HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Ett plus ett *blir* två

Introduktion av likhetstecknet i förskoleklass och årskurs 1

Matilda Abramsson

Andrea Flarup

Examensarbete I 15 hp

Grundlärarprogrammet inriktning förskoleklass och åk 1–3
Vårterminen 2015

Handledare
Pär Sandström

Examinator
Olle Östklint

HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE OCH KOMMUNIKATION (HLK)
Högskolan i Jönköping

Examensarbete I 15 hp
Grundlärarprogrammet inriktning förskoleklass och åk 1–3

Vårterminen 2015

SAMMANFATTNING

Matilda Abramsson, Andrea Flarup

Ett plus ett *blir* två

Introduktion av likhetstecknet i förskoleklass och årskurs 1

Antal sidor: 29

Syftet med detta examensarbete är att urskilja alternativa orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet. Syftet är också att undersöka hur den introducerande undervisningen kring likhetstecknet, i förskoleklass och årskurs 1, bör organiseras för att gynna en relationell syn på likhetstecknet.

I denna komparativa litteraturstudie har olika forskningspublikationer analyserats och sammanställts i arbetets resultatdel. Vidare har resultatet jämförts och diskuterats.

Kognitiv utveckling, matematikläromedel och lärarens undervisning är påverkansfaktorer på elevers förståelse för likhetstecknet. Gynnsamma arbetssätt för elevers relationella förståelse för likhetstecknet är exempelvis introducering av tecknet tillsammans med olikhetstecken, sanna/falska matematiska uttryck, öppna utsagor, problemlösning och olika typer av konkret material.

Sökord: *likhetstecknet, algebra, förskoleklass, årskurs 1–3, matematikundervisning, relationell, operationell, equal sign, primary school, education, relational, operational*

Postadress	Gatuadress	Telefon	Fax
Högskolan för lärande och kommunikation (HLK) Box 1026 551 11 JÖNKÖPING	Gjuterigatan 5	036–101000	036162585

Innehållsförteckning

1 Inledning

– *Fröken! Jag vet vad ett plus ett **blir**!*
– *Jaha, vad **blir** det?*
– *Det **blir** två!*

Många elever tolkar likhetstecknet operationellt, vilket innebär att förståelsen för symbolen är att något ska göras och/eller att ett svar ska skrivas (Häggström, Persson & Persson, 2012). Denna tolkning av likhetstecknet ställer till problem vid exempelvis ekvationslösning (Powell & Fuchs, 2010). I detta arbete är syftet att granska hur olika didaktiska åtgärder istället kan gynna en relationell förståelse för likhetstecknet hos elever redan i de första skolåren. Elever behöver få förståelse för att likhetstecknet markerar att två eller fler uttryck har samma värde (Häggström et al., 2012). Frågan är om det är något i lärares undervisning som resulterar i att elever får en operationell syn på tecknet? Något annat att reflektera kring är om något i det sätt lärare använder då de introducerar likhetstecknet för elever i förskoleklass och årskurs 1 har resulterat i en operationell uppfattning. Av erfarenheter från vår egen skolgång och verksamhetsförlagda utbildningar på grundlärarutbildningen har vi uppmärksammat att en operationell syn är vanligt förekommande.

I detta examensarbete har en komparativ litteraturstudie utförts, där olika forskningspublikationer har granskats och jämförts. Det insamlade materialet hade fokus på att tydliggöra olika orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet. Det hade också fokus på att beskriva hur undervisningen av likhetstecknet bör organiseras och introduceras i förskoleklass och årskurs 1 för att gynna en relationell förståelse av tecknet.

> Eleven har grundläggande kunskaper om matematiska begrepp och visar det genom att använda dem i vanligt förekommande sammanhang på ett i huvudsak fungerande sätt. Eleven kan beskriva begreppens egenskaper med hjälp av symboler och konkret material eller bilder. Eleven kan även ge exempel på hur några begrepp relaterar till varandra (Skolverket, 2011b, s. 67).

Citatet ovan beskriver kunskapskravens formulering av godtagbara kunskaper i slutet av årskurs 3. Det centrala innehållet i kursplanen för matematik förskriver att elever i årskurs 1–3 ska arbeta med matematiska likheter och likhetstecknets betydelse (Skolverket, 2011b).

2 Syfte och frågeställningar

Syftet med denna komparativa litteraturstudie är att granska alternativa orsaker till att elever har en operationell syn på likhetstecknet. Syftet är även att undersöka hur den introducerande undervisningen kring likhetstecknet, i förskoleklass och årskurs 1, bör organiseras för att gynna en relationell syn på tecknet.

- Vad finns det för orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet?
- Hur bör lärare introducera likhetstecknet för elever i den begynnande matematikundervisningen i förskoleklass och årskurs 1 för att gynna en relationell syn för likhetstecknet?

3 Bakgrund

I detta kapitel beskrivs bakgrunden till litteraturstudiens syfte och frågeställningar. Exempelvis beskrivs att matematik innefattar många olika delar, vilka är viktiga för elevers matematikinlärning. En viktig del är att elever introduceras i matematiska begrepp och symboler, däribland likhetstecknet och dess relationella betydelse. Vidare beskrivs skolans matematiska uppdrag, där fokus är att demonstrera likhetstecknets betydelse i matematikundervisningen. Även historien bakom likhetstecknet presenteras.

3.1 Begrepp

Likhetstecknet (=), även kallat ”lika-med-tecknet”, är ett matematiskt tecken. Det används för att markera att två uttryck har samma värde (Likhetstecken, 2015). Det ska vara ekvivalens mellan enheterna. Dock behöver inte dessa enheter se likadana ut, då det exempelvis kan vara en sjua på ena sidan av likhetstecknet samt en femma, ett additionstecken och en tvåa på andra sidan ($7 = 5 + 2$). Tecknet bör uttryckas som att det ”är” en likhet mellan två lika stora enheter och inte att det ”blir”. Att uttrycka tecknet som ”blir” kan ge en operationell förståelse, då symbolen kan uppfattas som en förändring. Fem adderat med två blir inte sju, utan *är/är lika med/kan ersättas med* sju (Kiselman & Mouwits, 2008). ***Olikhet*** är en matematisk formel, vilken innehåller ett ***olikhetstecken***. De olikhetstecken som påträffas i matematiken är ”mindre än” (<), ”mindre än eller lika med” (≤), ”större än” (>), ”större än eller lika med” (≥) och ”inte lika med”/”skiljt från” (≠). Dessa matematiska tecken jämför storheter (Kiselman, u.å.).

