eftersom diskussionen i klassrummet utmärktes av att exemplen relaterades till varandra. Även eleverna i grupp 2 klarade efter lektionen, i stor utsträckning av att visa hur $4-7$ räknas ut på en tallinje. Drygt hälften av eleverna kunde beräkna $-2-2$ på eftertestet. Något mer än en handfull elever svarade fortfarande att subtraktionen resulterar i 0 eller -0.

Även under lektion 3 pendlade läraren mellan två olika representationer av tal: numeriska symboler och fingrar. Beräkningar som skedde med hjälp av fingrarna fanns dock aldrig illustrerade på tavlan. Det har därför tolkats som att dessa beräkningar skedde i sekvens och inte samtidigt. Aspekten som fokuseras är vilket räknesätt det handlar om och därmed görs det möjligt att urskilja vad resultatet av subtraktionerna blir (Figur 21). Att använda fingrarna för beräkningar medförde att tal huvudsakligen betraktades som kvantiteter under lektionen. Ingen av eleverna i grupp 3 klarade på eftertestet av att visa hur $4-7$ räknas ut på en tallinje. Inte heller kunde eleverna beräkna $-2-2$ på eftertestet. Majoriteten av eleverna svarade att subtraktionen resulterar i 0 eller -0.

De sätt varpå exemplen genomfördes under lektion 4 liknar till stor del föregående lektion. Skillnaden består i att beräkningarna av de fyra exemplen, med hjälp av både numeriska symboler och en horisontell tallinje som representation för tal, fanns samtidigt på tavlan. Minustecknets olika innebörder fokuseras under lektion 4. Detta gör att eleverna erbjuds möjlighet att urskilja skillnaden mellan tecknet för subtraktion och tecknet för negativt tal (Figur 21). Majoriteten av eleverna i grupp 4 klarade av att visa hur $4-7$ räknas ut på en tallinje samt att beräkna uppgiften $-2-2$ på eftertestet (Tabell 6 och 7).

Omformulering och precisering av den tredje kritiska aspekten

Learning study-gruppens analys- och planeringsmöten resulterade i två formuleringar kring vad som skulle kunna vara kritiskt när det gäller att urskilja tecken för subtraktion och tecken för negativt tal (Figur 22 A1, A2 och B). I den fördjupade analys som genomfördes efter avslutad learning study, preciserades den kritiska aspekten ytterligare (Figur 22 C).



Figur 22. *Precisering av den tredje kritiska aspekten samt när respektive aspekt formulerades.*

Redan inför testkonstruktionen och planeringen av lektion 1 antog learning study-gruppen att minustecknets olika innebörder skulle kunna formuleras som en förmodad kritisk aspekt (Figur 22 A1 och A2). Underlag för denna formulering hämtades från forskning där en sammanblandning av minustecknets olika innebörder beskrivs som ett välkänt hinder för att förstå de negativa talens natur (Gallardo, 1995; Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004). Eftersom de båda tecknens innebörd tenderade att blandas ihop under första lektionen diskuterade learning study-gruppen en modell inspirerad av Lakoff och Núñez (2000), där tal betraktades som platser eller avstånd på tallinjen. Denna modell formulerades som en kritisk aspekt, eftersom vi insåg att eleverna inte betraktade tal som både plats och avstånd, och användes under lektion 2-4 (Figur 22 B). Aspekten fungerade stödjande både för oss lärare och för eleverna genom att peka ut hur additioner och subtraktioner skulle kunna struktureras på tallinjen (Excerpt U, V och X). Utifrån den fördjupade analysen tolkades det som att även den tredje aspekten handlar om att särskilja något från någonting annat, nämligen minustecknets olika innebörder. Det var inte förrän i lektion 4 som minustecknets olika innebörder explicit lyftes fram för diskussion. Men denna diskussion verkar ha haft avgörande betydelse för vad som gjorts möjligt för eleverna att få syn på.

Under lektion 4 resonerade eleverna om vad de olika tecknen i exemplet $-2-3$ innebär. Denna diskussion verkar vara betydelsefull för att bli bekant med de negativa talen. En elev föreslår så småningom att ”Det kan vara en minustvåa minus tre.” (Excerpt W). Läraren kompletterar detta uttalande med att sätta ut ett plustecken framför talet 3. När nästa exempel $-2-4$ ska beräknas frågar en elev om talet 4 är negativt eller positivt (Excerpt X). En annan elev förklarar att talet 4 är positivt eftersom det endast finns *ett* minustecken mellan talen. Läraren förstärker skillnaden mellan tecknen genom att ringa in de två talen i uppgiften. Eleven som ställde frågan verkar förstå att minustecknen har olika innebörd i exemplet. Det är också så att eleverna i grupp 4 uppvisade hög svarsfrekvens när det gäller att placera tal på en tom tallinje samt att beräkna uppgiften $-2-2$ på eftertestet (Tabell 6 och 7).

Utifrån elevernas resonemang framstår det som avgörande att kunna skilja minustecknets olika innebörder åt. Genom den fördjupade analysen omformulerades därför aspekten till: ”Att särskilja minustecknen för negativt tal och för subtraktion” (Figur 22 C).

7. KONKLUSION OCH DISKUSSION

Efter en inledande konklusion diskuteras de tre kritiska aspekterna i förhållande till tidigare forskning. Två olika biresultat av uppsatsen diskuteras, liksom kritiska reflektioner och förslag till fortsatt forskning.

7.1 ATT BLI BEKANT MED DE NEGATIVA TALEN

Resultatet av studien visar att det genom undervisning kan göras möjligt för elever i årskurs 2 och 3 att utvidga talområdet från naturliga tal (N) till hela tal (Z), det vill säga att bli bekant med de negativa talen. För att förstå att de negativa talen, liksom de naturliga talen, också är tal behöver eleverna kunna särskilja två negativa tals värden. De behöver också kunna särskilja minuendens och subtrahendens funktion i en subtraktion, samt särskilja minustecken som indikerar negativt tal och minustecken som indikerar subtraktion.

7.1.1 ATT SÄRSKILJA TVÅ NEGATIVA TALS VÄRDEN

I learning study-gruppen nådde vi, under lektion 4, en viss framgång när det gäller att synliggöra de negativa talens värde. Majoriteten av eleverna (10 av 14) kunde efter lektionen avgöra vilket av fem negativa tal som hade störst värde. Ball (1993) menar att kärnan av en förståelse av negativa tal handlar om att samtidigt förstå att -5 är större än -1 om *magnituden* fokuseras, men mindre om *värdet* fokuseras. Utifrån denna uppsats resultat är denna beskrivning intressant att diskutera. Redan från början av learning studyn antogs tals olika värden vara en kritisk aspekt, medan tals olika magnituder *inte* antogs vara kritiska. När det gäller learning studyn så framträder vissa skillnader mellan hur aspekten om tals värde synliggjordes under lektion 1-3 och lektion 4. Under lektion 1-3 gjordes tals olika värden möjligt att jämföras endast på ett implicit sätt. Det innebär att eleverna inte tillfrågades vilket tal som var värt mest, men att olika exempel på operationer med heltal ändå genomfördes. Detsamma sker i Balls (Ball, 1993) studie. Det ligger nära till hands att anta att eleverna genom en sådan undervisning erbjuds möjlighet att få syn på någonting som handlar om negativa tals egenskaper, exempelvis att de positionerar sig nertill i våningshuset eller till vänster på en horisontell tallinje. Men om målsättningen är att eleverna ska förstå hur de negativa talens egenskaper skiljer sig från de positiva när det gäller talens värden, framstår inte en sådan undervisning som tillräcklig.

