HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Structure sense

Ett matematikdidaktiskt begrepp som håller på att formas

Lovisa Johansson

Josefine Jonsson

Examensarbete I 15 hp
Inom Utbildningsvetenskap

Grundlärarprogrammet Inriktning åk 4-6
Vårterminen 2015

Handledare
Robert Gunnarsson

Examinator
Annica Otterborg

HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE OCH KOMMUNIKATION (HLK)
Högskolan i Jönköping

Examensarbete I 15 hp
inom Utbildningsvetenskap
Vårterminen 2015

SAMMANFATTNING

Lovisa Johansson, Josefine Jonsson

Structure sense

Ett matematikdidaktiskt begrepp som håller på att formas

Antal sidor: 30

Structure sense är ett begrepp som nyligen har börjat användas inom matematikdidaktik för att beskriva elevers förståelse för matematiska strukturer. Syftet med det här examensarbetet är att utforska begreppet structure sense genom att jämföra olika definitioner av begreppet. Vidare är syftet också att jämföra structure sense med tre andra liknande begrepp: *symbol sense*, *personal structure* och *awareness of mathematical pattern and structure*. Litteraturstudien bygger på 13 vetenskapliga publikationer som samlades in och analyserades. Samtliga publikationer är skrivna av internationella forskare. I resultatet presenteras och jämförs structure sense utifrån fyra olika definitioner. De olika definitionerna av begreppet är riktade mot olika nivåer av matematik men gemensamt för beskrivningarna är att structure sense uppfattas som en eller flera förmågor som innefattar ett mångfacetterat sätt att uppfatta matematisk struktur.

Sökord: Structure sense, symbol sense, personal structure, awareness of mathematical pattern and structure, algebra, matematikdidaktik

---

Postadress	Gatuadress	Telefon	Fax
Högskolan för lärande och kommunikation (HLK) Box 1026 551 11 JÖNKÖPING	Gjuterigatan 5	036–101000	036162585

Innehållsförteckning

1 Inledning 1

2 Syfte och frågeställningar 3

3 Bakgrund 4

3.1 Algebra 4

3.2 Förståelse för matematiska strukturer 5

3.3 Styrdokument 5

4 Metod 7

4.1 Materialinsamling 7

4.2 Kriterier för inklusion 8

4.3 Materialanalys 9

5 Likheter och skillnader i olika definitioner av begreppet 10

5.1 Hur definieras structure sense? 10

5.2 Diskussion kring innebörden av structure sense 14

6 Likheter och skillnader med andra begrepp 17

6.1 Symbol sense 17

6.2 Personal structure 18

6.3 Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS) 19

6.4 Diskussion kring structure sense och liknande begrepp 20

7 Metoddiskussion 24

8 Avslutande diskussion 26

9 Referenslista 28

Bilaga 1 Översikt över analyserad litteratur

1 Inledning

Matematik är ett ämne som har haft en betydelsefull roll genom historien och utvecklats ur människans praktiska behov och nyfikenhet. Ämnet har en nära koppling till vardagslivet och ger individen möjlighet att delta i det moderna samhället (Skolverket, 2011c). Matematikdidaktik är ett forskningsområde där studier görs om elevers lärande och kunskaper i matematik. Inom detta forskningsområde används bland annat begreppet *number sense* (taluppfattning). Number sense hänvisar till en persons generella förståelse för tal och operationer. Förmågan och benägenheten att använda den förståelsen på flexibla sätt är en annan aspekt av number sense. Ytterligare två aspekter är att kunna göra matematiska bedömningar och utveckla användbara strategier för att hantera tal och operationer (McIntosh, Rey & Rey, 1992).

Number sense har under lång tid använts för att beskriva vad som definierar grundläggande kunskaper och förmågor inom aritmetik. Motsvarande begrepp har saknats för att beskriva vilka kunskaper och förmågor som behövs för att behärska algebra. En möjlig kandidat är *structure sense*, ett begrepp som nyligen har börjat förekomma inom den matematikdidaktiska forskningen. Begreppet används för att diskutera elevers förståelse för matematiska strukturer. Structure sense diskuteras bland ett litet antal internationella forskare, däribland, Linchevski och Livneh (1999) och Hoch och Dreyfus (2006). Begreppet håller ännu på att formas och därför saknas en fullständig definition.

I denna litteraturstudie kommer olika forskares formuleringar av begreppet structure sense att tas upp samt jämföras och ställas mot varandra. Bland annat kommer vi diskutera vilka likheter och skillnader det finns mellan forskares olika sätt att hantera begreppet. Vidare ifrågasätts om det finns likheter mellan structure sense och andra begrepp. De tre begrepp som ställs mot structure sense är: *symbol sense, personal structure* och *awareness of mathematical pattern and structure* (AMPS).

Inledningsvis beskrivs syftet för den här studien tillsammans med de frågeställningar som litteraturstudien utgår från (kap. 2). Efter detta behandlas bakgrunden till denna text (kap. 3). Därefter beskrivs hur materialinsamlingen genomfördes och hur materialet analyserades (kap. 4). I kapitel 5 presenteras resultatet för litteraturstudiens första frågeställning. Här behandlas olika definitioner av structure sense, följt av en diskussion där definitionerna jämförs. I kapitel 6 redogörs för en definition av symbol sense, personal structure respektive AMPS, samt hur de relaterar till begreppet structure sense. Kapitlet avslutas med en diskussion där likheter mellan structure sense och de tre begreppen diskuteras. Detta följs av en metoddiskussion (kap. 7) och en avslutande diskussion (kap.8).

2 Syfte och frågeställningar

Structure sense är ett begrepp som börjat förekomma i forskning inom matematikdidaktik för att beskriva hur elever uppfattar matematiska strukturer. Syftet med denna litteraturstudie är att undersöka begreppet structure sense. Genom att jämföra olika definitioner av begreppet structure sense och ställa begreppet i relation till andra liknande begrepp, vill vi vidga förståelsen för begreppets innebörd inom skola och utbildning. Detta syfte vill vi uppnå genom att besvara följande frågeställningar:

- Vilka likheter och skillnader finns det i olika definitioner av begreppet structure sense?
- Hur relaterar begreppet structure sense till andra liknande begrepp?

3 Bakgrund

Det framkommer en stark koppling mellan begreppet structure sense och området algebra. I det här kapitlet behandlas därför den definition av algebra som det här arbetet grundas på (kap. 3.1). Vidare relateras structure sense till att utveckla förståelse för matematiska strukturer. Vad det innebär att ha förståelse för matematiska strukturer förklaras i kapitel 3.2. I kapitel 3.3 redogörs för vilka kunskaper eleverna i grundskolan ska utveckla inom området algebra enligt de aktuella styrdokumenten.

3.1 Algebra

Number sense är ett begrepp som under lång tid har använts för att diskutera elevers kunskaper och förmågor inom aritmetik. Structure sense är ett begrepp som skulle kunna vara motsvarande begrepp för de kunskaper och förmågor som elever behöver inom algebra. Algebra är dock ett område inom matematiken som kan uppfattas på olika sätt och kan användas i olika sammanhang. Eftersom det inte finns en enda allmänt etablerad beskrivning vad algebra innebär, är det relevant att lyfta fram de fyra grundläggande perspektiv som sammanfattar den föreställning om algebra som används i den här litteraturstudien.

(Bergsten, Häggström & Lindberg (1997) presenterar fyra olika sätt att uppfatta algebra. För det första kan algebra betraktas som ett verktyg för problemlösning. Bokstäver som x, y och z kan användas för obekanta tal och variabler och den algebraiska aktiviteten består ofta av att lösa ekvationer eller förenkla matematiska uttryck. För det andra kan algebra uppfattas som generaliserad aritmetik. Det kan handla om att översätta och generalisera relationer mellan olika tal med ett matematiskt språk. Kommutativa lagen för addition kan exempelvis beskrivas som $a + b = b + a$, för att beskriva hur summan av två tal inte förändras om talen byter plats i ordningen. Enligt Bergsten, Häggström & Lindberg kan algebra också uppfattas som ett studium av relationer, det tredje perspektivet. Här behandlas till exempel funktioner och grafer för att visa samband och relationer mellan olika storheter. Ofta används en variabel då för att representera mätvärdet av en storhet. En formel eller tabell kan användas för att beskriva hur värdena av en storhet relaterar till värdena på en annan storhet. Det fjärde och sista perspektivet är att betrakta algebra som ett studium av strukturer. Det handlar om att definiera strukturer i abstrakt matematik. Observera följande likheter: $a * a = a$, $a * b = b$, $b * a = b$, $b * b = a$. Dessa likheter kan tolkas som räkneregler för addition av udda och jämna tal. Symbolen $*$ representerar addition, bokstäverna a och b står för ett jämnt respektive ett udda tal. Men likheterna kan också tolkas som teckenregler för multiplikation, där symbolen $*$ representerar multiplikation och bokstäverna a och b står för ett positivt respektive ett negativt tal (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997).