Operationell, instrumentell eller dynamisk syn av likhetstecknet innebär att elever ser tecknet som en representation för att något ska göras eller att det $blir$. Elever uppfattar att $5 + 2\ blir\ 7$ (Häggström et al., 2012; Skemp, 2006). En operationell syn på likhetstecknet innebär att vänsterledet ”finns” först och sedan övergår till högerledet (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997; Sfard, 1991). I detta arbete kommer denna syn benämnas operationell. En ***relationell*** eller statisk syn på likhetstecknet innebär däremot att elever tolkar tecknet som en likhet mellan två eller fler enheter. Elever har förståelse för att $5 + 2\ är\ 7$ (Häggström et al., 2012). En relationell syn innebär även att likheten kan utläsas både från vänster till höger och tvärtom. Exempel på detta är $3 = 3$ och $2 + 1 = 4 - 1$ (Bergsten et al., 1997; Sfard, 1991). I detta arbete kommer denna syn benämnas relationell.

3.2 Lärarroll och matematikundervisning

”Redan i tidig ålder resonerar barn om matematiska samband, vilket öppnar för möjligheter att uppmärksamma och problematisera matematik i meningsfulla sammanhang” (Björklund, 2012, s. 61). Barn upptäcker matematik genom att utforska konkreta relationer mellan miljön omkring dem och sig själva, vilket är grundstenen i barns matematiska lärande. Därigenom blir matematiken meningsfull för dem, då de på många skilda sätt kan reflektera kring den. Matematiskt lärande behöver inte ske i en strikt ordning utan bör av lärare undervisas ur ett helhetsperspektiv. Synen på matematikinlärning har ändrats till ett mer sammanhållet projekt. Elever förväntas upptäcka, konstruera och söka samband mellan olika begrepp. Lärarrollen har därför blivit mer komplex än tidigare, eftersom lärares uppdrag är att låta elevers tänkande vara fokus i undervisningen. Ett naturligt sätt för barn att lära matematik är genom lek, då det är barns sätt att erövra världen (Björklund, 2012; Boesen, Emanuelsson, Johansson, Wallby & Wallby, 2006).

Skolan ”ska främja alla elevers utveckling och lärande samt en livslång lust att lära” (Skolverket, 2011b, s. 7). Citatet understryker ett viktigt uppdrag hos all pedagogisk personal inom skolväsendet, då skolans värdegrund och uppdrag i läroplanen tydligt poängterar behovet av att alla elevers lärande och utveckling ska främjas. Matematiklärares uppgift är att tidigt förklara för elever varför matematik är viktigt. Lärare behöver ge elever förståelse för att matematik inte enbart är tal och beräkningar, utan handlar om hur saker förhåller sig till varandra. Detta sker naturligt hos barn i vardagen, då de erfar många saker genom sin nyfikenhet och sitt utforskande. I barns värld existerar inte matematiska begrepp och symboler. Därför ställer det stora krav på lärare att försöka förstå elevers tankar för att kunna omvandla elevers befintliga och konkreta förståelse för matematiken till en mer abstrakt sådan. Lärare i förskoleklass och årskurs 1 har även behov av att ta reda på elevers förkunskaper i matematik, vilka elever bär med sig från exempelvis förskolan. En viktig utmaning hos lärare i de tidiga årskurserna är, som tidigare nämndes, att kunna sätta sig in i elevers tänkande kring matematik. Att bejaka elevers matematikfärdigheter är viktigt för att kunna planera en individualiserad undervisning (Björklund, 2012).

Språk och matematik är nära förknippade. Språk, inklusive ett gott ordförråd, ger goda möjligheter till matematisk förståelse. Det är viktigt att låta elever förklara sitt matematiska tänkande genom att ställa frågor kring hur de resonerar. Det är av betydelse att få insikt i deras tänkande för att ur ett lärarperspektiv kunna stärka elevers självförtroende (Björklund, 2012). Vygotskij (1971) betonar betydelsen av att elever får uttrycka sig, då detta är en viktig del i deras begreppsutveckling. Att kunna problematisera matematiken är även en förmåga i styrdokumenten (Skolverket, 2011a, 2011b). Hemmets matematiska samtalande har också betydelse för elevers matematiska begreppsbildning. Att växa upp i ett hem där det pratas matematik har stor betydelse för hur elever tillägnar sig matematiken i skolundervisningen (Björklund, 2012).

3.3 Likhetstecknets historia

Likhetstecknet har en lång historia. Innan 1500-talet fanns inget tecken för att beskriva likheter, utan ”lika med” hade textats med bokstäver istället. År 1557 började likhetstecknet användas av engelsmannen Robert Recorde. Symbolens utseende skilde sig dock från i dag, då de parallella linjerna var längre (===). Från början var inte tanken att likhetstecknet skulle ses som en operation, vilket ofta är en uppfattning hos elever i matematikundervisningen i dag. Tanken var att två sidor med lika värde skulle jämföras och att likhetstecknet skulle uppfattas relationellt (Häggström et al., 2012; Lundberg & Sterner, 2006).

3.4 Uppfattningar om likhetstecknet

Elever får ofta svårigheter i algebra senare i skolåren eftersom de har en operationell syn på likhetstecknet med sig från tidigare skolår. En vanlig tolkning av likhetstecknet hos elever är att tecknet är en uppmaning att en beräkning ska göras och/eller att ett svar ska skrivas. Det innebär att de ser tecknet som en representation för att en operation ska utföras samt att tecknet utläses ”blir” istället för ”är lika med”/”kan ersättas med”. Det är viktigt att elever kan omvärdera den operationella synen på likhetstecknet till en relationell (Carpenter et al., 2003;

Häggström et al., 2012; Löwing, 2006; Malmer, 2002; Rittle-Johnson, Matthews, Taylor & McEldoon, 2011).