Under lektion 4 användes den grupp av exempel som redan inledningsvis i learning studyn planerats utifrån variationsteoretiska principer om variation, urskiljning och samtidighet (Lo, 2012; Mason, 2015). De första två talen som jämfördes (-2 och 2) innebar inga svårigheter för eleverna. När värdet av -3 och 2 skulle jämföras utmanades elevernas kunskaper från det naturliga talområdet. Plötsligt är den lägre siffran mer värd än den högre siffran, eftersom den högre siffran har ett minustecken framför. Utmaningen blev dock ännu större när två negativa tal skulle jämföras (-3 och -2). Uppfattningen uttrycktes att det var -3 som hade det största värdet. Frågan är om läraren i det skedet borde ha förklarat att magnituden av -3 är större än magnituden av -2. Kanske skulle ett sådant resonemang, precis som Ball (1993) föreslår, ytterligare berikat elevernas bekantskap med de negativa talen. Istället valde läraren under lektion 4 att hänvisa till tallinjens värdeökningspil, vilket medförde att flera elever kunde avgöra vilket tal som var värt mest. Då eleverna i Balls studie uppmanades att ange ett tal som var mindre än (*less than*) -4, angav ungefär hälften av de 19 eleverna ett tal som var större (*more*), exempelvis talet -2. Enligt Ball fokuserade dessa elever enbart talens magnituder (a.a.). Ett liknande resultat visade sig i learning studyn efter lektion 1-3, eftersom över hälften av eleverna (32 av 50) angav att -9 har ett större värde än -1.

7.1.2 ATT SÄRSKILJA MINUENDENS OCH SUBTRAHENDENS FUNKTION I EN SUBTRAKTION

Resultatet pekar även mot att eleverna behöver kunna särskilja minuendens och subtrahendens funktion i en subtraktion. Denna kritiska aspekt har sitt ursprung i att urskilja att subtraktion inte lyder under den kommutativa lagen. På liknande sätt resonerade Kullberg (2010) som kom fram till att det inte räckte att eleverna urskilde att den kommutativa lagen inte gäller för subtraktion, utan att de också behöver få syn på att subtraktion kan ses som en jämförelse (skillnad) sedd från den första termen (a.a.).

Kullberg (2010) lyfter fram vikten av att inta ett *perspektiv* där subtraktioner alltid betraktas med utgångspunkt från den första termen, det vill säga minuenden. Detta resonemang har stora likheter med vad som identifierats i denna uppsats. Som tidigare nämnts finns det en hel del forskning om att elever tenderar att använda den kommutativa lagen i subtraktionsberäkningar (t.ex. Kilhamn, 2011; Olteanu & Olteanu, 2012). Däremot framstår det som betydligt svårare att hitta forskning som har fördjupat sig i de funktioner i en subtraktion som gör att kommutativa lagen inte gäller. Enligt min tolkning av Kullberg (2010) bidrar det fokus som läggs på ”perspektivet” till att ta ett steg mot ett fördjupat lärande om varför den kommutativa lagen inte gäller vid subtraktionsberäkningar. I denna uppsats tas ytterligare ett steg, genom att det som eleven behöver få syn på kan beskrivas ännu mer preciserat. Istället för att diskutera det perspektiv som är nödvändigt att inta används begreppen minuend och subtrahend. Formuleringen ”att särskilja minuendens och subtrahendens funktion” syftar mer till att betona vad respektive terms funktion är i en subtraktion, samt att termernas respektive funktion inte enbart behöver urskiljas utan även skiljas åt.

7.1.3 ATT SÄRSKILJA MINUSTECKEN FÖR NEGATIVT TAL OCH MINUSTECKEN FÖR SUBTRAKTION

Resultatet visar även att eleverna behöver kunna särskilja minustecken för negativt tal och minustecken för subtraktion. Som nämnts genom uppsatsen är denna aspekt väl beskriven inom didaktisk litteratur (t.ex. Kilhamn, 2011; Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004). Även matematiker har genom historien funderat kring minustecknets olika innebörder (Heeffer, 2011; Schubring, 2005). Det som är särskilt intressant med denna kritiska aspekt är att trots att den är så väl beforskad så hade vi stora svårigheter att iscensätta aspekten i undervisningen.

Redan från början av learning studyn formulerades exempel som antogs kunna rikta elevernas uppmärksamhet mot att minustecknet kan ha olika funktioner i en subtraktion. Det var dock endast under lektion 2 och lektion 4 som subtraktioner som inleds med ett negativt tal användes. Då subtraktioner inleds med ett negativt tal, som i $-2-3$, kan minustecknets olika innebörder ställas mot varandra så att eleverna ges möjlighet att få syn på att termerna kan vara positiva och negativa tal. Även om det i grupp 1 och 2 skedde en viss ökning av svarsfrekvensen på en liknande uppgift i eftertestet, var det efter lektion 4 som störst ökning skedde. Eleverna och läraren initierade under lektion 4 ett resonemang om vad de olika tecknen i subtraktionsexemplet kan innebära, vilket är anmärkningsvärt eftersom en sådan diskussion inte förekommit under någon av de andra lektionerna.

Diskussionen mellan eleverna och läraren under lektion 4 sammanfattas här eftersom lektionssekvensen är intressant utifrån tidigare forskning om hur elever hanterar eller bör hantera minustecknets olika innebörder.

> En av eleverna jämför differensen av $1-3$ vars beräkning finns kvar på whiteboarden, med minuenden i exemplet $-2-3$. Eleven kommer fram till att minuenden är ”en negativ tvåa” och betraktar även termen 3 som ett negativt tal, men blir motsagd av en elev som inte håller med. Läraren pekar då på de båda minustecknen och förklarar att de har olika innebörd, trots att de ser likadana ut.
>
> Eleven som identifierade minuenden som en negativ tvåa, får syn på att ”det kan vara en minustvåa minus tre”. Då exemplet $-2-4$ ska beräknas på tallinjen utbrister en elev att hon ”inte ens fattar uppgiften”. Eleven ställer frågan om det är en negativ eller en positiv fyra. En annan elev förklarar att fyran är ”vanlig” därför att det bara är ett tecken mellan termerna. Läraren utvecklar detta resonemang genom att ringa in de båda termerna -2 och 4. Eleven som först inte ens förstod exemplet ger uttryck för att hon har förstått. (Sammanfattning av diskussioner under lektion 4, Jfr. s. 74-75.)

Den diskussion som förs i utdraget ovan berör, enligt min uppfattning, det som både Lamb et al. (2012) och Vlassis (2004) kallar för att bli *flexibel* i sina tolkningar av minustecknet. Lamb et al. (a.a.) ger förslag på hur grunden för ett flexibelt tänkande kring minustecknen kan utvecklas i klassrummet. De föreslår följande diskussion mellan elever och lärare:

> Student work: A student remarks,”$-3-5$[7] has two negatives so my answer is -8.”
> Teacher Questions: I see one negative (point to -3) and a subtraction sign (point to the subtraction sign). Can you explain how you see two negatives? (Lamb et al., 2012, s. 7)

Diskussionen mellan eleven och läraren som Lamb et al. (2012) föreslår har stora likheter med den diskussion som fördes under lektion 4 i learning studyn och som sammanfattades ovan. En likhet är att läraren inte per automatik berättar vad som är ”rätt”, utan olika förslag ställs mot varandra. Under lektion 4 ställs två elevers uppfattningar (termen 3 är ett negativt tal/är inte ett negativt tal) mot varandra, medan Lamb et als. förslag innebär att elevens och lärarens uppfattningar ställs mot

[7] Lamb et al., (2012) använder ett något mindre minustecken som symbol för ett negativt tal.

varandra. Under lektion 4 ställer läraren de olika minustecknen emot varandra genom att berätta att tecknen har olika innebörd, vilket även läraren gör i Lamb et als. (a.a.) förslag. Då inser eleven, i lektion 4, att det handlar om en negativ tvåa som ska subtraheras med -3. I exemplet $-2-4$ fälls en intressant kommentar av en av eleverna, nämligen att fyran är "vanlig" därför att det bara är ett tecken mellan termerna. Frågan är vilken diskussion som hade uppstått om läraren fört resonemanget vidare och frågat eleverna vad som skulle hända om det var två minustecken mellan termerna.