3.2 Förståelse för matematiska strukturer

Att utveckla förståelse för matematiska strukturer innebär att utveckla förståelse för vilka egenskaper ett matematiskt uttryck har och hur elementen i uttrycket är relaterade till varandra (Mason, Stephens & Watson, 2009). Ett sätt att ta hänsyn till strukturen i matematiska uttryck är att använda olika regler, till exempel prioriteringsreglerna. Prioriteringsreglerna används för att kontrollera operationsordningen, i vilken ordning operationerna ska utföras för att nå ett korrekt resultat. Om det är möjligt ska de parenteser som finns i uttrycket beräknas först. Efter parenteser är multiplikation och division att prioritera, och sist addition och subtraktion. När det förekommer flera operationer av samma prioritet, till exempel både multiplikation och division utförs operationerna från vänster till höger (enligt vänster-till-höger-regeln) (Löwing, 2008). För att komma ihåg prioriteringsreglerna kan olika förkortningar användas, till exempel BOMDAS (alternativt BODMAS). B står för parenteser (Brackets), O för potenser och rötter (Of). Sedan följer de fyra räknesätten, multiplikation (M), division (D), addition (A) och subtraktion (S) (Cleave Books, 2004). Andra liknande förkortningar är PEMDAS (Parenthesis – Exponent – Multiplication – Division – Addition – Subtraction) och BIDMAS (Brackets – Index – Division – Multiplication – Addition – Subtraction).

3.3 Styrdokument

Enligt den aktuella kursplanen i matematik (Skolverket, 2011c) ska eleverna få möjlighet att utveckla sina matematikkunskaper och genom detta få tilltro till sin egen matematiska förmåga. Utbildningen ska bland annat bidra till att eleverna utvecklar förtrogenhet för att lösa algebraiska problem och uppgifter. Geometriska mönster och mönster i talföljder är något som elever i årskurs 1-6 arbetar med inom området algebra (Skolverket, 2011a). Vidare i algebraundervisningen ska eleverna få kunskaper om att använda bokstäver istället för tal, handskas med variabler samt få kunskaper om likhetstecknets betydelse. Eleverna ska också möta enkla algebraiska uttryck och ekvationer och arbeta med enkla metoder för ekvationslösning. I årskurs 7-9 följer en fördjupning i användandet av variabler med formler och funktioner och eleverna ska ytterligare utveckla sina metoder för ekvationslösning (Skolverket, 2011c). Även i matematik på gymnasienivå utgör algebra en del av det centrala innehållet (Skolverket, 2011b). Algebrakunskaper har eleverna nytta av inom andra matematiska områden som geometri, problemlösning och samband och förändring (Skolverket, 2011a).

4 Metod

Syftet med studien är att jämföra olika forskares syn på begreppet structure sense samt att jämföra structure sense med andra liknande begrepp för att utforska begreppets innebörd. Med utgångspunkten att hitta relevant material om begreppet genomfördes därför sökningar efter vetenskapliga publikationer.

4.1 Materialinsamling

Databaserna som användes för materialinsamlingen var: *Google Scholar, MathEduc*[1] och *ERIC*[2]. Vidare användes *Primo,* en söktjänst som Högskolebiblioteket i Jönköping tillhandahåller och *LIBRIS*, de svenska bibliotekens gemensamma katalog. Sökningar i nämnda databaser gav ett brett utbud av internationell vetenskaplig forskning.

Vid materialinsamlingen användes följande sökord: *structure, structure sense, surface structure, symbol sense, number sense, algebra, algebraic structure, children, mathematics, matematik* och *strukturkänsla*. Sökorden användes eftersom de ansågs relevanta mot studiens syfte. Eftersom forskningen kring begreppet förväntades vara internationell användes framförallt sökord på engelska. För att leta efter svensk forskning i området gjordes en egen översättning av begreppet structure sense till *strukturkänsla.* Sökningarna på strukturkänsla gav dock inget resultat. Under läsning av materialet hittades andra begrepp som liknade structure sense. För att hitta annat relevant material gjordes därför även sökningar med begreppen: *symbol sense, awareness of mathematical pattern and structure, AMPS* och *personal structure.*

Ett antal aktuella forskare upptäcktes genom kedjesökningar utifrån referenslistorna i valda källor. Forskarnas namn kombinerades med vissa av sökorden ovan för ytterligare materialinsamling. De forskares namn vi använde i sökningarna var: Tommy Dreyfus, Maureen Hoch, Liora Linchevski och Drora Livneh.

[1] Mathematics Education Database
[2] Educational Resources Information Center

4.2 Kriterier för inklusion

Inför datainsamlingen bestämdes tre kriterier för att avgränsa sökningen efter relevant material. Två kriterier ansågs vara tillräckligt eftersom begreppen användes i ett begränsat forskningsområde, av ett begränsat antal forskare vid tidpunkten för materialinsamlingen. Det första kriteriet var att forskningen på något sätt presenterade en egen definition för något av begreppen: structure sense, symbol sense, personal structure eller AMPS. Att forskningen vilade på vetenskaplig grund var det andra kriteriet. De texter som uppfyllde båda kriterierna inkluderades i vår analys. De texter som behandlade matematik på universitetsnivå exkluderades.

Under sökningen hittade vi sju vetenskapliga artiklar, fem konferensbidrag och en doktorsavhandling (se tabell 1) som ansågs relevanta mot syftet och frågeställningarna. De vetenskapliga artiklarna och konferensbidragen som inkluderades var peer-reviewed.

Tabell 1 Nedan visas de vetenskapliga publikationer som uppfyllde kriterierna för inklusion.

Författare	År	Typ av arbete
Arcavi, A.	1994	Vetenskaplig artikel
Arcavi, A.	2005	Vetenskaplig artikel
Hoch, M & Dreyfus, T.	2004	Konferensbidrag
Hoch, M & Dreyfus, T.	2005	Konferensbidrag
Hoch, M & Dreyfus, T.	2006	Konferensbidrag
Hoch, M & Dreyfus, T.	2007	Konferensbidrag
Hoch, M & Dreyfus, T.	2009	Konferensbidrag
Lincheviski, L. & Livneh, D.	1999	Vetenskaplig artikel
Lüken, M.	2012	Vetenskaplig artikel
Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M.	2009	Vetenskaplig artikel
Novotná, J. & Hoch, M.	2008	Vetenskaplig artikel
Rüede, C.	2013	Vetenskaplig artikel
Van Stiphout, I.M.	2011	Doktorsavhandling

4.3 Materialanalys

Efter materialinsamlingen delades texterna upp och lästes individuellt. Texterna sammanfattades skriftligt för att vi sedan skulle kunna återge innehållet och för att kunna diskutera det. Vid diskussionen lästes vissa delar av texterna gemensamt för att reda ut eventuella frågetecken. Varje text granskades utifrån de kriterier för inklusion som fastställts. Ett urval av relevant information gjordes genom att respektive källa analyserades utifrån frågeställningarna.

Materialet analyserades med hjälp av en analysöversikt (se bilaga 1). Syfte, metod och resultat för de olika källorna fördes in i en tabell. En specifik kolumn användes för att lyfta fram varje texts definition av structure sense, eller liknande begrepp. Översikten användes sedan för att urskilja likheter och skillnader samt för att hitta samband mellan olika definitioner av begreppet.

5 Likheter och skillnader i olika definitioner av begreppet

Eftersom det finns olika beskrivningar av begreppet structure sense presenteras och diskuteras begreppets innebörd i det här kapitlet genom jämförelse mellan fyra olika definitioner.

Linchevski och Livneh (1999) studerade sjätte- och sjundeklasselevers förståelse för matematiska strukturer och fann att de svårigheter och missuppfattningar som elever upplever i algebra även kan finnas i rent aritmetiska sammanhang. De hävdar att en stor del av eleverna saknade structure sense och en förståelse för strukturen i matematiska uttryck. Linchevski och Livneh (1999) betonar att elever med structure sense på ett flexibelt och kreativt sätt kan använda flera ekvivalenta former av ett matematiskt uttryck. Eftersom begreppet inte beskrivs närmare av Linchevski och Livneh (1999) har vi utgått från att de svårigheter och missuppfattningar som de lyfter fram visar på saknaden av structure sense.

Hoch och Dreyfus (2004) har försökt skapa förståelse för vad structure sense skulle kunna innebära i matematik på gymnasienivå. Efter ett första försök att beskriva begreppet structure sense (Hoch & Dreyfus, 2004) har ytterligare fyra studier kring ämnet presenterats (Hoch & Dreyfus, 2005, 2006, 2007, 2009). I de olika texterna sker en utveckling av begreppets innebörd men efter den tredje publikationen (Hoch & Dreyfus, 2006) har ingen förändring av definitionen skett. Här redogörs därför för likheter och skillnader mellan den första och den senare beskrivningen av begreppets innebörd (2004, 2006).

För ytterligare ett perspektiv på begreppet structure sense presenteras även Lükens (2012) förklaring av begreppet *early structure sense*. Lüken utgår ifrån Hoch och Dreyfus (2004, 2006) definition av structure sense men omformulerar deras definition för att illustrera vad structure sense kan innebära i de inledande skolåren.

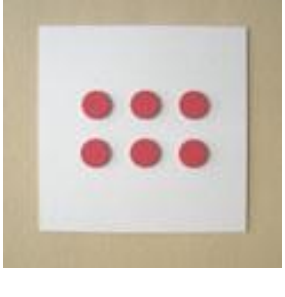
5.1 Hur definieras structure sense?