Elever måste kunna uppfatta likhetstecknet på ett relationellt sätt, vilket de tidigare uppfattat operationellt. Lärare introducerar ofta likhetstecknet operationellt i den inledande undervisningen om tal och räknesätt. Matematikuppgifter har ofta formen $A * B = \_$ där $*$ representerar något av de fyra räknesätten och där resultatet av beräkningen ska skrivas på streckets plats. Den operationella synen på likhetstecknet begränsar även elevers möjligheter att lära sig och förstå grundläggande aritmetik samt behärska ekvationslösning inom algebra (Carpenter et al., 2003; Häggström et al., 2012).

3.5 Skolans matematiska uppdrag i årskurs 1–3

Syftestexten i kursplanen för matematik (Skolverket, 2011b) betonar att elever i grundskolan ska ges förutsättningar att föra matematiska resonemang. Vidare belyser en av förmågorna i kursplanen att elever ska få använda matematiska begrepp, däribland likhetstecknet, i vardagen och skolan. Elever ska också ges möjlighet att förstå samband mellan olika matematiska begrepp. Det centrala innehållet i kursplanen beskriver att elever i årskurs 1–3 ska få arbeta med ”matematiska likheter och likhetstecknets betydelse” (Skolverket, 2011b, s. 63). Även kunskapskraven för årskurs 3 understryker att elever ska ha förståelse för matematiska begrepp. Dessa matematiska och grundläggande kunskaper ska elever kunna använda i vardagliga sammanhang. Elever ska också, med hjälp av matematiska symboler och konkret material, kunna beskriva egenskaper hos dessa begrepp (Skolverket, 2011b). ”Kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser” (Skolverket, 2011b, s. 62). Detta exempel ur kursplanen i matematik visar matematikens betydelse i vardagslivet.

Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011a) påvisar, enligt matematikdidaktisk forskning, att elevers tidiga möte med algebra är viktigt för deras matematiska utveckling. Likhetstecknets innebörd och matematiska likheter beskrivs som grundpelare för att i framtiden förstå algebra, vilket i sin tur ska leda till förståelse för obekanta tal och variabelbegreppet.

4 Metod

I detta kapitel beskrivs metodval, informationssökningsprocessen, arbetets kriterier för inklusion, materialurvalet samt materialanalysen.

4.1 Informationssökning

Ett antal sökord/sökfraser användes vid informationssökningen till denna litteraturstudie. De sökord/sökfraser som användes var *likhetsteck*, likhetstecknets betydelse, equal sign*, introduc* AND equal sign* och *teach* AND equal sign*. Dessa sökord valdes ut genom association till begreppet likhetstecken.

De söktjänster som användes var *Primo* (Jönköpings högskolebiblioteks söktjänst), *ERIC* (Educational Resources Information Center), *MathEduc* (Mathematics Education Database), *SwePub* och *Google Scholar*. Vid sökningar i dessa tjänster användes sökorden/sökfraserna ovan. Även kedjesökningar användes. *Ulrichsweb* användes för att kvalitetsgranska vissa tidskrifter.

4.2 Kriterier för inklusion

Ett antal kriterier för inklusion användes vid informationssökningen med grund i syfte och frågeställningar.

Det första kriteriet var att forskningen skulle omfatta undervisning kring likhetstecknet i förskoleklass och årskurs 1, då detta återfinns i syftet med detta arbete. Dock ändrades detta kriterium under informationssökningsprocessen eftersom många intressanta forskningsartiklar påträffades kring undervisning om likhetstecknet i högre årskurser. De ansågs kunna uppfylla denna litteraturstudies syfte och frågeställningar. Vissa presenterade metoder i dem skulle nämligen kunna appliceras i den begynnande matematikundervisningen.

Kriterium nummer två innebar att forskningsinnehållet skulle belysa studier kring orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet och/eller hur lärare *bör* introducera likhetstecknet för att gynna en relationell syn på tecknet.

Det tredje kriteriet var att resultatet i detta arbete skulle innehålla ett brett åldersspann av forskning. Detta för att få aktuell forskning kombinerat med något äldre och på så vis kunna dra fler slutsatser kring vilka arbetssätt som är mest gynnsamma för att skapa en relationell förståelse för likhetstecknet.

Fjärde kriteriet innebar att arbetet skulle innefatta både internationell och nationell forskning, detta för att säkerställa att den analyserade forskningen hade stor bredd.

Alla kriterier har förankring i litteraturstudiens syfte och frågeställningar för att säkerhetsställa att dessa presenteras i resultat- och diskussionsdelen för litteraturstudien.

4.3 Urval

I denna litteraturstudie har 22 publikationer använts: 15 artiklar, tre konferensbidrag, tre antologikapitel och en forskningsrapport. Dessa valdes för att täcka kriterierna för inklusion samt för att svara på arbetets syfte och frågeställningar. Publikationerna syftade till att beskriva lärares introducerande undervisning om likhetstecknet. Syftet var både att undersöka alternativa orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet samt studera hur den introducerande undervisningen kring detta matematiska tecken bör utföras. Det gjordes även ett urval av litteratur för att både internationella och nationella perspektiv skulle åskådliggöras i resultatdelen. Fokus låg på internationell forskning, eftersom nationell forskning endast belyser en liten del av världen.