I bakgrundskapitlet i denna uppsats lyftes, utifrån Lamb et al. (2012), tre olika tolkningar av minustecknet fram. Författarna pekar på vikten av att elever är flexibla och lär sig att röra sig mellan olika tolkningar av minustecknet. De lyfter särskilt fram betydelsen av "motsatsen av", vilket exempelvis innebär att betrakta $--4$ som motsatsen till -4. Så långt nådde vi inte i learning studyn, även om eleven som pratade om att det endast finns *ett* tecken mellan termerna kanske skulle uppskatta en sådan diskussion. Både Lamb et al. (2012) och Vlassis (2004) menar att ett första steg mot att använda minustecknen flexibelt är att lära sig att urskilja minustecknets olika innebörder. Utifrån Vlassis (a.a.) och Lamb et als. (a.a.) beskrivning av att vara flexibel i användandet av minustecknen kan denna uppsats bidra med kunskap om hur det första steget mot en flexibilitet kan tas.

Den elev som nämns i sammanfattningen betraktar först de båda termerna i subtraktionen $-2-3$ som negativa, men uttrycker sedan att termen 3 kan vara positiv eftersom det endast finns ett minustecken mellan termerna. Resonemanget som förs anknyter till det som Bishop et al. (2014b) utifrån bland annat Lakoff och Núñez (2000), benämner en *formell* förståelse av tal. Enligt Bishop et al. kännetecknas förståelsen av att eleverna närmar sig tal på ett algebraiskt sätt genom att generalisera från vad de redan vet är sant om heltal och operationer på dem (a.a.). Eleven vet förmodligen utifrån sin kunskap om operationer att ett minustecken som placeras mellan två termer indikerar att en subtraktion ska genomföras. Det kan vara så att eleven, utifrån sin kunskap om subtraktioner, inser att termen 3 borde vara ett positivt tal.

Tidigare matematiker hade svårigheter med att acceptera att tal inte alltid behöver vara bundna till kvantiteter (Schubring, 2005). Eleven som under lektion 3 hävdar att "man kan ta bort hur mycket som helst från 0, det blir fortfarande 0" (Excerpt N, s. 60), betraktar förmodligen tal som kvantiteter. Elevens resonemang anknyter till det som Bishop et al. (2014b) utifrån bland annat Lakoff och Núñez (2000), benämner en *kardinal* förståelse av tal. Under lektion 3 användes inte tallinjen som representation för tal, vilket kan ha medverkat till att det som Bishop et al. (a.a.) benämner en *ordinal* (a.a.) förståelse av tal inte kom fram. Schubring (2005) hävdar att en syn på tal som kvantiteter hindrar förståelsen av begreppet negativa tal.

7.2 METAFORER OCH/ELLER REPRESENTATIONER SOM HJÄLPMEDEL FÖR ATT FÅ SYN PÅ DE NEGATIVA TALEN

I uppsatsens inledning och syfte framfördes tankar om att denna uppsats skulle kunna utmana ett oreflekterat användande av metaforer och/eller representationer. Detta har inte formulerats som en forskningsfråga, men skulle kunna ses som ett biresultat av uppsatsen.

Kilhamn (2011) uppmärksammade att fokus i undervisningen om negativa tal ibland på ett oreflekterat sätt hamnar på metaforer av negativa tal som exempelvis termometern. Kilhamn (a.a.) konstaterade också att medan läraren hade det matematiska objektet i fokus, tenderade eleverna istället att fokusera den fysiska verkligheten. Utifrån den learning study som uppsatsens resultat utgår ifrån är Kilhamns resonemang intressant. I learning study-gruppen la vi märke till att varken termometern eller våningshuset med självklarhet ansågs visa olika tal. Vid learning study-gruppens första möte hamnade diskussionerna på vilka olika metaforer och/eller representationer för tal som skulle kunna användas, bland annat pratade vi om pengar och våningshus. Vi diskuterade då, i likhet med Ball (1993), vilka metaforer eleverna mötte i vardagen. Vid en tillbakablick på vilka metaforer och/eller representationer som har använts i uppsatsen är det inte längre självklart att vardagsnära metaforer är att föredra. Framförallt under lektion 1 och lektion 3 identifierades uttalanden från eleverna som kan tyda på att själva metaforen tenderade att skymma den idé som lärarens undervisning syftade till att lyfta fram. Detta var särskilt tydligt under lektion 3 då en elev betraktade markplan som en ”hall” och inte som en metafor för talet 0. Vi kunde också se att de begrepp som användes i arbetet med termometern upplevdes som svårbegripliga för eleverna.

En stor skillnad mellan föreliggande studie och Balls (Ball, 1993) studie har att göra med i vilket skede av planeringen som metaforer och/eller representationer för tal kommer in. Ball granskade initialt olika modeller för negativa tal och valde, trots att hon kände till de matematiska begränsningarna, att använda en byggnad med flera våningar både över och under markytan. Även om vi i learning study-gruppen inledningsvis diskuterade vardagsnära metaforer, så var ambitionen att låta gruppen av exempel styra valet av metafor och/eller representation. Med utgångspunkt i Marton (2006) lyfter Mason (2002) fram betydelsen av att utforma exempel som stödjer eleven i att uppmärksamma den matematiska idé som är aktuell. Under såväl lektion 3 som 4 användes följande exempel: $3+1, 1+3, 3-1$ samt $1-3$ för att dra uppmärksamhet till att subtraktion inte kan hanteras kommutativt (Figur 15, s. 63). Exemplen är planerade utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv (Marton, 2015) där tal, talens placering samt räknesätt som används är planerade utifrån att enbart det ska variera som eleven behöver få syn på för att ett lärande ska göras möjligt. Mason (2002) betraktar matematiken som ”the discipline of noticing” och menar att det som skiljer ett exempel från ett annat, behöver uppmärksammas av eleven för att ett lärande ska kunna ske. Mason (a.a.) hävdar att man i undervisningen bör träna på att lägga märke till samt kunna återberätta hur exemplen är uppbyggda, dvs. vad som är lika och vad som är olika i exemplen. Både under lektion 3 och 4 gav elever uttryck för att de hade uppfattat likheter och olikheter i det mönster som exemplen bildade. Men när det gäller resultatet på eftertestet avseende uppgifter där en negativ differens söktes, visade eleverna i grupp 3 betydligt lägre svarsfrekvens. Medan 3 av 15 elever i grupp 3 besvarade uppgiften $4-6$ korrekt, så var motsvarande lösningsfrekvens 10 av 14 i grupp 4. Det som skilde sig åt mellan lektionerna var vilka representationer för tal som användes och hur dessa användes. Men även vilken förståelse av tal som var framträdande skiljde lektionerna åt.

Av resultatkapitlet framgår att under lektion 3 användes numeriska symboler samt fingrar, som representationer vid beräkning av de fyra exempel som nämndes ovan. Under lektion 4 användes istället numeriska symboler samt en horisontell tallinje som representation för tal. Att kunna växla mellan olika representationsformer ses av Duval (2006) som det mest centrala för lärandet i matematik. Han menar att matematiken endast är tillgänglig via dess semiotiska representationer, vilket gör att olika system av representationer måste jämföras. Duval lyfter fram två olika typer av transformationer: *treatment* (behandling) och *conversion* (konvertering). Treatment innebär omvandling inom ett specifikt system, t.ex. $4 - 3 \neq 3 - 4$, medan conversion innebär omvandling mellan olika system t.ex. från bild: ○○○○ till symbol: 4. Med Duvals (a.a.) terminologi skulle den jämförelse eller omvandling som skedde mellan representationerna under lektion 3 och 4, båda kunna ses som *conversions*, vilket innebär omvandlingar mellan olika representationssystem. Denna typ av omvandling är, enligt Duval, mer komplex eftersom den kräver att objektet känns igen i två olika representationer som ofta inte har något uppenbart gemensamt. Utifrån min tolkning av Duval (a.a.) skulle undervisningen, när det gäller exemplen ovan, kunna ses som lika framgångsrik under både lektion 3 och 4. Analysen av lektionerna och lösningsfrekvensen på eftertestet indikerar dock att undervisningen under lektion 4 kan betraktas som mer framgångsrik.