Linchevski och Livneh (1999) beskriver olika svårigheter och missuppfattningar som elever i deras studie hade inom algebra gällande struktur i matematiska uttryck. Bland annat diskuteras att eleverna saknade förståelse för hur talen och operationerna var relaterade till varandra samt innebörden av parenteser. Hälften av eleverna beräknade till exempel $50 - 10 + 10 + 10$

genom att utföra additionerna först och avskiljde den första tian från minustecknet (Linchevski & Livneh, 1999). En möjlig förklaring till att eleverna valde att utföra additionerna före subtraktionen kan vara att de saknade förståelse för vänster-till-höger-regeln. Dessutom visade endast få elever förståelse för att $926 - 167 - 167$ är samma uttryck som $926 - (167 + 167)$, vilket är tecken på en statisk syn på användandet av parenteser (Linchevski & Livneh, 1999). Utifrån uppfattningen att eleverna visade en avsaknad av structure sense, skulle structure sense, enligt vår tolkning, vara att ha förståelse för strukturen i ett uttryck, det vill säga att kunna uppfatta hur talen och operationerna förhåller sig till varandra, samt att ha en dynamisk syn på användandet av parenteser.

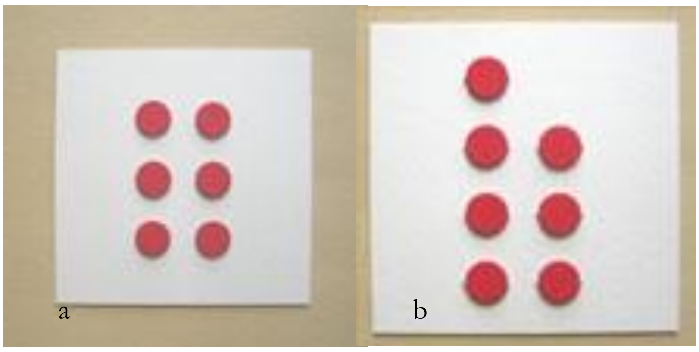
Hoch och Dreyfus (2004, 2006) uppfattar structure sense som en grupp förmågor. En av förmågorna är att kunna känna igen och hantera ett uttryck som ett enda element. Det innebär att en elev som använder structure sense kan uppfatta delar av ett uttryck som en helhet och inte bara som separata delar. Olika element kan uppfattas på olika sätt vid olika tillfällen och de kan vara delar eller kombinationer av varandra. Hoch och Dreyfus (2004, s.51) tar exemplet $1 - \frac{1}{n+2} - \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{110}$ där $n + 2$, $\frac{1}{n+2}$ eller $1 - \frac{1}{n+2}$ kan vara exempel på element. De olika perspektiven på vad som är ett element kan ha inverkan på hur elever uppfattar uppgiften och väljer metod. Den här förmågan är även en del av den senare definitionen av structure sense (Hoch och Dreyfus, 2006). Förmågan att kunna känna igen och hantera ett uttryck som ett enda element kan även relateras till förmågan att dela upp ett element i understrukturer (*substructures*). Den här förmågan inkluderar Hoch och Dreyfus i den tidiga definitionen av structure sense (2004), men inte den senare (2006).

Lüken (2012), som har studerat elever från förskoleklass till årskurs två, beskriver en liknande förmåga: att kunna dela upp mönster i understrukturer. Till exempel skulle prickarna på en tärning kunna uppfattas som olika mönster, och även här skulle olika understrukturer kunna uppfattas i mönstren. Olika sätt att se mönstret för en sexa är till exempel som sex individuella prickar, två grupper om tre eller tre grupper om två. Mönstret kan också uppfattas som en enda helhet och det kan i sin tur eventuellt bilda en understruktur i ett annat mönster.



Figur 1
De sex prickarna kan uppfattas på olika sätt. Använder en elev structure sense ser eleven prickarna som ett mönster, inte varje prick var för sig (Lüken, 2012, s. 279).

En förmåga som både Hoch och Dreyfus (2004, 2006) och Lüken (2012) inkluderar i definitionen av structure sense är att känna igen en bekant struktur både i en enkel form och i en komplex form. Hoch och Dreyfus (2004) framhåller att en elev som kan känna igen en bekant struktur på en annan plats, visar structure sense. Till exempel i ekvationen $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + (\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1})$ (Hoch & Dreyfus, 2004, s. 53) kan uttrycket $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}$ uppfattas som ett element som förekommer på båda sidor om likhetstecknet. I den senare definitionen av structure sense menar Hoch och Dreyfus (2006) att en bekant struktur, till exempel en formel, kan kännas igen i ett uttryck om det görs ett lämpligt utbyte av symboler. Om en variabel eller parameter byts ut mot en produkt eller summa, eller tvärtom, är strukturen fortfarande densamma. I uttrycket $7^2 - y^2$ kan strukturen $a^2 - b^2$ kännas igen och formeln för konjugatregeln, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ kan användas för att faktorisera uttrycket till $(7 - y)(7 + y)$. Detta kan representera hur en bekant struktur kan kännas igen i en enkel form. I en mer komplex form skulle variablerna a och b kunna representera en produkt eller en summa. För att koppla förmågan till early structure sense (Lüken, 2012) kan återigen sexan på en tärning användas för att exemplifiera en struktur i en figur. Sexan är en bekant struktur som är enkel att känna igen. Nedan visas mönstret av en sexa i sin enklaste form och hur det kan vara en del av en mer komplex form. Genom att uppfatta det bekanta mönstret av en sexa (figur 2a) som en del av mönstret i figur 2b, kan antalet prickar snabbt uppskattas till sju.



Figur 2
a) Strukturen av en sexa i sin enklaste form (Lüken, 2012, s.279).
b) Den bekanta strukturen av en sexa framkommer i en mer komplex form som en del av ett annat mönster (Lüken, 2012, s.277).

Linchevski och Livneh betonar att flera elever hade svårigheter med att bilda delsummor. Exempelvis fick eleverna i uppgift att beräkna $195 + 67 - 117 + 39 = ?$ (1999, s. 187) genom att bilda delsummor av de tresiffriga respektive de tvåsiffriga talen. Eleverna fick använda miniräknare men en stor del av eleverna visade osäkerhet i valet av vilken operation som skulle utföras. Förmågan att kunna välja en lämplig metod för att bilda delsummor hävdar Linchevski och Livneh är en förutsättning för att i algebra kunna hantera ekvationer och symboliska uttryck. Det skulle kunna vara en del av structure sense då det visar på förståelse för strukturen i ett uttryck.

Det finns en aspekt av structure sense som Hoch och Dreyfus (2004, 2006) har omformulerat under tidens gång. Det beskrivs först som två förmågor: att kunna uppfatta vilka operationer och metoder som är möjliga att använda samt att kunna urskilja vilka som är meningsfulla att utföra (Hoch & Dreyfus, 2004). Senare har dessa två kombinerats och utvecklats till en förmåga: att kunna utnyttja strukturen i ett uttryck för att välja lämpliga operationer och metoder (Hoch & Dreyfus, 2006). För att välja en effektiv lösning och utnyttja strukturen behöver eleven använda förmågorna att kunna hantera ett uttryck som ett enda element och kunna känna igen en struktur. Om en elev till exempel i ekvationen $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}-x=7+\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$ kan uppfatta $\frac{1}{4}-\frac{x}{x-1}$ som ett enda element och kan känna igen strukturen, kan ekvationen snabbt och effektivt förenklas till $-x=7$. I den här typen av uppgift var det få elever som ansågs använda structure sense och kunde hitta en effektiv metod genom att utnyttja strukturen.

Lüken (2012) skriver inte något om att välja metod utifrån en struktur i samband med early structure sense. Däremot inkluderas två förmågor gällande att använda understrukturer för olika syften. Den första är att kunna känna igen och bilda gemensamma kopplingar och relationer mellan understrukturer, till exempel att hitta regelbundenhet eller likheter och skillnader. Den andra är att integrera understrukturer för att se ett mönster som en enda helhet. Detta kan exempelvis användas för att uppfatta en större mängd föremål. Lüken (2012) menar att de högpresterande eleverna kunde fastställa en mängd föremål genom att bryta ner komplexa mönster i understrukturer och ordna föremålen i grupper.

Hoch och Dreyfus (2004) nämner på samma sätt som Lüken (2012) förmågan att känna igen gemensamma drag mellan strukturer. Detta kan till exempel kopplas till att känna igen en formel i ett uttryck eller se likheter mellan olika uttryck, men detta är en förmåga som Hoch och Dreyfus valt att inte inkludera i sin senare beskrivning av structure sense (2006).

5.2 Diskussion kring innebörden av structure sense

Det finns både likheter och skillnader mellan de olika definitionerna av begreppet structure sense. Linchevski och Livneh (1999) beskriver structure sense som förmågan att kunna använda ekvivalenta former till ett uttryck på ett flexibelt och kreativt sätt. För att kunna göra en jämförelse med de andra definitionerna tolkas de missuppfattningar som Linchevski och Livneh resonerar kring i artikeln som tecken på avsaknad av structure sense. Att inte ha de missuppfattningarna ses följaktligen som tecken på att eleven har förståelse för matematiska strukturer och har utvecklat structure sense. Hoch och Dreyfus (2004, 2006) utgår ifrån ett annat perspektiv och beskriver begreppet som flera samspelande förmågor. Även Lüken (2012) presenterar ett förslag för vad structure sense kan innebära men inriktar sig mot de tidiga skolåren. Eftersom Lüken utgår från Hoch och Dreyfus (2004, 2006) är deras definitioner ganska lika. En avgörande skillnad är ändå att Lüken (2012) har omformulerat förmågorna och riktar fokus mot en förståelse för mönster, för att anpassa definitionen för de yngre åldrarna. Eftersom Lüken inte blandar in elevernas förståelse för tal och operationer upplever vi det som en naturlig konsekvens att de förmågor som relateras till att välja metod utesluts i Lükens definition.