4.4 Materialanalys

Materialet analyserades utifrån kriterierna för inklusion, vilka fastställdes innan informationssökningen gjordes. Kriterierna ställdes mot varandra för att likheter och skillnader i publikationerna skulle kunna analyseras. ”Översikt över analyserad litteratur” (se bilaga) användes för att få en överblick av litteraturen till resultatdelen i arbetet. I varje publikation analyserades först inledning och sammanfattning. Därefter sållades en del material bort, då de inte uppfyllde kriterierna för inklusion eller svarade på syftet och frågeställningarna för litteraturstudien. Det till sist utvalda materialet lästes i sin helhet för att få en sammanfattande bild av innehållet. I varje publikation granskades vad forskarna hade studerat, vilka metoder de hade använt, vilka deltagargrupper studierna gällde samt resultatet av forskningen. Detta noterades i ”Översikt över analyserad litteratur” (se bilaga). Det utvalda materialet kategoriserades utifrån de två frågeställningarna och sedan skapades underrubriker till de två kategorierna. Därefter ställdes de olika materialen i relation till varandra för att kunna urskilja likheter och skillnader. Dessa likheter och skillnader användes sedan för att presentera resultatet i detta arbete. Vidare diskuterades även det framkomna materialet i diskussionsdelen, med fokus på relation till styrdokumenten och yrkesverksamheten. Det framkomna materialet ställdes även i relation till litteraturstudiens syfte, frågeställningar och bakgrund.

5 Resultat

I kommande resultatdel kommer alternativa orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet presenteras. Det beskrivs hur lärare, i förskoleklass och årskurs 1, bör introducera likhetstecknet i den begynnande matematikundervisningen. Detta för att elever ska få en relationell syn på symbolen.

5.1 Orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet

Orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet är av skilda slag. Nedan presenteras denna litteraturstudies alternativa orsaker till elevers operationella förståelse för likhetstecknet.

5.1.1 Kognitiv utveckling

Elever i början av grundskolåren har ofta svårigheter med ekvationslösning på grund av att de anser ekvationer vara obegripliga. Viss forskning hävdar att elevers kognitiva förmåga inte är tillräckligt utvecklad i grundskolans första årskurser för att de ska ha möjlighet att kunna lösa ekvationer (Baroody & Ginsburg, 1982; Kieran, 1981). Det är först i trettonårsåldern elever är mogna att förstå likhetstecknet relationellt och förstå ekvivalenta uttryck (Baroody & Ginsburg, 1982). Annan forskning (Warren, 2007) påvisar däremot att elever redan i femårsåldern är kapabla att förstå likheter med konkret material. Forskningen visar även att dessa elever till viss del är kompetenta nog att använda det symboliska språket kring likheter. Warren anser därför att det är betydelsefullt att införa algebra tidigt i grundskolans matematikundervisning. Många andra studier visar att elever i grundskolans första årskurser har en tillräcklig kognitiv förmåga för att förstå likheter konkret och symboliskt (Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour, 2013; Carpenter & Franke, 2001; Li, Ding, Capraro & Capraro, 2008; McNeil, Fyfe, Petersen, Dunwiddie & Brletic-Shipley, 2011; Schliemann, Lins Lessa, Brito Lima & Siqueira, 2007). Elevers svårigheter i algebra har länge ansetts bero på deras otillräckliga kognitiva förmåga, men detta påstående kan ifrågasättas (Schliemann, Carraher och Brizuela, 2007a, 2007b).

5.1.2 Matematikläromedel

En eventuell orsak till att elever har en operationell syn på likhetstecknet är att många matematikläromedel introducerar likhetstecknet på ett operationellt sätt. Detta problem är vanligt förekommande i flera delar av världen och i flera av skolväsendets årskurser. Exempel på uppgifter som kan leda till en operationell syn på likhetstecknet är $3 + 4 = \_$ och $9 - 6 = \_$. Dessa uppgifter missgynnar den relationella synen på tecknet, vilken behövs för att kunna lösa ekvationer

(Baroody & Ginsburg, 1982; Essien, 2009; Hattikudur & Alibali, 2010; Li et al., 2008; McNeil et al., 2006; Sherman & Bisanz, 2009). En jämförelse mellan matematikläromedel i Kina och USA påvisar att det finns skillnader mellan hur dessa är uppbyggda. I de amerikanska läromedlen påträffas likhetstecknet operationellt med fokus på att finna ett svar, medan de kinesiska läromedlen fokuserar på lösningsprocessen och på att elever ska förstå att likhetstecknet är en relation mellan två lika stora kvantiteter. I de kinesiska läromedlen introduceras likhetstecknet tillsammans med symbolerna för ”större än” och ”mindre än”, medan de amerikanska läromedlen innehåller traditionella aritmetiska uppgifter. Exempel på en sådan uppgift är $55 - 7 = \_$ (Li et al., 2008). Vissa lärarhandledningar till matematikläromedel förklarar likhetstecknet som ett tecken för en operation, där elever förväntas summera antalet objekt i uppgifter. Dessa typer av uppgifter innefattar addition och/eller subtraktion. Exempel på uppgifter är $5 + 2 = \_$ och $8 - 4 = \_$ (Essien, 2009; Hattikudur & Alibali, 2010). Det symboliska tänkandet uttrycks främst genom lek och fantasi hos elever i årskurs 1. Det är viktigt att läromedlen i matematik utgår från detta då elever introduceras i likhetstecknet och dess relationella betydelse (Essien, 2009).

Enligt en studie i Sydafrika, där en analys av tre matematikläromedel gjorts, påvisades en avsaknad av uppgifter kring betydelsen av likhetstecknet. Både lärarhandledningar och elevböcker granskades. Analysen visade att matematikläromedlen främst innehåller traditionella uppgifter kring addition och subtraktion i den begynnande matematikundervisningen. Det tas för givet att elever lär sig likhetstecknet automatiskt via uppgifter i matematikläromedlen. Studien påvisar att det är av betydelse att använda läromedel som gynnar elevers relationella förståelse för likhetstecknet. I den nationella läroplanen för Sydafrika finns inte betydelsen av att lära ut likhetstecknet till årskurs 1 betonad (Essien, 2009). I USA finns en författning, vilken beskriver vad elever i olika årskurser ska ha för kunskaper i olika ämnen. Denna författning, *The Common Cord Standards*, betonar att elever i årskurs 1 behöver få med sig kunskaper kring likhetstecknet (Barlow & Harmon, 2012).