Som redan nämnts var exemplen planerade utifrån variationsteoretiska principer. Det var också så att eleverna och lärarna under båda dessa lektioner diskuterade likheter och olikheter mellan exemplen. En skillnad mellan lektion 3 och 4 handlar om *hur* representationerna användes. Under lektion 3 visades först exemplet med numeriska symboler därefter kontrollräknade eleverna och lärarna tillsammans, med hjälp av fingrarna som representation för tal. Under lektion 4 räknades additionsexemplen ut på en horisontell tallinje, under denna visades en likadan tallinje på vilken subtraktionsexemplen räknades ut (Figur 18, s. 68). Eleverna kunde se fingerberäkningarna under lektion 3 just när de genomfördes, men endast beräkningarna som gjordes med numeriska symboler som representation fanns kvar på tavlan. Under lektion 4 däremot fanns två olika representationer för varje exempel kvar på tavlan. En annan skillnad handlar, som nämnts, om vilken förståelse av tal som var framträdande. Arbetet med tallinjen föreföll uppmuntra en mer ordinal förståelse av talen. Under lektion 4 fick talen sitt värde på tallinjen med stöd av pilen till höger som indikerar värdeökning. För att avgöra vilket tal som hade störst värde var eleverna tvungna att fokusera hur talen, i relation till värdeökningspilen, var ordnade på tallinjen. Under lektion 3 däremot arbetade man inte med tallinjen på detta sätt, utan använde istället fingrarna vid beräkningar. Det ligger nära till hands att tro att fingrarna för tanken till konkreta kvantiteter i högre utsträckning än vad tallinjen gör. Subtraktioner beskrevs under lektion 3 som att ”ta bort något från något annat”, medan dessa ord inte alls användes under lektion 4.

7.3 FRÅN ATT URSKILJA TILL ATT SÄRSKILJA

Att hela forskningsprocessen kan beskrivas som en utveckling från att *urskilja* kritiska aspekter till att *särskilja* kritiska aspekter, har betraktats som ett biresultat av denna uppsats.

De kritiska aspekterna formulerades initialt i learning studyn på ett ganska oprecist sätt. Som exempel kan nämnas den första kritiska aspekten om tals värde: ”Att urskilja tals värde inom talområdet -10 till 10”, inom vilken det finns ett stort utrymme för att skapa en mängd olika jämförelser av heltals värden. Att *urskilja* anger i detta fall endast en generell anvisning om vilka tal som bör jämföras eftersom ett positivt och ett negativt tal kan jämföras, liksom två tal som är positiva eller negativa. Att urskilja ett tals värde inom ett så stort talområde medför att det görs möjligt att få syn på ett eller flera tals värde/n, men inte nödvändigtvis att ett tals värde kan skiljas från ett annat tals värde. Det vill säga skillnaden mellan talens värde kommer inte med säkerhet fram.

Under forskningsprocessens gång omformulerades och preciserades de kritiska aspekterna och antog en mer distinkt formulering. Genom den slutliga formuleringen av den första kritiska aspekten: ”Att särskilja två negativa tals värden”, begränsades mängden av möjliga exempel till att enbart omfatta jämförelser av de negativa talen. Då två negativa tal ställdes mot varandra kunde ett tals värde skiljas från ett annat tals värde, skillnaden mellan talens värde synliggjordes.

För att illustrera skillnaden mellan att urskilja och att särskilja kan exemplet i kapitel 4 (Figur 4), där antalet vinklar i en triangel ställdes emot antalet vinklar i andra geometriska figurer, användas. Antalet vinklar kan ses som en dimension av variation som öppnas upp genom att triangelns vinklar (3 st.) ställs mot kvadratens och rektangelns vinklar (4 st.) samt mot femhörningens vinklar (5 st.). Det skulle då göras möjligt för eleverna att urskilja att antalet vinklar i en triangel skiljer sig åt från antalet vinklar i de övriga figurerna. I en lärandesituation skulle eleverna förväntas svara på hur många vinklar en triangel har, men inte nödvändigtvis hur många vinklar någon av de andra figurerna har. Men om eleverna istället ska särskilja antalet vinklar från varandra efterfrågas hur många vinklar var och en av de olika figurerna har.

Utifrån denna uppsats resultat innebär det att den första kritiska aspekten, då den formulerades som ”att särskilja”, samtidigt säger något om de två olika negativa talens värde och vad som skiljer dem åt. Till skillnad från då en kritisk aspekt formuleras i termer av ”att urskilja”, handlar särskilja om att synliggöra två kritiska drag i lika hög grad samt även relationen mellan dessa drag. Detta resonemang kan även appliceras på aspekt 2 och 3. Från den mer generella formuleringen ”att urskilja riktningen på tallinjen” omformulerades aspekt 2 till ”att särskilja minuendens och subtrahendens funktion i en subtraktion”. Minuendens respektive subtrahendens funktioner är lika viktiga att få syn på, liksom relationen mellan dem. Även när det gäller den tredje kritiska aspekten syns detta mönster. För att få syn på två innebörder av minustecknet är det nödvändigt att skilja dessa innebörder åt. Båda de innebörder som eleverna behöver få syn på är lika viktiga, liksom relationen mellan dem.

Forskningsprocessen i denna uppsats utmärks av att innehållet i de kritiska aspekterna utvecklades från att urskilja något till att särskilja något, från någonting annat. Frågan är om, och i så fall i vilken utsträckning, detta kan anses bidra till en utveckling av variationsteorin. Marton (2015) beskriver vikten av att utveckla kraftfulla sätt att se på lärandeobjektet:

> …in order to become capable of handling certain situations and tasks in powerful ways, we have to learn to see those situations or tasks in powerful ways. We have to learn to discern the features that are critical in relation to what we are trying to achieve and take them into consideration simultaneously (Marton, 2015, s. 72).

För att bli kapabla att hantera särskilda situationer eller uppgifter på kraftfulla sätt måste vi, enligt Marton (2015) lära oss att se dessa situationer eller uppgifter på kraftfulla sätt. Med *kraftfull* avses att vi måste lära oss att urskilja de drag som är kritiska i förhållande till vad vi försöker uppnå, och ta hänsyn till dem samtidigt. Skillnader i förståelse kan enligt Marton (a.a.) förklaras i termer av att den lärande kan beskriva en viss aspekt av något på ett mer eller mindre exakt sätt, vilket i sin tur beror på om den lärande gör eller inte gör vissa distinktioner. För att optimera möjligheten för den lärande att göra dessa distinktioner, måste det vara av största vikt att undervisningen förmår identifiera samt specificera de kritiska aspekterna. I detta arbete skulle det kunna vara meningsfullt att, som i denna uppsats, initialt använda sig av ”att urskilja” för att i slutet av specificeringsprocessen identifiera de kritiska drag som måste ”särskiljas”. Att använda dessa begrepp kan ses som ett sätt att medvetandegöra den iterativa processen där aspekterna hela tiden förfinas och preciseras. Det ger en indikation på att processen handlar om att komma djupare in i lärandeobjektet genom att utforska vilka aspekter som är kritiska.

Även Mårtensson (2015) använder sig av begreppen ”urskilja” och ”särskilja” för att beskriva den förändrade kunskapen om vad som sågs som kritiska aspekter i två olika learning studies i matematik. De aspekter som i Mårtenssons studie beskrivits som att särskilja något från något annat kännetecknas av att de samtidigt belyser: ett specifikt ämnesinnehåll, elevers erfarande av ämnesinnehållet samt på vilket sätt detta innehåll kan hanteras i undervisningen för att eleverna ska lära sig det som planerats. Mårtenssons (a.a.) beskrivning av innehållet i de preciserade kritiska aspekterna skulle även kunna gälla för föreliggande uppsats. Det sätt som aspekterna formulerats på säger både något om vad som bör lyftas fram i undervisningen, exempelvis *två olika negativa tal*, samt hur detta bör göras, de båda negativa talens olika *värden ska särskiljas*.