Hoch och Dreyfus är de som har publicerat mest forskning kring begreppet structure sense och vad det innebär. Till skillnad från Linchevski och Livneh (1999), som endast har en kort förklaring av begreppet, ger Hoch och Dreyfus (2004, 2006) en tydligare beskrivning av begreppet och redogör för ett antal förmågor som de anser är viktiga aspekter av structure sense. Från att den första definitionen skrevs har Hoch och Dreyfus fortsatt att göra studier om structure sense och en fortsatt reflektion kring begreppet har lett till en utveckling av beskrivningen för vilka förmågor som ingår i structure sense. Det är tre förmågor som Hoch och Dreyfus (2006) har valt att stå fast vid och behålla i den senare definitionen: att känna igen bekant struktur i olika former, att hantera en produkt eller summa som ett enda element och att utnyttja strukturen för att välja lämplig operation eller metod. Dessa kan antas vara viktiga delar av structure sense eftersom de inkluderas i både den tidiga (2004) och den senare (2006) beskrivningen med endast några detaljjusteringar. En mer intressant observation är att två förmågor som inkluderas i den första definitionen av structure sense (2004), att kunna dela upp ett element i understrukturer och att kunna uppfatta vilka operationer och metoder som är möjliga att utföra, har Hoch och Dreyfus valt att utesluta i den senare (2006). Varför den första av dessa två förmågor inte har en plats i den senare definitionen är svårt att veta eftersom det inte tydligt framkommer vad förmågan innebär och hur den är av betydelse. När det gäller den andra förmågan, att kunna se vilken metod som är möjlig att utföra, reflekterar vi kring två möjliga förklaringar. Kanske anser Hoch och Dreyfus (2006) att förmågan att kunna urskilja vilka metoder som är möjliga, är en förutsättning för att kunna välja den metod som är lämpligast och mest effektiv. En annan möjlig förklaring är att förmågan inte längre uppfattas som en utmärkande aspekt av structure sense. Möjligtvis är det den stora skillnaden mellan elever som visar tecken på structure sense och de elever som inte gör det. De elever som endast väljer metod utifrån vad de uppfattar är möjligt, kanske inte visar tecken på structure sense, medan de elever som reflekterar över strukturen och överväger vilken metod som är lämpligast och mest effektiv gör det.

Något som är gemensamt mellan definitionerna av structure sense är att structure sense uppfattas som en eller flera förmågor (Hoch & Dreyfus, 2004, 2006; Linchevski & Livneh, 1999; Lüken, 2012). Två utmärkande drag som är gemensamma för vad forskarna anser ingår i structure sense är förmågorna att kunna uppfatta och känna igen matematiska strukturer samt att kunna utnyttja den kunskapen för att välja lämpliga operationer och metoder. Eftersom förmågorna relateras till att utveckla förståelse för matematiska strukturer, framkommer en tydlig koppling till algebra i innebörden av structure sense.

En skillnad mellan de olika studierna är att structure sense behandlas i olika sammanhang och i samband med olika strukturer. Linchevski och Livneh (1999) som undersöker hur förståelse för algebraiska strukturer även är avgörande i aritmetiska beräkningar, använder enkla, rent aritmetiska uppgifter med kända tal och beräkningar med de fyra räknesätten. Hoch och Dreyfus (2004, 2006) däremot undersöker förståelsen för algebraiska uttryck på en gymnasienivå, vilket leder till användandet av ekvationer och uttryck med okända tal och variabler. Att forskarna utforskar begreppet i olika sammanhang kan vara en orsak till att definitionerna är olika och verkar beröra olika strukturer. En annan möjlig förklaring kan vara att studierna är inriktade mot olika nivåer av matematik. I de tidiga skolåren, understryks elevers förståelse för mönster och understrukturer (Lüken, 2012). Linchevski och Livneh (1999) däremot, som undersöker structure sense i årskurs sex och sju, resonerar kring elevers förmåga att läsa ett uttryck och utveckla förståelse för symbolerna och hur talen och operationerna är relaterade. Hoch och Dreyfus (2004, 2006) behandlar en högre nivå i matematik och riktar sina studier mot elevers förmåga att känna igen strukturen av en formel i ett algebraiskt uttryck. Även om forskarna verkar göra studier om olika typer av strukturer, är vår uppfattning att det finns ett samband mellan dem. Vi uppfattar en naturlig progression i förmågan att uppfatta struktur, som kan relateras till hur undervisningen i matematik är formad. I de tidiga åldrarna är arbete med mönster och konkret material något som utmanar elevernas matematiska tänkande. Sedan möter eleverna vanligtvis aritmetiska uppgifter i mellanåren. Då utvecklas grundläggande matematiska kunskaper som sedan låter eleverna utforska nya områden inom matematik, till exempel algebra. Arbetet med mönster skapar goda förutsättningar inför mötet med aritmetik. På liknande vis är goda kunskaper i aritmetik en god förutsättning för att utveckla algebraiska kunskaper.

6 Likheter och skillnader med andra begrepp

I följande kapitel ställs structure sense mot andra begrepp som har en liknande betydelse. I urvalsprocessen framstod tre kandidater som jämförbara med begreppet structure sense. De tre begreppen är symbol sense, personal structure och AMPS.

6.1 Symbol sense

Utifrån uppfattningen att number sense bildar goda förutsättningar för skicklighet i aritmetik, hävdar Arcavi (1994, 2005) att symbol sense kan vara en parallell motsvarighet för skicklighet i algebra. Arcavi redogör för ett antal olika aspekter av symbol sense och beskriver begreppet som en komplex känsla och intuition för symboler. Då begreppet anses vara komplext och svårdefinierat diskuteras olika beteenden som enligt Arcavi representerar olika aspekter av symbol sense. Några grundkomponenter av symbol sense som diskuteras är att ha en förståelse och känsla för symboler, inse att symboler kan ha olika roller i olika sammanhang, samt veta när och hur det är lämpligt att använda symboler. Ytterligare en aspekt av symbol sense som Arcavi (1994) redogör för är medvetenhet om symboliska relationer och förmåga att forma uttryck som representerar den givna eller önskvärda informationen. Därtill beskrivs även förmågan att kunna hantera och läsa symboliska uttryck. Arcavi beskriver två olika sätt att hantera ett uttryck och argumenterar för att det är två kompletterande aspekter av problemlösning. Å ena sidan, kan det vara effektivt att bortse från symbolernas betydelse och endast använda procedurkunskaper för att nå en lösning. Å andra sidan, poängterar Arcavi, kan det vara givande att läsa och reflektera över ett matematiskt uttryck före ett försök att direkt lösa uppgiften. Det kan utveckla förståelsen för uttryckets delar och hur de är relaterade samt leda till en uppfattning om ett rimligt resultat. Fundera till exempel över hur de olika delarna är relaterade till varandra i ekvationen $\frac{(2x+3)}{(4x+6)} = 2$ (Arcavi, 1994, s. 27). Högerledet består av talet 2 och till vänster om likhetstecknet finns en division där x förekommer både i täljaren och i nämnaren. Vid närmare inspektion av divisionen, framkommer det att täljaren är hälften av nämnaren. Genom att faktorisera ut $(2x + 3)$ i täljaren och i nämnaren kan ekvationen förkortas till $\frac{1}{2} = 2$. Förhållandet mellan vänster- och högerledet är därför inte sann eftersom $\frac{1}{2} \neq 2$ vilket leder till slutsatsen att ekvationen saknar lösning. Arcavi

(1994) skriver om en elev som efter den här upptäckten ändå utforskar möjligheten att lösa ut x i ekvationen. Eleven kommer då till lösningen att $x = -1\frac{1}{2}$ och inser efter ett tag att det talet är det enda tal som inte är tillåtet att ersätta x med. En elev som direkt hade försökt lösa ut x skulle troligtvis inte göra samma upptäckt, om inte en kontroll görs efter lösningen och värdet för x skrivs in i ekvationen. Att inledningsvis söka förståelse för uttryckets betydelse och motstå vanan att direkt använda en metod eller operation för att komma närmare en lösning, anser Arcavi därför utgör en viktig aspekt av symbol sense.

Novotná och Hoch (2008) beskriver structure sense som en utveckling av symbol sense, vilket de framhåller är en utveckling av number sense. De lyfter att number sense är en intuition för tal och operationer och att symbol sense är en förlängning som inkluderar förståelse för symboler och symboliska uttryck. Van Stiphout (2011) hävdar däremot att structure sense utgör en del av symbol sense. Hon hänvisar till Arcavi (1994, 2005) och ger en kort sammanfattande beskrivning av symbol sense som en komplex känsla för symboler. Till det inkluderas en positiv attityd till symboler och ett brett perspektiv på matematiska uttryck. Förmåga att kunna läsa bortom symbolerna och att inneha goda procedurkunskaper betonar Van Stiphout (2011) är delar av ett brett perspektiv på uttryck som kan relateras till förmågan att uppfatta algebraiska strukturer. Det är en förmåga som Hoch och Dreyfus (2004) inkluderar i sin definition av structure sense.