5.1.3 Lärares undervisning

Skemp (2006) beskriver att han brukade ha uppfattningen om att alla matematiklärare undervisade samma matematiska innehåll lika gynnsamt, men har senare genom studier kommit fram till att en del lärare undervisar mer gynnsamt än andra. Att undervisa om ett visst matematiskt innehåll kan enligt honom göras på två olika sätt: instrumentellt eller relationellt. I detta arbete benämns instrumentellt som operationellt. Att undervisa en relationell syn på likhetstecknet har många fördelar. För det första är det lättare att ta till sig nytt matematiskt innehåll om man från början blivit undervisad med en relationell syn på matematik. För det andra är det enklare att skapa en relationell förståelse för likhetstecknets användande och betydelse, men det är mer tidskrävande att ta till sig än ett operationellt sätt. För det tredje påvisar evidensbaserade fakta att en relationell kunskap är effektivare samt att elever får en djupare förståelse för matematiska begrepp (Skemp, 2006). Elever, vana vid traditionell aritmetikundervisning, uppfattar ofta likhetstecknet operationellt. En traditionell aritmetikundervisning innehåller uppgifter likt $5 + 5 = \_$, där elever förväntas summera talen på vänster sida av likhetstecknet och skriva resultatet av summeringen på höger sida (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998; Schliemann et al., 2007a, 2007b). Schliemann et al. (2007a, 2007b) ställer hypotesen att en undervisning innehållande aritmetik och algebra tillsammans skulle kunna gynna elevers relationella förståelse för likhetstecknet i den begynnande matematikundervisningen. Att först undervisas kring aritmetikens operationella syn på likhetstecknet för att sedan övergå till algebrans relationella syn försvårar elevers förståelse för likhetstecknet.

Elever, vana vid en traditionell aritmetikundervisning, saknar ofta en relationell förståelse för likhetstecknet. Detta på grund av lärares bristfälliga undervisning kring tecknets relationella innebörd (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998). Många gånger är elevers operationella förståelse för likhetstecknet bestående genom skolåren. Sannolikt beror detta på den traditionella aritmetikundervisningen som återfinns i grundskolans matematikundervisning, det vill säga att aritmetiken används som ett beräkningsverktyg (Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens, 2008; Warren, 2007). Algebraiskt tänkande kring matematik bör införas långt tidigare än vad det gör, då studier påvisar att yngre elever har förmåga att ta till sig algebraiskt innehåll (Falkner, Levi & Carpenter, 2007; Li et al., 2008; Schliemann et al., 2007; Warren, 2007).

5.2 Introduktion av likhetstecknet

Introduktionen av likhetstecknet i matematikundervisningen har stor betydelse för elevers relationella förståelse för symbolen (Hattikudur & Alibali, 2010). Flera olika arbetssätt har påträffats genom granskning av skilda studier. Skollagen (2010:800) fastslår att all undervisning ska ske på ett likvärdigt sätt, vilket bland annat innebär att olika arbetssätt bör införlivas i matematikundervisningen. Nedan kommer olika arbetssätt presenteras, med fokus på att framlägga fördelarna med respektive arbetssätt.

5.2.1 Konkret material

För att modellera en relationell syn av likhetstecknet bör elever få använda olika balansverktyg (gungbrädor, vågskålar och talens balansvåg). Det är viktigt att elever får vara delaktiga och aktiva i arbetet med att konkret gestalta likheter och likhetstecknet. Detta är en viktig del i elevers algebraiska utveckling. Det kan vara fördelaktigt att introducera likhetstecknet i kombination med att jämföra mängder (Adolfsson Boman et al., 2013; Ahlberg, 2000; Barlow & Harmon, 2012; Essien, 2009; Li et al., 2008; Schliemann et al., 2007; Sherman & Bisanz, 2009; Warren, 2007). Det är betydelsefullt att elever ges många olika erfarenheter av att jämföra mängder, detta på grund av att det tar lång tid för elever att överföra sitt eget språk till ett mer matematiskt och abstrakt. Konkret material kan vara ett fördelaktigt didaktiskt verktyg för att hjälpa elever anamma ett mer abstrakt matematiskt språk (Ahlberg, 2000). Dock hävdar Warren (2007) att vågskålar, gungbrädor och talens balansvåg kan ställa till det för vissa elever. En del elever fokuserar på att det ska vara exakt balans av själva vågen/brädan, istället för att fokusera på kvantiteterna som jämförs.

Andra exempel på användbara konkreta material, för att gestalta likheter, är Cuisenairestavar och tärningar. Cuisenairestavar är små stavar i olika färger, där längderna på stavarna symboliserar okända tal. Dessa stavar sätts ihop i olika konstellationer för att kunna jämföras med varandra (Adolfsson Boman et al., 2013; Sherman & Bisanz, 2009). Två tärningar kan användas i undervisningen genom att elever får placera symboler för större än eller mindre än mellan dem. Genom användandet av tärningar ges elever möjlighet att själva upptäcka att det behövs ett tecken för att beskriva likheter. Ett exempel på detta kan vara att en elev slår två femmor, vilka är lika. Detta innebär att eleven kan uppmärksamma att varken större än eller mindre än passar (Adolfsson Boman et al., 2013).