7.4 KRITISKA REFLEKTIONER OCH FÖRSLAG PÅ FORTSATT FORSKNING

Uppsatsens frågeställning formulerades som: Vad behöver elever i årskurs 2 och 3 lära sig för att bli bekanta med de negativa talen? Resultatet utgörs av de tre kritiska aspekterna: Att särskilja två negativa tals värden, att särskilja minuendens och subtrahendens funktion i en subtraktion samt att särskilja minustecken för negativt tal och minustecken för subtraktion. Som ett slags biresultat har diskussioner också förts kring att utmana det oreflekterade sätt som metaforer, enligt Kilhamn (2011), verkar användas på i undervisningen. Att hela forskningsprocessen kan beskrivas som en utveckling från att *urskilja* kritiska aspekter till att *särskilja* kritiska aspekter, har också betraktats som ett biresultat av denna uppsats.

Resultatet av studien kan inte betraktas som helt nytt eller oväntat. Forskningsprojektet kan dock sägas ha haft ett annorlunda fokus, eftersom yngre elever än vad som är brukligt har undervisats om negativa tal. I denna uppsats har praktiken, med hjälp av variationsteorin och learning study, kunnat studeras och struktureras med teoretiska glasögon. Troligen kan det dock ses som en nackdel att lärare som deltog i learning studyn inte hade någon tidigare erfarenhet varken från undervisning om negativa tal, eller från arbete med variationsteorin och learning study.

Endast 27 av 64 elever i studien kunde på eftertestet avgöra det högsta värdet av fem negativa tal. Grupp 4 utmärker sig eftersom de i eftertestet kan jämföra negativa tals värde i högre grad än de andra grupperna. I grupp 4 är det 10 av 14 elever som efter lektionen kan avgöra vilket av de negativa talen som har det största värdet. Under den fjärde lektionen nådde vi således en viss framgång när det gäller att göra det möjligt för eleverna att särskilja två negativa tal. Detta kan uppfattas som ett värdefullt ämnesdidaktiskt bidrag, särskilt med tanke på att Ball (1993) inte ansåg sig ha lyckats fullt ut med att få sina elever att förstå hur negativa tals värden förhåller sig till varandra. Trots vår framgång kan det vara så att många olika faktorer bidrog till att det gick så bra. Kanske var just dessa elever extra intresserade av att lära sig nya begrepp inom matematiken. Det skulle också kunna ha betydelse att det var den undervisande lärarens andra lektion inom learning studyn. Kanske hade läraren med sig erfarenheter som påverkade undervisningens kvalité.

Tidigare diskuterades ett möjligt bidrag till variationsteorin, nämligen att specificeringsprocessen av de kritiska aspekterna skulle kunna beskrivas som att gå från ”att urskilja” till ”att särskilja”. Min upplevelse är att den process som dessa båda begrepp tillsammans beskriver, fångar de svårigheter vi hade med att hitta de språkliga formuleringar som bäst beskrev det vi ville sätta fokus på. Eftersom både variationsteorin och learning study samt undervisning om och lärande av negativa tal var ganska nya områden för oss i gruppen, blev det en stor utmaning att hitta adekvata formuleringar. Genom omformulering och precisering förändrades det språk som användes för att beskriva de kritiska aspekterna under learning studyns gång till att bli alltmer ämnesspecifika. Björkholm (2014) har genomfört och analyserat en studie i teknik på lågstadiet. I takt med att förståelsen för lärandeobjektet ökade, växte också behovet av att namnge de kritiska aspekterna utifrån hur modellerna bör konstrueras för att möta de tekniska funktionerna (a.a.). Likheten mellan Björkholms studie och föreliggande uppsats är att erfarenheten av lärandeobjektet inledningsvis var begränsat. Det vore därför intressant att genomföra en ny learning study där de ämnesspecifika formuleringar som växte fram genom learning studyn skulle kunna användas initialt.

Det kan ses som problematiskt att vi inte lyckades genomföra samtliga exempel som planerats i anslutning till de olika kritiska aspekterna förrän under den fjärde lektionen. I vilken utsträckning hade resultaten på elevtesten förändrats om de planerade exemplen hade genomförts redan från och med den första lektionen? För att få svar på frågan skulle undersökningen behöva upprepas i ett antal klasser. Hit hör också frågan om de kritiska aspekterna verkligen har identifierats. Finns det aspekter som vi inte upptäckte? Även om resultaten generellt sett var tillfredsställande efter lektion 4 så fanns det elever som inte besvarade uppgifterna korrekt. Vad var det som dessa elever ännu inte hade fått syn på?

De kritiska aspekter som identifierats i föreliggande studie kan sägas vara generella för det lärandeobjekt som valts. Det innebär att för lärandeobjektet ”Att förstå att de negativa talen existerar genom att inse att subtraktion av två positiva heltal kan ge negativ differens”, finns det vissa aspekter som är nödvändiga att ha urskilt. Om learning studyn skulle upprepas i en ny grupp av elever kanske vissa elever redan har urskilt de kritiska aspekter som identifierats i studien, medan andra elever ännu inte gjort det. Ett förslag till fortsatt forskning skulle kunna vara att använda sig av de kritiska aspekter som har identifierats i denna studie i en mellan- eller högstadieklass. Visserligen kan de kritiska aspekterna som regel inte användas rakt av, de måste relateras till ämnesinnehållet och elevernas upplevelser av lärandeobjektet (Marton et al., 2004). Men både Kilhamn (2011) och Vlassis (2004) har exempelvis träffat högstadieelever som inte kan skilja minustecknets innebörder åt. Vid en sådan undervisning skulle denna uppsats kunna ge viss vägledning.

Det kan också ses som problematiskt att det var en liten grupp elever som studerades (64 st.), dessutom har inget fördröjt eftertest[8] genomförts.

I inledningen ställdes frågor om det är möjligt och meningsfullt att få elever i årskurs 2 och 3 att bli bekanta med de negativa talen. Denna uppsats visar att det är möjligt och att det kan vara meningsfullt framförallt av två anledningar. För det första så framstod det, framför allt under lektion fyra, som att de naturliga talen fick en förändrad innebörd för eleverna. Genom införandet av negativa tal får även de tal som eleverna benämner som de ”vanliga” talen en laddning, det vill säga de blir positiva. För det andra kan förmodligen dessa elever anses ha utvecklat en grundläggande förståelse av begreppet negativa tal. Undervisning om negativa tal under de tidiga skolåren kan, enligt Otten (2009), förse elever med tidiga och värdefulla möjligheter att jobba med matematiskt tänkande. Jag tolkar Otten (a.a.) som att han betraktar elevernas arbete med negativa tal som en slags träning på att tänka mer abstrakt om tal. Kanske kan bekantskapen med negativa tal leda till en början av abstrakt resonerande.

Kilhamn (2011) föreslår att elever skulle kunna hjälpas till en god taluppfattning om de fick möta vissa aspekter av negativa tal betydligt tidigare än vad som sker idag, för att längre fram kunna förstå operationer med negativa tal. Empirin till föreliggande studie kan sägas uppfylla detta förslag eftersom fokus, med hjälp av beräkningar, har legat på att upptäcka eller bli bekant med de negativa talen.

[8] Med *fördröjt eftertest* avses att eleverna får göra eftertestet igen efter ett antal veckor för att se om effekten av undervisningen kvarstår.

SUMMARY

FROM NATURAL NUMBERS TO INTEGERS (FROM N TO Z) – WHAT CAN MAKE A DIFFERENCE TO STUDENTS´ POSSIBILITIES TO BECOME FAMILIAR WITH NEGATIVE NUMBERS?

BACKGROUND

Is it possible and meaningful to get students in grades 2 and 3 to become familiar with negative numbers? How should in that case such a teaching be organized? What is the educational content that students need to catch sight of to understand that negative numbers, as well as natural numbers, are numbers?