6.2 Personal structure

Rüede (2013) ger en beskrivning av begreppet personal structure. Han utgår från att strukturering av ett matematiskt uttryck är en handling. Verbet strukturera används här i betydelsen att forma relationer mellan delarna av ett uttryck. För att kunna observera, bedöma och definiera personal structure ges tre exempel på hur strukturering uttrycks i handling. Det första exemplet är att berätta vad som betraktas i ett uttryck och vilka delar av uttrycket som relaterar till andra delar. Det andra exemplet är att utveckla förståelse för hur någon annan skapar struktur i ett uttryck och kan förklara det med egna ord. Det sista exemplet är att göra visuella noteringar eller förtydliganden, som att lägga till parenteser, färglägga eller peka på delar av uttrycket, eller dra pilar mellan olika delar. Utifrån dessa exempel, utvecklar Rüede (2013) en definition av personal structure. Han framhåller att personal structure utvecklas genom att relationer formas mellan delarna i ett uttryck.

Rüede (2013) beskriver olika kategorier för personal structure som han kunde identifiera. I de olika kategorierna uppfattas olika perspektiv på matematiska uttryck, vilket leder till olika sätt att hantera uttrycken. För att exemplifiera hur olika personer bildar olika personal structure används uttrycket $\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$ (Rüede, 2013, s. 390). En person kan tänkas dela upp uttrycket i två delar och uppfatta relationen mellan $\frac{2x}{2x-2}$ och $2 \cdot \frac{x}{2x-2}$. Relationen mellan de två delarna är att den andra delen ska subtraheras från den första. Utifrån den här uppfattningen är det möjligt att inse att den andra delen är lika med den första delen, vilket leder till att uttrycket har formen $A - A$. En annan person skulle kunna dela upp uttrycket efter vilka delar som är över eller under bråkstrecket, bortsett från talet 2. Uttrycket kan uppfattas som en subtraktion av två bråkuttryck med en gemensam nämnare. För att förenkla uttrycket utförs multiplikationen först, för att sedan förlänga bråkstrecket och lägga fokus på subtraktionen i täljaren. Ett tredje perspektiv som Rüede (2013) beskriver är att fokusera på de minsta delarna i uttrycket, till exempel att det första bråkuttrycket delas in i tre delar ($2x, 2x$ och 2), där den gemensamma faktorn 2 kan identifieras som en relation mellan delarna.

6.3 Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS)

Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS) är ett relativt nytt begrepp inom matematikdidaktik som är utformat av Mulligan och Mitchelmore (2009). AMPS består av två delar: en kognitiv där kunskap om struktur ingår och en metakognitiv där strävan är att söka och analysera mönster. De två delarna i AMPS samverkar och är beroende av varandra.

Mulligan och Mitchelmore (2009) identifierade och delade in elevers prestationer i fyra olika AMPS-stadier. Det lägsta stadiet kallade de ett förstrukturellt stadie (*pre-structural stage*) och det högsta ett stadie för strukturell utveckling (*stage of structural development)*. I det förstrukturella stadiet visade eleverna ingen förståelse för struktur, och i stadiet för strukturell utveckling visade eleverna en mycket god förståelse för struktur.

Elever med en hög nivå av AMPS skulle enligt Mulligan och Mitchelmore (2009) ha förståelse för rumsliga strukturer vid en lägre ålder än de som har en låg nivå av AMPS. Exempel på rumsliga strukturer är bilden av en analog klocka (se figur 3) eller en matris med lika stora rutor.

Figur 3 Figuren visar tre exempel på hur elever med olika nivåer av AMPS ritar och uppfattar strukturen av en analog klocka (Mulligan & Mitchelmore, 2009, s.43).

Genom kunskap och medvetenhet om strukturer, menar Mulligan och Mitchelmore (2009) att elever skulle ha lättare att utveckla förståelse för andra matematiska områden. Eleverna skulle ha benägenheten att leta efter mönster och struktur samt jämföra och analysera likheter och skillnader mellan mönstren. Sålunda skulle de lättare kunna hitta nya strukturer. Eleverna skulle även vara medvetna om vad ett matematiskt mönster är och kunna utnyttja den kunskapen i lärande inom andra matematikområden.

6.4 Diskussion kring structure sense och liknande begrepp

Structure sense verkar vara ett svårdefinierat begrepp men det verkar också vara ett viktigt begrepp som fyller en funktion. Möjligtvis har det därför utvecklats andra begrepp med liknande betydelse. Vi har funnit likheter mellan structure sense och de tre ovan presenterade begreppen.

Symbol sense är ett av begreppen som liknar structure sense. Både symbol sense och structure sense innefattar flera förmågor som anses vara förutsättningar för matematisk skicklighet. Till skillnad från structure sense, som riktar fokus mot förståelse för matematiska strukturer, är symbol sense mer inriktat mot förståelse för matematiska symboler. Till viss del är dock de två områdena nära relaterade och i vissa fall överlappar de varandra. Det är svårt att dra en gräns för när endast det ena eller det andra används. Om vi återigen tittar på ekvationen $\frac{(2x+3)}{(4x+6)} =$

2 (Arcavi, 1994, s. 27), visar vänsterledet förhållandet $\frac{1}{2}$. Att uppfatta den här relationen mellan täljaren och nämnaren kan kopplas både till förståelse för symboler och till förståelse för strukturer. Enligt Arcavi (1994) handlar detta om att läsa bortom symbolerna och reflektera över hur de är relaterade till varandra. Att uppfatta relationer mellan delarna kan jämföras med förmågan att känna igen en bekant struktur i en enkel eller mer komplex form (Hoch & Dreyfus, 2006), i det här fallet känna igen att uttrycket $\frac{(2x+3)}{(4x+6)}$ har formen $\frac{A}{2A}$. För att urskilja förhållandet i vänsterledet, krävs också en förmåga att hantera delar av ett uttryck som hela element, vilket kan kopplas till Hoch och Dreyfus (2006) definition av structure sense. Om $2x + 3$ och $4x + 6$ uppfattas som två element, istället för fyra enskilda termer, framkommer det tydligare en relation mellan delarna.

Det framkommer på så vis en nära relation mellan begreppen symbol sense och structure sense och de kan uppfattas som delar av varandra. Novotná och Hoch (2008) skriver att structure sense är en utveckling av symbol sense. Detta kan ifrågasättas då flera aspekter av symbol sense inte kan kopplas till structure sense. Även om en aspekt av symbol sense kan kopplas till förmågan att uppfatta matematiska strukturer, beskrivs andra aspekter av symbol sense som lägger mer vikt vid förståelsen för symboler (Arcavi, 1994, 2005). Det krävs en bred förförståelse för tal, operationer och symboler för att utveckla förståelse för matematiska strukturer, vilket kan stödja den uppfattning Novotná och Hoch (2008) har om structure sense. Enligt Lüken (2012) är det dock inte nödvändigt att ha förståelse för tal, operationer eller symboler för att utveckla early structure sense, där förståelse för struktur utgår från att identifiera och arbeta med mönster.

Van Stiphout (2011) har uppfattningen att structure sense utgör en del av symbol sense. Hon betraktar symbol sense som en omfattande grupp förmågor där structure sense kan relateras till särskilt en förmåga, att läsa bortom symbolerna i ett uttryck. Eftersom Arcavi (1994) betonar att symbol sense är ett begrepp som inte är fullt utforskat och definierat, är det även möjligt att structure sense har flera aspekter som ännu är outforskade.

De olika perspektiven kan nästan uppfattas som motsatser till varandra vilket visar att det är två svårdefinierade begrepp. Att det finns olika uppfattningar kan möjligtvis bero på att de två begreppen har utvecklats i olika takt och utsträckning. Arcavi (1994) gjorde ett försök att beskriva ett antal aspekter av symbol sense, vilket sedan har betraktats som en omfattande definition av begreppet. Begreppet structure sense har däremot saknat en tydlig definition men har genom senare studier utforskats och utvecklats vidare (Hoch & Dreyfus, 2004, 2006).

Ett annat begrepp som kan relateras till structure sense är personal structure. Att utveckla personal structure handlar om att forma relationer mellan delarna i ett uttryck (Rüede, 2013). Att undersöka hur delarna relaterar till varandra kan, enligt vår uppfattning, jämföras med att utveckla en förståelse för strukturen i ett uttryck. Linchevski och Livneh (1999) lyfter fram betydelsen av att reflektera över ett uttryck, hur talen, operationerna och parenteserna är relaterade. Få elever i deras studie uppfattade till exempel $926 - 167 - 167$ och $926 - (167 + 167)$ som samma uttryck (Linchevski & Livneh, 1999, s.183). En förståelse för parentesernas betydelse saknades, vilket enligt forskarna hindrar en utvecklad förståelse för uttrycket. Vi tror att Rüede skulle ha beskrivit detta som att eleverna inte utvecklat en personal structure.

Rüede (2013, s. 390) diskuterar olika sätt att dela in uttrycket $\frac{2x}{2x-2} - 2 \cdot \frac{x}{2x-2}$, vilket kan jämföras med olika sätt att uppfatta delar av uttryck som hela element (Hoch & Dreyfus, 2004, 2006). Exempelvis kan hela bråkuttrycket $\frac{2x}{2x-2}$ eller endast faktorn $2x$ uppfattas som olika element. Utifrån de olika uppfattningarna om vilka delar uttrycket kan delas in i, utvecklas olika perspektiv på uttryckets struktur (Rüede, 2013). Det leder till att olika metoder används för att förenkla uttrycket. I kontrast till Rüede, där valet av metod kan uppfattas som en konsekvens av det individuella perspektivet, redogör Hoch och Dreyfus (2004, 2006) för hur flexibiliteten att byta och jämföra olika perspektiv på uttrycket kan användas för att välja en lämplig och effektiv metod. Här framgår vikten av att kunna byta perspektiv och utveckla förståelse för uttrycket. Att välja vilken metod som ska användas för att utnyttja strukturen till fullo är en av förmågorna som ingår i structure sense, enligt Hoch och Dreyfus (2004, 2006).

Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS) är ytterligare ett begrepp som har likheter med structure sense. Mulligan och Mitchelmore (2009) beskriver olika stadier av AMPS där elever med hög nivå av AMPS visade en utvecklad förståelse och medvetenhet om strukturer och mönster från vardagliga objekt. Att känna igen mönster och uppfatta strukturer är en början till algebraiskt tänkande och har en värdefull roll vid den tidiga matematikinlärningen (Mulligan och Mitchelmore, 2009). Även Lüken (2012) lyfter betydelsen av att uppmärksamma vardagliga mönster i den tidiga matematikundervisningen. Hon hävdar att förståelse för enkla mönster och strukturer, en aspekt av early structure sense, är ett förstadium till att uppfatta strukturer i matematiska uttryck.

Mulligan och Mitchelmore (2009) framhåller också att elever med hög nivå av AMPS har en tendens att söka mönster och försöka urskilja likheter och skillnader mellan mönstren. Detta har en tydlig likhet med att kunna känna igen en understruktur i ett uttryck eller en gemensam struktur mellan olika uttryck så som det beskrivs av Hoch och Dreyfus (2004, 2006). AMPS kan även kopplas till den tidiga form av structure sense som Lüken (2012) beskriver, speciellt förmågan att känna igen gemensamma relationer mellan understrukturer.

Lüken (2012) drar slutsatsen att AMPS kan likställas med structure sense. Det framkommer ingen tydlig motivering för den här uppfattningen men som det framgår ovan finns flera likheter. En skillnad är dock att Mulligan och Mitchelmore (2009) inte redogör för något som kan jämföras med förmågan att välja en lämplig metod, en mer avancerad förmåga i structure sense (Hoch & Dreyfus, 2006). En orsak till att detta inte ingår i beskrivningen av AMPS kan vara att det är en förmåga som kräver en mer utvecklad förståelse för strukturer och är mer naturligt kopplad till att förenkla och lösa matematiska uppgifter. Att utnyttja strukturen och välja lämplig metod kräver även att olika delar av uttrycket kan uppfattas som hela element och att en bekant struktur kan kännas igen. Det är dessa två sistnämnda förmågorna som både Mulligan och Mitchelmore (2009) och Lüken (2012) riktar fokus mot i sina respektive studier om elevers förståelse för mönster.

7 Metoddiskussion

För att hitta relevant material till litteraturstudien användes sökord på både svenska och engelska. Försök att hitta svensk forskning inom området gjordes för att söka efter en svensk motsvarighet till begreppet structure sense, det gav dock inget resultat. Men för att kunna besvara syfte och frågeställningar var det irrelevant att all forskning var internationell eftersom det kan antas att svenska elevers förståelse för matematisk struktur inte skiljer sig på något väsentligt sätt från elever i andra länder.

Inför materialinsamlingen fastställdes två kriterier för inklusion. Det första kriteriet (kap. 4.2), att forskningen på något sätt skulle presentera en egen definition för något av begreppen, var avgörande för att begränsa vilket material som inkluderades. En fördel med detta var att ett antal texter som enbart upprepade en redan befintlig definition för något av begreppen kunde uteslutas. De texter som användes för att definiera structure sense visade på så vis olika beskrivningar av begreppet. Det är dock möjligt att andra texter hade kunnat bidra till en bredare uppfattning om begreppet genom att det kan ha använts på något annat sätt än i de artiklar vi analyserat. Det är också tänkbart att andra författare har tolkat begreppet annorlunda än de författare som studerats i den här litteraturstudien, men att det i så fall inte framkommit på så vis att det givit avtryck i deras texter så att vi kunnat hitta dem genom vår sökmetod och våra sökord.

Vidare inkluderades enbart grunddefinitionen för var och ett av begreppen symbol sense, personal structure respektive AMPS, vilket var en fördel för att kunna jämföra structure sense med dessa begrepp. Genom att utgå från en grunddefinition kunde fokus fästas vid att nå en bättre förståelse för structure sense.

Läsningen av materialet gjordes dels individuellt, dels gemensamt. Materialanalysen genomfördes genom att innehållet och exemplen diskuterades för att tillsammans få en djupare inblick i texterna och i definitionerna för de olika begreppen. Genom diskussion kunde olika uppfattningar av texterna diskuteras och därmed fick vi en klarare bild av de olika texternas innebörd.

För att analysera materialet gjordes en översikt över de texter som sökts fram (se bilaga 1). En särskild kolumn användes för att lyfta fram de olika definitionerna av structure sense (och de närbesläktade begreppen symbol sense, personal structure respektive AMPS). För att jämföra de olika definitionerna av structure sense markerade vi likheter och skillnader samt resonerade kring olika samband mellan dem.

Det finns bara ett begränsat antal forskare inom det aktuella området. Den slutsatsen drar vi efter att samma författare återkom om och om igen vid databas-, och kedjesökningar. Det har medfört att det varit svårt att beskriva en bredd i hur begreppet används. Däremot kan det vara ett tecken på att vi hittat en stor del av den relevanta forskningen. Man kan ställa sig frågande till att ett författarpar, Hoch och Dreyfus, står bakom fem av de publikationer som inkluderades i analysen. Vi kan se en utveckling i hur Hoch och Dreyfus beskriver och behandlar begreppet structure sense och därmed hur definitionen har utvecklats. Det ansågs nödvändigt att lyfta fram de olika arbetena då de tillsammans visar en bredare uppfattning om vad structure sense innebär.

8 Avslutande diskussion

Sammanfattningsvis talar forskningen för att structure sense innefattar flera förmågor som grundas i att uppfatta, undersöka, forma, och uttrycka matematiska strukturer. I lägre åldrar, där aritmetiska och algebraiska uppgifter inte förekommer i samma utsträckning, pekar istället läroplanen (Skolverket, 2011c) på arbete med mönster för att utmana elevernas förståelse för strukturer. Efter jämförelser mellan de olika definitionerna av structure sense (Hoch & Dreyfus, 2004, 2006; Linchevski & Livneh, 1999; Lüken, 2012) kan vi speciellt lyfta fram två saker. För det första, saknar Linchevski och Livneh (1999) en tydlig definition av structure sense vilket kan leda till olika uppfattningar och tolkningar om vad det innebär. Hoch och Dreyfus (2004, 2006) däremot, som har genomfört flera studier och gjort modifieringar av sin definition, diskuterar olika elevexempel och beskriver tydligt ett antal förmågor som de anser ingår i structure sense. För det andra, framkommer en tydlig koppling mellan early structure sense (Lüken, 2012) och structure sense (Hoch och Dreyfus, 2004). Detta är inte underligt eftersom Lüken har utgått ifrån Hoch och Dreyfus (2004, 2006) för att identifiera vad structure sense i yngre åldrar innebär.

För att utveckla förståelsen för innebörden av structure sense jämfördes det mot tre andra begrepp. Bland annat undersöktes symbol sense, en annan grupp förmågor som till viss del relateras till att uppfatta algebraiska strukturer (Arcavi, 1994, 2005). Utifrån uppfattningen om att symbol sense fäster mer fokus vid förståelsen för själva symbolerna, dras slutsatsen att structure sense och symbol sense berör två skilda områden som ibland kan vara delar av varandra. Personal structure är ett annat begrepp som kan kopplas till structure sense. Även här uppfattas flera likheter och vikten av att forma relationer mellan delarna betraktas som avgörande. Det är hur som helst svårt att förstå fullt ut vad som menas med personal structure. Kan en person till exempel endast ha en personal structure eller har man olika? Är personal structure något som ändras och anpassas efter situationen eller kan olika personal structure utvecklas för olika situationer? Bortsett från de här funderingarna har vi ändå fått uppfattningen att utvecklandet av personal structure kan vara ett första steg mot att utveckla structure sense. Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS) är det begrepp som har flest likheter med Lükens definition av early structure sense (2012). Gemensamt för AMPS och early structure sense är att förståelsen för mönster och enkla vardagliga strukturer utgör början mot att utveckla en skicklighet i matematik. Skillnaden är att Mulligan och Mitchelmore (2009) delar in elevernas nivå av AMPS i olika stadier, vilket Lüken (2012) inte gör i sin definition av early structure sense.

I samband med definitionen av structure sense omtalas ett antal förmågor. Det är förmågor som konkretiserar innebörden av structure sense och gör det möjligt att observera elevernas förståelse för matematiska strukturer. I kursplanen för matematik (Skolverket, 2011c) presenteras flera förmågor som eleverna ska ges förutsättningar att utveckla. De olika förmågorna ska genomsyra undervisningen i matematik och utgör ryggraden i kunskapskraven. En intressant reflektion är att det handlar om förmågor i båda fallen men det finns en viss skillnad mellan dem. De förmågor som omtalas i samband med structure sense (Hoch & Dreyfus, 2004, 2006; Lüken, 2012) är snävt inriktade mot väldigt specifika delar. De förmågor som beskrivs i kursplanen för matematik (Skolverket, 2011c) är däremot generella och övergripande för alla områden i matematik. Men för att utveckla de övergripande förmågorna behöver eleverna ges möjlighet att bearbeta specifikt innehåll. Den metakognitiva förmågan: att tolka, värdera och reflektera kring matematiska uttryck, och procedurförmågan: att kunna välja och använda en lämplig metod för beräkningar, kan innefatta de förmågor som inkluderas i structure sense.