5.2.2 Undervisning med eller utan olikhetstecken

Studier påvisar att det finns fördelar med att, i den begynnande matematikundervisningen, introducera likhetstecknet *tillsammans* med symboler för ”större än” och ”mindre än”. Detta bör göras för att ge elever en relationell förståelse för likhetstecknet (Hattikudur & Alibali, 2010; Li et al., 2008). En annan fördel är att elever lär sig tre matematiska symboler parallellt, istället för att endast få kunskaper om likhetstecknet (Hattikudur & Alibali, 2010). Dock finns det studier som framlägger stöd för att ”större än” och ”mindre än” bör introduceras *före* likhetstecknet (Adolfsson Boman et al., 2013; Essien, 2009). Att införa ”större än” och ”mindre än” före likhetstecknet gör att elever själva får upptäcka likhetstecknet och dess innebörd (Adolfsson Boman et al., 2013). Införandet av likheter och olikheter kan göras i konkret form innan införandet av matematiska symboler. Elever kan exempelvis få samtala kring och jämföra två föremåls längder för att sedan använda sig av ”större än”, ”mindre än”, ”inte lika med” och ”lika med” mellan objekten. Ett exempel på detta kan vara att jämföra en tesked och en matsked (Li et al., 2008). Däremot finns det forskning som tyder på att likhetstecknet inte bör användas för att gestalta en likhet genom jämförande av objekt. Detta för att elever får fel förståelse för likhetstecknet på grund av detta. Elever bör istället ges förståelse för att likhetstecknet beskriver en relation mellan tal och inte mellan objekt. Detta arbetssätt fokuserar därför inte på rätt begrepp (Essien, 2009). Att låta elever använda sig av likhetstecknet och några olikhetstecken (≠, < och >) i matematikundervisningen ger dem möjligheter att upptäcka likheter och skillnader mellan symbolerna. Detta under förutsättning att de har förståelse för symbolernas innebörd (Hattikudur & Alibali, 2010).

Viss forskning framhåller vikten av att införa likhetstecknet *före* addition och subtraktion. Detta kan ske antingen med konkret material (se kap. 5.2.4) och/eller med matematiska symboler (Ahlberg, 2000; Essien, 2009; Kieran, 1981). Elever bör möta likhetstecknet konkret innan de möter matematiska uppgifter innehållande symbolen (Ahlberg, 2000). Elever, vilka först introduceras i likhetstecknets betydelse före symbolen ”lika med” (=) och addition, har visat förståelse för uppgifter som $3 = 3$, $3 + 4 = 5 + 2$ och $5 = 3 + 2$. De ges möjlighet till en relationell förståelse för likhetstecknet (Kieran, 1981). Konkret material kan ge elever möjlighet att laborera med likheter *innan* addition och subtraktion införs i undervisningen. På detta sätt kan elever även undervisas kring att likhetstecknet innebär att addition- och subtraktionssymbolerna kan införas på båda sidor av likhetstecknet (Ahlberg, 2000).

5.2.3 Elevresonemang kring likhetstecknet

Det är viktigt att låta elever föra resonemang kring likheter, likhetstecknet och likhetstecknets betydelse (Barlow & Harmon, 2012; Falkner et al., 2007; Knuth et al., 2008; Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998; Warren, 2007). Det kan exempelvis handla om diskussioner kring olika matematiska uttryck (Falkner et al., 2007). Diskussioner kring likhetstecknet och dess användande är behövligt när elever ser likhetstecknet som ett beräkningsverktyg, exempelvis när de skriver $2 + 3 = 5 + 3 = 8 + 5 = 13$. Detta är en missuppfattning av likhetstecknets relationella innebörd och tecknet är felaktigt använt (Knuth et al., 2008).

Att införa matematiska likheter och likhetstecknet i matematikundervisningen genom att använda sanna/falska matematiska uttryck, vilka elever får resonera kring, har påvisat goda effekter på elevers förståelse av likhetstecknets relationella innebörd. Att undervisa med hjälp av sanna/falska matematiska uttryck innebär att lärare visar olika numeriska uttryck och att elever förväntas resonera sig fram till om dessa är korrekta eller inte. Exempel på dessa matematiska uttryck är $3 = 3$, $3 + 5 = 5 + 2$ och $58 + 0 = 58$ (Carpenter & Franke, 2001; Carpenter & Levi, 2000; Falkner et al., 2007; Hattikudur & Alibali, 2010; Molina & Ambrose, 2006). Sanna/falska matematiska uttryck har även varit positivt för att få elever i årskurs 3 att omvandla sin operationella syn på likhetstecknet till en mer relationell (Molina & Ambrose, 2006).

Ett annat arbetssätt med goda effekter för elevers relationella förståelse för likhetstecknet är introducerandet av öppna utsagor. Öppna utsagor kan både gestaltas symboliskt ($2 = \_ + 1$ eller $\square + 3 = \Delta$) och med konkret material i olika former (Carpenter & Levi, 2000; Falkner et al., 2007; McNeil et al., 2011; Molina & Ambrose, 2006; Sherman & Bisanz, 2009). Elever kan själva skapa öppna utsagor för att gestalta likhetstecknets relationella betydelse. Arbete kring öppna utsagor med fokus på likhetstecknets betydelse kan också innefatta undervisning om siffran 0, exempelvis $0 + 0 + 0 + \square = \square$ (Carpenter & Levi, 2000).

5.2.4 Problemlösning

Det finns fördelar med att undervisa matematiskt innehåll genom problemlösning, i detta fall likhetstecknet. När elever är engagerade i problemlösning binder de samman sina egna erfarenheter och förkunskaper till det matematiska innehåll som ska läras. Det är viktigt med meningsfulla kontexter vid undervisning i problemlösning, dock kan det vara problematiskt att finna kontextuella problemlösningsuppgifter där likhetstecknet innefattas och som engagerar elever (Barlow & Harmon, 2012).

Studier indikerar positiva konsekvenser av att elever undervisas genom algebra för att lösa matematiska problem (Barlow & Harmon, 2012; Schliemann et al., 2007a, 2007b). Elever i sjuårsåldern kan ges en relationell förståelse för likhetstecknet genom *verbala problem*. Detta sätt är troligen det mest logiska för elever i den åldern att förstå (Schliemann et al., 2007). Nedan följer ett exempel på ett verbalt problem elever i undersökningen fick presenterat för sig:

> Bruno and Tiago love to eat chocolate. One day, Bruno took 10 chocolate bars to school and then bought two more at the school store. Tiago brought five chocolate bars to school, then bought five more in the school store, and later got two more from a friend. They had the same number of chocolate bars. During break time, Tiago ate two of his chocolate bars and Bruno also ate two of

> his chocolate bars. Now do you think that after the break Tiago has the same number of chocolate bars as Bruno? Or, do you think one has more chocolate bars than the other? (Schliemann et al., 2007, s. 25).