The concept of negative numbers has been perceived as difficult to understand for mathematicians throughout history (Bishop, Philipp, Whitacre, Schappelle & Lewis, 2014a). Research (ibid.) shows that mathematicians, historically, experienced the same obstacles to understand negative numbers as can be identified in today's students. Although the students' difficulties with negative numbers is well documented, Kullberg (2010) claims that the research does not usually pay attention to what content is taught and how students perceive this content. In light of the research mentioned, and that the Swedish curriculum (Skolverket, 2011b) only implicitly takes up the teaching of negative numbers, my interest was awakened in studying teaching and learning of negative numbers in grades 2 and 3.

Kilhamn (2011) and Ball (1993) suggest that many aspects of negative numbers can be highlighted much earlier than is the case today. Students would thereby be helped to a good understanding of numbers and then understand the operations with negative numbers (ibid.). In the teaching of negative numbers various metaphors that refer to everyday situations are often used (Lakoff & Johnson, 2003; Lakoff & Núñez, 2000). Both Ball (1993) and Kilhamn (2011) argue that it can be problematic to determine which metaphor that is optimal in different teaching situations. Duval (2006) argues instead that the focus should be on the different representations of numbers used in teaching and how these are communicated to students. He asks whether the way in which representations are used, facilitate or hinder students' understanding of what is to be learned (ibid.). Mason (2002) highlights with inspiration from Marton (2006), the importance of designing examples that support the student to pay attention to the mathematical idea that is supposed to be in focus in the lesson.

In this thesis focus moves from metaphors and representations to the specific mathematical content being studied. That is, the content that is taught will be in the foreground while metaphors and/or representations of numbers constitute the background. The option is then given to examine if it is the metaphors and/or representations that are central to students' understanding, or if there may be other factors in instruction that make a difference for students learning of negative numbers. This thesis contributes to research by investigating in detail what aspects students need to differentiate in order to become familiar with negative numbers. The research question is formulated as follows:

- What do students in grades 2 and 3 need to learn to become familiar with negative numbers?

THEORETICAL FRAMEWORK

The thesis is based on the theory of variation (Lo, 2012; Marton, 2015) which claims that students' problems in learning what was intended, may have to do with the fact that some critical aspects of the studied object have not yet been discerned by the student. A critical aspect can be described as a distinction that is necessary to discern in order to see the object of learning in a more developed and complex way (ibid.). Which aspects that are critical for a learning object can vary between different student groups. This means that the critical aspects need to be examined empirically.

Variation theory can be seen as a theoretical development of the research approach phenomenography (Marton & Booth, 2000; Runesson, 1999). Phenomenography explores people's perceptions of phenomena in the world around us, while the variation theory is also interested in how learning can be developed (Marton & Booth, 2000). Both are based on a non-dualistic ontology, where perceptions are constituted as a relationship between subject and object (Runesson, 1999).

According to variation theory it is necessary to experience differences before you experience similarities (Marton, 2015; Runesson, 2006). This assumption represents a sharp contrast to how learning is traditionally organized. (ibid.). To learn something is about going from an undivided whole, to being able to discern critical aspects of the learning object, and then returning to the whole with the knowledge of the relationship between the parts and the whole (Marton, 2015). The purpose of teaching is to enable students to discern the critical aspects. To achieve this, students must be given the opportunity to experience variation, discernment and simultaneity of the learning object. In this study this is done by using carefully constructed examples.

In a teaching situation that aims to discern aspects of the geometric object triangle, we must also highlight what is not a triangle. If the number of angles is considered to be a critical aspect of understanding what a triangle is, different geometric figures could be set against each other: The number of angles in a triangle set against the number of angles in a (A) square, (B) rectangle and (C) pentagon. The number of angles in the figures above could be called *critical features*. Awareness highlighted by experiencing the difference between two critical features is called *contrast*. When the student suddenly becomes aware of a critical feature by contrasting it with another critical feature he or she will separate the feature from the object of learning and a dimension of variation is opened (Marton, 2015). The number of angles is seen as a critical aspect, there is however no matter what the length of each side of the triangle is. In teaching, you can therefore also compare the similarities between different large triangles to separate the critical aspects from other aspects of the object (ibid.).

METHOD

The object of learning and its critical aspects are in focus in this thesis. Learning study offers a method where a specification process of the object of learning can take place (Carlgren, 2012). Learning study is a model for teacher development but can also, as in this thesis, be used for research purposes. It is characterized by an iterative design where I as a researcher collaborate with teachers to try to find and orchestrate the critical aspects. The method is interventionist, which means that interventions are done in teaching (ibid.). Learning study is characterized by a cyclic process which includes pre-test, planning of the lesson, conducting the lesson, posttest, analysis and revision (Lo et al., 2004; Pang & Marton, 2003).

The learning study was carried out during the autumn term of 2013, together with two teachers. 64 pupils from grades 2 and 3 participated in the learning study. Data for the analysis of the study consists of student tests, interviews and filmed lessons. Also notes from learning study meetings have been used in the analysis. In two of the four classes I was the teacher.

The pupils' understandings of the learning object were examined before and after each lesson. This was done with written pre- and post-test. A first analysis was made between each of the four lessons. The question that was focused was what was possible for the students to get sight of through the teaching as regards the critical aspects. An in-depth analysis of the data from the study was done after the intervention ended. The in-depth analysis contained a critical look back at the first analysis through questions such as: Is there evidence in the data to see that the critical aspects have really been identified, or is it something else that may be critical? That which the learning study group assumes is critical, is it made possible to learn during the lesson? With the help of which comparisons is this done?

RESULTS

The main result of the essay is the critical aspects. The aspects were reformulated and specified through the research process in the following way:

1. Before lesson 1: To discern the value of numbers in the numerical range -10 to 10.
   Before lesson 2: To discern the value of negative numbers in relation to other integers.
   Through the in-depth analysis: **To differentiate the value of two negative numbers.**

2. Before lesson 1: To discern the direction of subtraction on the number line.
   Before lesson 2: To discern that subtractions are not governed by the commutative law.
   Through the in-depth analysis: **To differentiate the function of the minuend versus the function of the subtrahend in a subtraction.**

3. Before lesson 1: To discern the sign for negative numbers and sign that indicate subtraction. To discern that negative numbers always have a visible sign.
   Before lesson 2: To discern numbers both as places and as distances on the number line.
   Through the in-depth analysis: **To differentiate the minus sign for negative numbers versus the minus sign for subtraction.**

To get the pupils to understand the idea behind each critical aspect, carefully constructed examples were used. The examples were based on the theory of variation which implies that a systematic use of variation could enhance learning (Marton, 2006). Through the learning study we realized that although the teachers were aware of the potential of the examples, these were not always easy to implement in the classroom.

Through the research process the critical aspects were specified from something to be *discerned* to that something should be *differentiated* from another.

DISCUSSION

The results of the thesis show that through teaching it can be possible for pupils in grades 2 and 3 to expand the range of numbers from natural numbers (N) to integers (Z), that is, to become familiar with negative numbers. To understand that negative numbers, as well as natural numbers, are also numbers, pupils need to differentiate the value of two negative numbers. Ball (1993) who conducted a similar study was not able fully to get her students to understand how negative number values relate to each other. In the first three lessons in our learning study no comparisons of number values at all were carried out. In the fourth lesson however, various number values were compared in relation to “the arrow of value increase” on the number line. Most of the students were then, according to the post-test, able to understand that -1 had a greater value than -9.

The pupils also need to differentiate the function of the minuend versus the function of the subtrahend. This result can be seen as a continuation of research conducted by Kullberg (2010). She highlights the importance of adopting a *perspective* where subtractions always are considered from the first term that is the minuend. In this thesis what the pupil needs to spot is described even more precisely. Instead of discussing the perspective that is necessary, the terms minuend and subtrahend are used. The phrase "to differentiate the function of the minuend and the subtrahend” refers more to emphasize the function of each term in a subtraction. Pupils not only need to know the right perspective, they also need to know the role of the minuend and the subtrahend.