Under denna litteraturstudie har vi ställt oss en fråga kring begreppet structure sense. Är structure sense något som man kan ha eller använda? Det finns inget tydligt svar i de vetenskapliga texterna vilket gör att vi kan spekulera. Forskarna använder olika formuleringar som: *to display, to use* och *to have a lack of* - structure sense (Hoch & Dreyfus, 2004, 2006). Lüken (2012) formulerar sig annorlunda och beskriver istället konkret vad eleverna gör och vilka förmågor de visar. Linchevski och Livneh (1999) nämner endast begreppet structure sense i diskussionen och likt Lüken (2012) beskriver de hur eleverna går tillväga för att förenkla eller lösa ett uttryck. En intressant observation är att Hoch och Dreyfus (2004) från sin första studie om structure sense har haft funderingen om structure sense är något utvecklingsbart, vilket de kunde bekräfta i sin senare studie (2006). Detta kan tala för att structure sense är något som eleverna har och kan utveckla i olika utsträckning.

Eftersom det inte finns en svensk översättning av begreppet structure sense är det svårt att uppfatta om det handlar om en känsla, en intuition, en grupp förmågor, ett verktyg eller en egenskap. Symbol sense, som har en stark och komplicerad koppling till structure sense, beskrivs som en komplex känsla och anses vara en algebraisk motsvarighet till begreppet number sense (Arcavi, 1994). Kanske kan också structure sense uppfattas som en känsla och användas för att resonera kring grundläggande förmågor i algebra.

9 Referenslista

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning of mathematics*, *25* (2), 42-47.

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Nämnaren Tema: Algebra för alla*. Nationellt centrum för matematikutbildning, Göteborgs universitet.

Cleave Books. (2004).*BODMAS What does it mean?*. Hämtad 19 februari, 2015, från: http://www.cleavebooks.co.uk/trol/trolze.pdf

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets. I M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 49-56. Bergen, Norway: PME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' Difficulties with Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context. I H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* , *3*, 145-152. Melbourne, Australia: PME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure Sense versus Manipulation Skills: An Unexpected Result. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, 305-312. Prague, Czech Republic: PME.

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. *WORKING GROUP 3. Building structures in mathematical knowledge 399*, 436.

Hoch, M & Dreyfus, T. (2009). Developing Katy's Algebraic Structure Sense. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavargne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference for European Research in Mathematics Education* (CD), 529-538. Lyon, France.

Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical Contexts. *Educational Studies in Mathematics*, *40*(2), 173-196.

Lüken, M. M. (2012). Young Children's Structure Sense. *Journal for Didactics of Mathematics*, *33*, 263-285. DOI 10.1007/s13138-012-0036-8

Löwing, Madeleine (2008). *Grundläggande aritmetik – Matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, *12*(3), 2-44.

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 33–49.

Novotná, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 93-104.

Rüede, C. (2013). How Secondary Level Teachers and Students Impose Personal Structure on Fractional Expressions and Equations - An Expert-NoviceStudy. *Educational Studies in Mathematics, 83*(3), 387-408. DOI 10.1007/s10649-012-9462-2

Skolverket. (2011a). *Kommentarmaterial till Kursplanen i Matematik.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Läroplan, examensmål och gymnasiegemensamma ämnen för gymnasieskolan 2011.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011c) *Läroplan för Grundskolan, Förskoleklassen och Fritidshemmet 2011.* Skolverket: Skolverket.

Van Stiphout, I. M. (2011). *The Development of Algebraic Proficiency* (Doktorsavhandling, TU/e University of Technology, Eindhoven School of Education).

Bilaga 1 Översikt över analyserad litteratur

Författare **Titel** **Tidsskrift** **Publikationsår** **Publikationstyp** **Databas**	**Syfte**	**Design** **Urval** **Datainsamling**	**Resultat**	**Definition av structure sense eller definition av begrepp som liknar structure sense**
Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35. Vetenskaplig artikel Google Scholar	Syftet är att beskriva och diskutera beteenden som exempel på olika aspekter av symbol sense.	En argumenterande artikel som utgår ifrån elevexempel för att beskriva symbol sense.	Se nästa kolumn: Definition av structure sense eller definition av begrepp som liknar structure sense.	Symbol sense är en komplicerad mångfasetterad ”känsla”, förståelse eller instinkt gällande symboler. Symbol sense inkluderar bland annat: • instinkt för när och hur symboler bör användas • förmåga att ”läsa” och hantera symboliska uttryck utifrån två olika synsätt, att kunna åtskilja symbolerna från deras betydelse och att använda symbolernas betydelse för att göra

				kopplingar. • utveckla en vana att läsa igenom och kontrollera sannolikheten för det symboliska uttrycket man skapar • förmåga att forma och hantera symboliska uttryck • söka nya perspektiv genom att utforska ekvivalenta former till ett uttryck • kunna välja symboler som är lämpliga att använda för problemlösningen • flexibla procedurkunskaper
Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the learning of mathematics*, *25* (2), 42-47. Vetenskaplig artikel Google Scholar	Syftet för artikeln är att undersöka om symbol sense kan utvecklas och vilka underliggande kunskaper som krävs för utvecklandet av symbol sense.	Artikeln är baserad på en föreläsning som gavs vid det internationella seminariet: Reasoning, explanation and proof in school mathematics and their place in the	Symbol sense är inte medfött utan kan omhändertas och utvecklas. En viktig förutsättning för utvecklandet av symbol sense är att undervisningen i matematik uppmuntrar vanan av reflektion (*sense making*) för att söka förståelse för symbolerna. Undervisningen bör också ge eleverna förutsättningar att	Symbol sense (se 1994): • känsla för symboler och deras styrka • känsla för när och hur symboler kan användas • känsla för när symboler inte är passande och andra metoder och

		intended curriculum, som hölls i Cambridge, UK, oktober 2001.	utveckla tålamod för lärande i allmänhet, samt förståelse för syftet och styrkan med användandet av symboler.	representationer är att föredra • ha förmåga att hantera och läsa bort raderna på symboliska uttryck • förmåga att forma symboliska uttryck för att uttrycka en given eller önskvärd information • förmåga att välja en symbolisk representation av ett problem, och om nödvändigt, våga söka efter en som passar bättre • Inse att det är nödvändigt att kontrollera symbolernas betydelse under olika tillfällen och jämföra det mot det resultat man intuitivt förväntar sig • Inse att symboler kan ha olika roller i olika sammanhang

Hoch, M., & Dreyfus, T. (2004). Structure Sense in High School Algebra: The Effect of Brackets. I M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 49-56. Bergen, Norway: PME. Konferensbidrag Primo	Syftet är att ta reda på om elever använder structure sense	Kvantitativ studie där 92 elever i 11:e klass deltog.	Väldigt få elever använder structure sense.	Structure sense (high school algebra) kan ses som en grupp förmågor: • Att se ett algebraiskt uttryck som en enhet • Känna igen en bekant struktur i ett algebraiskt uttryck eller ekvation. • Dela upp en enhet i understrukturer. • Känna igen gemensamma drag mellan strukturer. • Känna igen vilka metoder som är möjliga att använda. • Känna igen vilka metoder som är användbara/effektiva.
Hoch, M., & Dreyfus, T. (2005). Students' Difficulties with Applying a Familiar Formula in an Unfamiliar Context. I H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference* *of the International Group for the Psychology of Mathematics*	Syftet är att undersöka elevers förmåga att använda en känd formel på en obekant struktur för att faktorisera matematiska uttryck.	Grupp 1: 190 elever från klass 7-10 som ombads att faktorisera uttrycket x^4 – y^4. Grupp 2: 160 elever från klass 6-10 som ombads att faktorisera uttrycket (x-3)^4 – (x+3) ^4	Grupp 1: 146/190 faktoriserade korrekt Grupp 2: 12/160 faktoriserade korrekt (47 skrev inget alls) En stor svårighet verkade finnas i att känna igen den givna formeln i grupp 2. Flera elever kunde inte hantera (x-3) och (x+3) som hela element.	High School algebra structure sense SS1-SS3: • Hantera ett sammansatt uttryck som en enda enhet • Känna igen ekvivalens i bekanta strukturer • Välja lämpliga metoder och utnyttja strukturen