En fördel med att se och förstå likheter genom praktisk problemlösning med konkret material är att elever ges en relationell förståelse för likhetstecknet genom en mer meningsfull kontext. En annan fördel är att eleverna ges möjligheter att resonera, jämföra och diskutera matematiken med varandra i klassen (Adolfsson Boman et al., 2013; Barlow & Harmon, 2012; Falkner et al., 2007). Detta återfinns även i syftestexten i den svenska kursplanen för matematik, där elever förväntas utveckla förmåga att föra matematiska diskussioner och kommunicera matematik. Elever ska även ges möjlighet att arbeta i olika gruppkonstellationer och individuellt genom varierade arbetssätt, vilket de övergripande målen och riktlinjerna i läroplanen föreskriver (Skolverket, 2011b).

6 Diskussion

Diskussionen har grund i metod- och resultatdelen samt bakgrunden till denna litteraturstudie. Det som diskuteras relaterar till studiens syfte och frågeställningar.

6.1 Metoddiskussion

Komparativ litteraturstudie valdes som undersökningsmetod till detta examensarbete. Metoden valdes för att kunna jämföra olika forskningsresultat kring likhetstecknet. Denna litteraturstudie innefattade informationssökning i olika databaser för att finna olika forskningspublikationer. Forskningspublikationerna analyserades och sammanställdes. Sammanställningen presenterades sedan i litteraturstudiens resultatdel. Detta för att i diskussionsdelen kunna diskutera alternativa orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet samt diskutera för- och nackdelar med olika undervisningsmetoder kring införandet av likhetstecknet.

6.1.1 Informationssökning

Informationssökningen, vilken gjordes för att finna forskning kring likhetstecknet i olika publikationstyper, har mestadels fungerat väl. Databasen ERIC gav väldigt goda resultat, då den är pedagogiskt inriktad. De flesta referenser i databasen är även ”peer reviewed”, det vill säga att andra forskare har granskat dem. Till en början var det svårt att veta om forskningspublikationerna var kvalitetsgranskade eller inte. För att lösa detta problem kontrollerades de publikationernas tidsskrifter i Ulrichsweb. Även återkommande författare uppmärksammades. Då flera av författarna var återkommande i många olika artiklar kunde det konstateras vilka forskare som var välkända inom forskningsområdet för litteraturstudien. En del forskare är även kända från våra tidigare högskolestudier inom matematikdidaktik. MathEduc och Google Scholar var även databaser med goda sökresultat. Flertalet forskningspublikationer påträffades i fler än en databas, exempelvis påträffades samma publikationer i både ERIC och MathEduc.

De funna forskningspublikationerna granskades för att kunna urskilja om de uppfyllde kriterierna för inklusion (se kap 4.2). De som inte uppfyllde kriterierna exkluderades. Till en början var ett av kriterierna att forskningen endast skulle beröra förskoleklass och årskurs 1, men detta kriterium ändrades under informationssökningsprocessen. Denna ändring gjordes då det uppenbarades att även forskning på elever från årskurs 2 till 7 med fördel kunde användas för att svara på litteraturstudiens syfte och frågeställningar. Många publikationer beskriver hur en operationell syn på likhetstecknet bör övergå till en relationell syn hos elever högre upp i skolåren. Arbetssätten kan även appliceras i den begynnande matematikundervisningen i förskoleklass och årskurs 1. Detta för att från början grundlägga en relationell förståelse för likhetstecknet hos elever.

Under informationssökningsprocessen gjordes många upptäckter, exempelvis hur man på effektivaste sätt finner relevanta forskningspublikationer. Detta gjordes genom att till största del använda sökord och *inte* sökfraser. Till en början användes en stor del sökfraser, men dessa sökningar gav många irrelevanta forskningspublikationer. Några användbara publikationer hittades dock på detta sätt. Istället för att endast utnyttja sökfraser användes sökord med trunkering, vilket gav ännu bättre sökresultat. Att använda engelska sökord var också effektivt i informationssökningen, då det gav fler träffar än de svenska sökorden.

Kedjesökningar är det tillvägagångssätt med flest positiva resultat för att kunna svara på litteraturstudiens syfte och frågeställningar. Kedjesökningarna gav många olika referenser att leta vidare i. Det kunde dock vara aningen problematiskt att hitta referenserna utifrån tidigare arbetens referenslistor, då refereringarna inte helt uppfyllde kraven för hur korrekt referering bör ske i ett akademiskt arbete. Därför användes författarnamnen och/eller titlarna på artiklarna i sökmotorn Google och på så vis kunde referenserna hittas. För ett ännu större utbud av forskningsartiklar skulle sökningar i bibliotekets tidsskriftmagasin kunna göras, då en del av artiklarna i magasinet inte går att finna digitalt. Dock fann vi tillräckligt med forskningspublikationer elektroniskt för att kunna svara på litteraturstudiens syfte och frågeställningar.

6.1.2 Materialanalys

Vid materialanalysen jämfördes de funna forskningspublikationerna med litteraturstudiens kriterier för inklusion. Eftersom kriterierna för inklusion har grund i arbetets syfte och frågeställningar kontrollerades publikationernas relevans. De publikationer som inte uppfyllde arbetets kriterier för inklusion exkluderades. ”Översikt över analyserad litteratur” (se bilaga) var till god hjälp då den gav en överblick av forskningspublikationerna. Dock var det aningen problematiskt att beskriva syfte och resultat av vissa artiklar. Detta eftersom vissa av forskningsartiklarna var en övergripande beskrivning av problemområdet.

Materialanalysen var tidskrävande, men att granska forskningspublikationerna i sin helhet och på djupet gav en tydlig bild av innehållet. Detta gjorde att materialet till resultatdelen enkelt kunde kategoriseras för att resultatdelen skulle ge en tydlig bild av problemområdet.