Pupils also need to differentiate the minus sign indicating negative number and the minus sign indicating subtraction. This critical aspect is well-known in literature (Gallardo, 1995; Lamb et al., 2012; Vlassis, 2004). Despite this, it was not easy to implement it in the learning study lessons. As mentioned above we had planned to use carefully constructed examples, but these examples were not implemented as a whole until the fourth lesson. When examples such as $2-4$ and $-2-4$ were compared both by using numerical representation and a horizontal number line, the critical aspect became possible to catch sight of.

The results of the thesis also indicated that everyday metaphors were not always easy for the pupils to understand. In lesson 3 the house with many flats were interpreted not as a number line, but only as a house. That made it difficult to use the house to represent negative numbers. The pupils also seemed to experience that the concepts that related to the thermometer, for example degrees, were difficult to understand. Kilhamn (2011) found that teachers and pupils often understood everyday metaphors in different ways. The pupils that Kilhamn interviewed were not always aware of the mathematical content that the metaphor aimed to highlight (ibid.).

Through the research process the critical aspects were specified from something to be *discerned* to that something should be *differentiated* from another. This means for example that the first critical aspect, formulated "to differentiate", at the same time says something about each of the value of the negative numbers and also how the numbers relate to each other. It is also argued that this formulation in more detail describes how the instruction in the classroom should be structured. Even Mårtensson (2015) uses the terms "discern" and "differentiate" to describe the changing knowledge of what were seen as critical aspects in two different learning studies in mathematics. To differentiate something from something else highlights at the same time: a specific subject matter, students experiences of the subject content and how this content can be handled in teaching to get students to learn what is planned (ibid.)

REFERENSER

Adamson, B., & Walker, E. (2011). Messy collaboration: Learning from a learning study. *Teaching and Teacher Education, 27*(1), 29-36.

Aleksandrov, A. D. (1999). A General View of Mathematics. I A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, & M. A. Lavrent´ev (Red.), *Mathematics Its Content, Methods and Meaning.* New York: Dover Publications Inc.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93*(4), 373-397.

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2014a). Obstacles and affordances for integer reasoning: An analysis of children's thinking and the history of mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 19-61.

Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., & Schappelle, B. P. (2014b). Using order to reason about negative numbers: the case of Violet. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(1), 39-59.

Björkholm, E. (2015). Unpacking the object of learning. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *4*(3*)*, 194-208.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The journal of the learning sciences*, *2*(2), 141-178.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for "clinical" subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*(2), 126-139.

Carlgren, I., & Marton, F. (2001). *Lärare av imorgon*. Stockholm: Lärarförbundet.

Clapham, C., & Nicholsson, J. (2014). *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics.* Oxford University Press. doi: 10.1093/acref/9780199679591.001.0001

De Morgan, A. (1898). *On the study and difficulties of mathematics*. Hämtad 2015-09-12 från: http://catalog.hathitrust.org/Record/000395432.

Doverborg, E., & Pramling Samuelsson, I. (2012). *Att förstå barns tankar: Metodik för barnintervjuer*. Stockholm: Liber.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change* (Vol. 49). Buckingham: Open University Press.

Elliot, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal of Lesson and Learning Studies*, *1*(2), 108-125.

Gallardo, A. (1995). Negative numbers in the teaching of arithmetic. In D. Owans, M. Reed, & G. Millsaps (Red.), *Conference proceedings of the 17th annual meeting for the psychology of mathematics education in North America* (Vol. 1, s. 158-163).

Ohio: PME North America.
Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(2), 183-194.
Heeffer, A. (2011). Historical Objections against the Number Line. *Science & Education*, *20*(9), 863-880.
Ifrah, G. (2004). *Räknekonstens kulturhistoria* (Vol. 2). Stockholm: Wahlström & Widstrand.
Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers through metaphorical reasoning.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
Kinard, J. T., & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt kunnande.* Lund: Studentlitteratur.
Kiselman, C. O., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM).
Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned: Professional insights gained and shared by teachers of mathematics.* Gothenburg studies in educational sciences 293, Göteborg: Acta Universitatis Gothenburgensis.
Lakoff, G., & Johnson, M. (2003). *Metaphors we live by*. London: The University of Chicago Press.
Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from.* New York: Basic Books.
Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I., & Lewis, M. (2012). Developing symbol sense for the minus sign. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *18*(1), 5-9.
Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American educational research journal*, *27*(1), 29-63.
Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik*, *25*(1), 16-35.
Larsson, S. (2009). A pluralist view of generalization in qualitative research. *International Journal of Research & Method in Education, 32* (1), 25-38.
Linchevski, L., & Williams, J. (1999). Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, *39*(1-3), 131-147.
Lo, M. L. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning.* Göteborg Studies in educational sciences 323. Acta Universitatis Gothoburgensis.
Lo, M. L., & Marton, F. (2012). Towards a science of the art of teaching: Using variation theory as a guiding principle of pedagogical design. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, *1*(1), 7-22
Lo, M. L., Marton, F., Pang, M. F., & Pong, W.Y. (2004). Towards a Pedagogy of Learning. I F. Marton, & A. Tsui (Red.), *Classroom Discourse and the Space of Learning.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associate.
Marton, F. (1994). On the structure of teachers´ awareness. I I. Carlgren, G. Handal, & S. Vaage, (Red.), *Teachers' minds and actions. Research on teachers´ thinking and practice* (s 28-42). The Falmer Press: London.
Marton, F. (2003). Learning Study – pedagogisk utveckling direkt i klassrummet. I *Forskning av denna världen – praxisnära forskning inom utbildningsvetenskap*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Marton, F. (2006). Sameness and difference in transfer. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(4), 499-535.

Marton, F. (2015). *Necessary conditions of learning*. New York, N Y: Routledge.

Marton, F., & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The Space of Learning. I F. Marton, & A. Tsui (Red.), *Classroom Discourse and the Space of Learning*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associate.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). On some necessary conditions of learning. *The Journal of the Learning Sciences*, *15*(2), 193-220.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: RoutledgeFalmer.

Mumford, D. (2010). What's so baffling about negative numbers? A cross-cultural comparison. I C. S. Seshadri (Red.), *Studies in the history of Indian mathematics*. New Delhi, India: Hindustan Book Agency.

Mårtensson, P. *Att få syn på avgörande skillnader: Lärares kunskap om lärandeobjektet*. Dissertation Series No. 29. Jönköping: School of Education and Communication Jönköping University.

Nuthall, G. (2004). Relating classroom teaching to student learning: A critical analysis of why research has failed to bridge the theory-practice gap. *Harvard Educational Review, 74*(3), 273-306.

Olteanu, C., & Olteanu, L. (2012). Improvement of effective communication – the case of subtraction. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *10*(4), 803-826.

Otten, S. (2009). *Down and to the Left: Students´ Movement Toward Negative Numbers*. Michigan State University, SME 840.

Pang, M. F., & Marton, F. (2003). Beyond lesson study: Comparing two ways of facilitating the grasp of some economic concepts. *Instructional Science*, 31(3), 175-194.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Göteborg Studies in educational sciences 129. Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, U. (2006). What is it possible to learn? On variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research, 50*(4), 397-410.

Runesson, U. (2011). Lärares kunskapsarbete – exemplet learning study. I *Lärare som praktiker och forskare. Om praxisnära forskningsmodeller.* Stiftelsen SAF.

Runesson, U., & Gustafsson, L. (2012). Sharing and developing knowledge products from Learning Study. *International Journal of Lesson- and Learning Studies, 1*(3), 245–260.

Sollervall, H. (2011). Modeling external representations as mediators of meaning in the mathematics classroom. I *Proceedings of the 7th Conference of European Research in Mathematics Education (*s. 2513-2523). Hämtad 2014-09-12 från: http://www.mathematik.unidortmund.de/~erme/doc/cerme7/CERME7.pdf

Schubring, G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor, and intuition: Number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany.* Heidelberg: Springer.

Skolverket (2011a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, Lgr 11*. Stockholm: Fritzes.

Skolverket. (2011b) *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. Stockholm: Fritzes.

Starrin, B. (2004). Om distinktionen kvalitativ – kvantitativ i social forskning. I B. Starrin, & P.G. Svensson (Red.), *Kvalitativ metod och vetenskapsteori.* Lund: Studentlitteratur.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap.* New York: The Free Press.