Education , 3, 145-152. Melbourne, Australia: PME. Konferensbidrag Google Scholar		Båda grupperna gavs formeln a^2-b^2=(a-b) (a+b). 10 studenter i grupp 2 blev intervjuade.		
Hoch, M., & Dreyfus, T. (2006). Structure Sense versus Manipulation Skills: An Unexpected Result. I J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 305-312. Prague, Czech Republic: PME. Konferensbidrag Google Scholar	Syftet med studien är att undersöka 165 elevers structure sense och ta reda på deras nivå av procedurkunskaper (manipulation skills).	Enkätundersökning med 165 elever deltagande. Elevernas matematikkunskaper var på gymnasienivå.	Uppgifter som eleverna fick var t.ex. 3x^2 – 2x=1 och 3 cos^2x – 2 cos x=1 Dessa uppgifter har samma struktur. Det var många elever som kunde lösa den första uppgiften men inte uppfattade samma struktur i den andra. Studenter som använder structure sense i sina algebraiska uträkningar gör mycket färre misstag än de som inte använder structure sense. Hoch och Dreyfus misstänker att det saknas en koppling mellan studenternas ”rotlärda” idéer och deras meningsfulla idéer (deras structure sense).	Structure sense (high school algebra) som en grupp förmågor att: • Känna igen en bekant struktur i sin enklaste form • Kunna hantera ett uttryck som en enda enhet och genom ett lämpligt byte av symboler/tal, kunna känna igen en bekant struktur i en mer komplex form • Välja lämplig metod för att utnyttja strukturen till fullo
Hoch, M., & Dreyfus, T. (2007). Recognising an algebraic structure. *WORKING GROUP 3. Building structures in mathematical knowledge 399*, 436 Konferensbidrag Google Scholar	Syftet är att besvara följande frågor: Hur lär sig en elev känna igen struktur? Kan structure sense läras ut?	Individuella intervjuer i lärande syfte med 10 elever i 11:e klass. Eleverna fick göra ett förtest och två eftertest.	Endast resultatet för två elever diskuteras i texten. Ingen av eleverna kunde faktorisera uttryck i förtestet. Båda eleverna lärde sig till eftertestet att känna igen och att faktorisera $a^2 - b^2$.	Structure sense som en grupp förmågor (High school algebra): • Känna igen en bekant struktur i sin enklaste form • Hantera en sammansatt term som en enhet, och genom

				ett lämpligt utbyte av symboler känna igen en bekant struktur i en mer komplex form • Välja lämpliga metoder och operationer, att utnyttja strukturen.
Hoch, M & Dreyfus, T. (2009). Developing Katy's Algebraic Structure Sense. I V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavargne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Conference for European Research in Mathematics Education* (CD), 529-538. Lyon, France. Konferensbidrag Google Scholar	Syftet är att undersöka om en elevs structure sense kan utvecklas.	En serie intervjuer genomfördes med Katy, en 16årig israelisk flicka.	Under rätt förutsättningar är det möjligt att utveckla ens structure sense. Katy fick bland annat i uppgift att kategorisera och namnge olika strukturer. Genom att göra det blev hon säkrare på olika begrepp samt att hon bättre kunde kom ihåg olika strukturer. Författarna tror att Katy skulle haft stor fördel att lära sig om strukturer i ett tidigt stadie för att främja hennes matematikutveckling.	Structure sense som en grupp förmågor (High school algebra): • Känna igen en bekant struktur i sin enklaste form • Hantera en sammansatt term som en enhet, och genom ett lämpligt utbyte av symboler känna igen en bekant struktur i en mer komplex form • Välja lämpliga metoder och operationer, att utnyttja strukturen.
Linchevski, L., & Livneh, D. (1999). Structure Sense: The Relationship between Algebraic and Numerical	Syftet är att undersöka om elevers missuppfattningar/svårigheter om algebraiska strukturer grundas i rent aritmetiska	53 individuella intervjuer genomfördes med sjätte och sjundeklass elever i	Det blev bekräftat att de svårigheter som eleverna har kan upplevas i aritmetiska, rent numeriska situationer. Svårigheterna finns även om det	Structure sense: att kunna använda ekvivalenta former till ett uttryck på ett flexibelt och kreativt sätt. Structure sense skulle kunna

Contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196. Vetenskaplig artikel Google Scholar	situationer.	Kanada och Israel.	bara är beräkningar med siffror, utan att okända tal blandas in. Olika svårigheter och missuppfattningar som eleverna hade: • Avskiljer en term från den tillhörande operationen t.ex. 11-2+5=11-(2+5) • Hoppar vidare med den efterföljande operationen t.ex. 5-n+2=(5-2)-n • Kan ej uppfatta annullering. 5+2+3-2, det blir ej fel i räknandet men det visar att eleven ej förstår strukturen. 2-3+3=2 – 6 eleven räknar 3 +3= 6, eleven ser inte annulleringen och avskiljer första 3:an från minustecknet. • En statisk syn på användandet av parenteser - uppfattar inte innebörden av parenteser. • Eleven kan ej acceptera likhetstecknet som en symbol för nedbrytning	innebära (vår tolkning, utifrån de missuppfattningar och svårigheter som diskuteras i artikeln): • Att kunna förstå strukturen i ett uttryck och uppfatta hur talen och operationerna förhåller sig till varandra. • En dynamisk syn på användandet av parenteser, förståelse för parentesernas betydelse • Förståelse för likhetstecknets betydelse • Förmåga att välja lämplig operation för att bilda delsummor

			• Ej förmåga att välja lämplig operation för att bilda delsummor.	
Lüken, M. M. (2012). Young Children's Structure Sense. *Journal for Didactics of Mathematics*, 33, 263-285. DOI 10.1007/s13138-012-0036-8 Vetenskaplig artikel Primo	Syftet är att undersöka om elever har structure sense när de börjar skolan, och om det finns något samband mellan matematiska förmågor och struktur-, och mönsterkunskap. Vidare är syftet var att se vilken roll structure sense har under utvecklandet av number sense.	En kvantitativ studie där 74 barn deltog. Barnen gick i förskolan - årskurs två.	Studien visar att många barn har hög struktur-, och mösterkompetens redan innan de har börjat skolan. Skillnaden mellan de hög-, och lågpresterande eleverna var hur som helst stor.	Early structure sense – den lätthet och flexibilitet som små barn använder för att operera med mönster och strukturer. Early structure sense kan beskrivas som en grupp förmågor att: • känna igen en gestaltning som en bekant struktur eller ett mönster (t.ex. prickar på tärning, finger mönster). Speciellt att man känner igen en bekant struktur i sin enklaste form och som en del av ett mer komplext mönster. • dela upp mönster i understruktuer • känna igen och etablera gemensamma kopplingar och relationer mellan understrukturer. • integrera understrukturer för

				att se ett mönster som en enhet
Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 33–49. Vetenskaplig artikel Google Scholar	Syftet är att introducera begreppet: Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS).	Intervjuer med 103 förste klassare som var 5-6 år. Intervjuerna genomfördes i Sydney, Australien.	Studien visade att AMPS är något som skulle kunna ge nya infallsvinklar i matematikundervisning i de tidiga skolåren. Forskarna tror att man kan undervisa eleverna i AMPS och att detta kan hjälpa eleverna vid deras framtida matematikinlärning.	AMPS består av två delar: en kognitiv där kunskap om struktur ingår och en metakognitiv där strävan är att söka och analysera mönster. Elever med hög nivå av AMPS skulle visa djup förståelse för mönster och strukturer.
Novotná, J., & Hoch, M. (2008). How structure sense for algebraic expressions or equations is related to structure sense for abstract algebra. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 93-104. Vetenskaplig artikel Google Scholar	Syftet är att undersöka hur structure sense för algebraiska uttryck och ekvationer (high school algebra) är relaterade till structure sense i abstrakt algebra (University)	De presenterar teoretiska argument för olika hypoteser.	Resultatet indikerar att high school algebra structure sense kan vara en föregångare till structure sense i universitets algebra.	Structure sense är en utveckling av symbol sense. Definition av (high school algebra) structure sense (se Hoch och Dreyfus, 2006).
Rüede, C. (2013). How Secondary Level Teachers and	Syftet är att introducera begreppet: Personal structure.	Intervjuer med 12 noviser 15-17 år och	High School algebra, Personal structure:	High School algebra, Personal structure:

Students Impose Personal Structure on Fractional Expressions and Equations - An Expert-NoviceStudy. *Educational Studies in Mathematics,* 83(3), 387-408. DOI 10.1007/s10649-012-9462-2 Vetenskaplig artikel Primo		12 experter som var matematiklärare. De deltagande fick i uppdrag att förenkla uttryck och lösa ekvationer utan några hjälpmedel (till exempel papper och penna). De skulle när de var klara berätta muntligt hur de tänkte och gick till väga för att nå ett resultat.	Att forma relationer mellan delarna i ett uttryck. Att reflektera över vilka delar som relaterar till varandra och på vilket sätt de är relaterade. Rüede delar upp personal structure i fyra kategorier: • Syntactic • Operational • First-order • Second-order Författaren är osäker på om de fyra kategorierna är olika nivåer eller olika typer av personal structures.	Att forma relationer mellan delarna i ett uttryck. Att reflektera över vilka delar som relaterar till varandra och på vilket sätt de är relaterade.
Van Stiphout, I. M. (2011). *The Development of Algebraic Proficiency* (Doktorsavhandling, TU/e University of Technology, Eindhoven School of Education). Doktorsavhandling Google Scholar	Avhandlingen syftar till att erhålla kunskap om den aktuella nivån i elevernas algebraiska skicklighet, och om denna insikt är en besvikelse, att söka upp kunskap om de djupare orsakerna till problemen som elever upplever	Fyra test konstruerades, ca: 1000 elever deltog. (Endast papper och penna användes). Eleverna var mellan 14 och 18 år Studien genomfördes i Nederländerna.	Resultatet av studien var ej tillfredställande, eleverna gjorde endast små framsteg. Underliggande orsaker undersöks vidare, bland annat att eleverna saknar structure sense/symbol sense.	Van Stiphout anser att structure sense är en del av symbol sense. Hon hänvisar till Arcavi (1994, 2005) och menar att symbol sense är en komplex känsla för symboler och en bred syn på matematiska uttryck. Till en bred syn på uttryck hör förmågan att läsa symboler och att ha flexibla procedurkunskaper, vilket relateras till att kunna uppfatta den algebraiska strukturen i ett uttryck.