Vetenskapsrådet. (2011). *God forskningssed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in `negativity´. *Learning and Instruction*, *14*(5), 469-484.

Watson, A., & Mason, J. (2006). Seeing an exercise as a single mathematical object: Using variation to structure sense-making. *Mathematical thinking and learning*, *8*(2), 91-111.

Whitacre, I., Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2012). Happy and sad thoughts: An exploration of children's integer reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 356-365.

Wilcox, V. B. (2008). Questioning zero and negative numbers. *Teaching Children Mathematics*, *15*(4), 202-206.

BILAGA 1. TIDPUNKTER OCH INNEHÅLL I LEARNING STUDYN

Aktivitet/deltagare	Datum och tid:	Innehåll:
Introduktionsdag Alla learning study-grupper och handledare	Vecka 33 14 augusti, heldag	Variationsteori, Learning study-cykeln, lärandeobjekt (LO) och kritiska aspekter (KA).
Möte 1 **Hela gruppen**	Vecka 35 26/8	Repetition, frågor kring introduktionsdagen. Information om Annas projekt, samt Learning study-cykeln.
Möte 2 **Hela gruppen**	Vecka 36 2/9	Konstruera förtest.
Anna	Vecka 36-37	Utprovning av förtest
Möte 3 **Hela gruppen**	Vecka 38 16/9	Redigera förtestet
Lärare 1, 2 och Anna	Vecka 38	Förtest genomförs i samtliga klasser.
Anna	Vecka 38	Intervju av elever utifrån förtestet.
Möte 4 **Hela gruppen**	Vecka 39 23/9	Analys av förtesten. Planering av lektion 1.
I. Lärare 1	Vecka 39	Genomför lektion 1, Eftertest
II. Anna	Vecka 39	Eftertestintervju med några elever.
Möte 5 **Hela gruppen**	Vecka 41 7/10	Analys av lektion 1.
Möte 6 **Hela gruppen**	Vecka 42 16/10	Planering lektion 2.
I. Lärare 2	Vecka 42	Genomför lektion 2, Eftertest
II. Anna	Vecka 42	Eftertestintervju med några elever.
Möte 7 **Hela gruppen**	Vecka 45 4/11	Analys av lektion 2.
Möte 8 **Hela gruppen**	Vecka 46 11/11	Planering av lektion 3.
I. Lärare 3	Vecka 46	Genomför lektion 3, Eftertest
II. Anna	Vecka 46-47	Eftertestintervju med några elever.
Möte 9 **Hela gruppen**	Vecka 48 25/11	Analys av lektion 3. Planering och genomförande av lektion 4.
Möte 10 **Hela gruppen**	Vecka 49 2/10	Analys och dokumentation av hela studien.
Redovisning	HT 2013/VT 2014	Någon form av redovisning kommer att ske, bland annat till XXXX.

Namn:____

1. Vilket tal i varje rad har störst värde? (Ringa in ditt svar).

a.

5	2	10	6	3

b.

0	-4	7	-3	-10

c.

-8	5	8	0	-5

d.

-9	-1	-6	-2	-5

2. Skriv det minsta tal du kan komma på! ____________________________

3. Räkna ut dessa uppgifter:

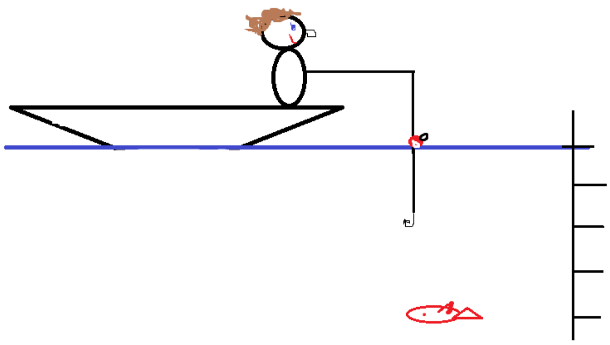
a. 3-2=_____ b. 2-3=_____ c. 6-4=______ d. 4-6=______

e. 2+2=_____ f. 2-2=_____ g. -2-2=_____ h. 0-3=______

4.

En dag var det 5 grader och nästa dag var det 2 grader kallare. Hur många grader var det då? ______________________

En dag var det 2 grader och nästa dag var det 3 grader kallare. Hur många grader var det då? ____________________________________



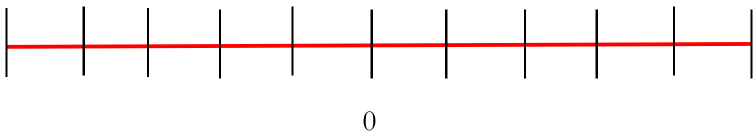
.

5. Kroken är två meter under havsytan.

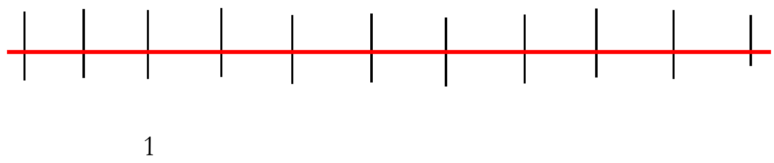
Hur långt under havsytan är fisken?_______________

Hur kan du skriva det som ett tal?_________________

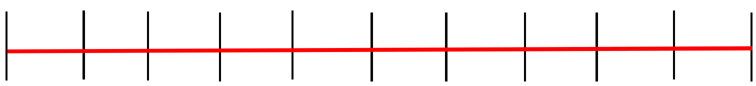
6. Välj åtta tal och placera ut dem på rätt plats på tallinjen!



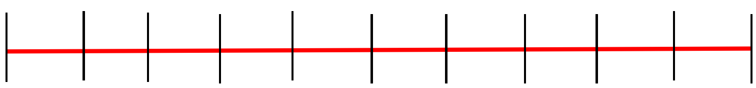
7. Visa med hjälp av tallinjen att 2+3=5!



8. Visa med hjälp av tallinjen att 4-1=3!



9. Visa hur du räknar ut 4-7 på tallinjen!



BILAGA 3: INFORMATIONSBREV

Informationsbrev om Learning Study, 2013-08-13.

Hej alla föräldrar!

Sedan ett par år tillbaka har vi i XXXX kommun arbetat med Learning Study. En Learning Study är en modell där lärare arbetar tillsammans med att planera, genomföra, analysera och förbättra undervisningen i olika ämnen. Det projekt som beskrivs här är lite annorlunda på så sätt att Learning Studyn kommer att ingå i mitt avhandlingsarbete i matematikdidaktik. Jag, Anna Lövström, är anställd i XXXX kommun och bedriver forskarstudier vid högskolan i Jönköping. XXXlärarna XXX och XXX samt jag själv kommer att genomföra lektionerna.

För att veta vad eleverna behöver lära sig, samt vad de har lärt sig använder vi oss av noga konstruerade för- och eftertest. För att vi ska kunna analysera undervisningen behöver vi videofilma lektionerna, samt intervjua några elever från varje klass. Intervjuerna spelas in på en bandspelare. Deltagandet i Learning Study är frivilligt och bygger på att du som målsman ger tillstånd till att ditt barn deltar. De uppgifter som samlas in kommer att behandlas varsamt, enligt de riktlinjer som finns för forskningsetik (http://www.codex.uu.se/texts/HSFR.pdf). Välkommen med frågor om projektet: Anna Lövström tel. XXXX, epost: XXXX.

Målsmans tillstånd till deltagande i Learning Study

____ Ja, jag ger tillstånd för mitt barn att delta i studien. Inspelningarna får endast användas i projektet.

____ Ja, jag ger tillstånd för mitt barn att delta i studien. Inspelningarna får användas i projektet, samt i utbildning och vid forskningskonferenser.

____ Nej, jag vill inte att mitt barn deltar i studien.

Elevens namn: ____

Målsmans underskrift:______________________________________

Namnförtydligande:____

Returnera denna talong till skolan snarast, tack!!