6.2 Resultatdiskussion

Avsikten med denna komparativa litteraturstudie var att undersöka alternativa orsaker till elevers operationella syn på likhetstecknet. Vidare var intentionen att undersöka hur den introducerande undervisningen kring likhetstecknet, i förskoleklass och årskurs 1, bör organiseras för att gynna en relationell syn på tecknet.

6.2.1 Kognitiv utveckling

Vissa äldre studier hävdar att elevers operationella syn på likhetstecknet ska ha med deras kognitiva utveckling att göra (Baroody & Ginsburg, 1982; Kieran, 1981). Däremot påvisar flertalet nyare studier motsatsen, det vill säga att elever i den begynnande matematikundervisningen har tillräcklig förmåga att förstå likheter både konkret och symboliskt (Adolfsson Boman et al., 2013; Carpenter & Franke, 2001; Li et al., 2008; McNeil et al., 2011; Schliemann et al., 2007; Schliemann et al., 2007a, 2007b). Utifrån de presenterade forskningsresultaten skulle ett antagande kunna göras att elevers förståelse för likhetstecknet inte beror på deras kognitiva utveckling. Dock har inte elevers kognitiva utveckling i matematik studerats närmre i denna litteraturstudie. På grund av detta kan vi inte dra slutsatsen att den kognitiva utvecklingen inte skulle påverka elevers förståelse för likhetstecknet. I åtanke bör även finnas att elevers kognitiva mognad är individuell. Visserligen kan det konstateras att undervisningssammanhang och/eller val av matematikläromedel har betydelse för elevers uppfattning av likhetstecknet, vilket flertalet studier (Hattikudur & Alibali, 2010; Sherman & Bisanz, 2009) i detta arbete påvisar. Dock är detta inte tillräckligt för att en slutsats ska kunna dras. Utifrån Skemps (2006) konstaterande att elevers matematiska tänkande gynnas av att tolka matematiska symboler relationellt skulle det kunna antas att elevers kognitiva mognad gynnas av att lära in matematiken relationellt. Det vill säga att en relationell inlärning av likhetstecknet är fördelaktig för den kognitiva förmågan. Detta skulle dock behöva undersökas närmre för att slutsatser ska kunna dras. Troligen är elevers förståelse för likhetstecknet en kombination av den kognitiva utvecklingen och undervisningssammanhanget.

En aspekt Skemp (2006) betonar är att elever behöver ges tid till att upptäcka likhetstecknets relationella betydelse. Därför är det av betydelse att lärare verkligen ger elever tid att laborera med symbolen, både konkret och symboliskt. Av erfarenhet från verksamhetsförlagd utbildning skyndas ofta matematiskt innehåll på, vilket inte ger elever möjlighet att anamma innehållet. Vi anser att elever, som Skemp (2006) antyder, skulle behöva ges mer tid att förstå den relationella innebörden av likhetstecknet. Eftersom likhetstecknet är en viktig matematisk symbol anser vi det vara av betydelse att alla elever får med sig en relationell förståelse för tecknet inför framtiden. ”Matematikdidaktiskforskning visar att det är viktigt att eleverna tidigt får möta och utveckla kunskaper i algebra” (Skolverket, 2011a, s. 17). Även forskning i detta arbetes resultatdel betonar hur viktigt det är att algebra är centralt i matematikundervisningen redan i tidiga skolår (Falkner et al., 2007; Li et al., 2008; Schliemann et al., 2007; Warren, 2007). En slutsats skulle kunna dras att det är betydelsefullt att i den tidiga matematikundervisningen få möta algebra och aritmetik tillsammans, då detta skulle kunna gynna elevers relationella uppfattning av likhetstecknet. Precis som Warrens (2007) resonemang är det betydelsefullt för elevers algebraiska tänkande att tidigt undervisas om likhetstecknet och dess relationella innebörd.

6.2.2 Matematikläromedel

En alternativ orsak till att elever har en operationell syn på likhetstecknet kan vara vissa matematikläromedels uppbyggnad med traditionella aritmetiska uppgifter (Baroody & Ginsburg, 1982; Essien, 2009; Hattikudur & Alibali, 2010; Li et al., 2008; McNeil et al., 2006; Sherman & Bisanz, 2009). Dock kanske en relationell undervisning utöver de operationella läromedlen skulle kunna gynna elevers relationella syn på tecknet? Kanske skulle lärares relationella undervisning kring likhetstecknet kunna komplettera de operationella läromedlen och ändå ge elever en relationell förståelse för likhetstecknet? Exempel på gynnsamma arbetssätt skulle kunna vara att undervisa kring likhetstecknet med konkret material, utöva klassrumsdiskussioner om symbolen i olika gruppkonstellationer eller använda olika problemlösningsuppgifter.

Att använda läromedel som ger en operationell syn på likhetstecknet är inte att föredra, då elever bör ges en relationell syn på symbolen från början (Essien, 2009; Li et al., 2008; Sherman & Bisanz, 2009). Att behöva omvandla sin operationella syn på likhetstecknet till en relationell, högre upp i skolåren, är tidskrävande och svårt (Skemp, 2006). Istället hävdar vi att en relationell syn på likhetstecknet från början skulle kunna gynna elever i den begynnande matematikundervisningen. Precis som Skemp (2006) beskriver är det enklare att förstå en relationell syn än en operationell. Dock är det mer tidskrävande att förstå den relationella. Han anser att det är fördelaktigt att ge elever en relationell syn på matematiskt innehåll från början. Därför anser vi att det också är betydelsefullt att lärare låter undervisningen kring likhetstecknets relationella innebörd ta tid. Av tidigare erfarenheter från verksamhetsförlagda utbildningar upplever vi att likhetstecknets innebörd ofta tas för givet av lärare. Det tas för givet att elever förstår likhetstecknets relationella innebörd, utan att de överhuvudtaget ges tid till att reflektera kring tecknet. Den relationella förståelsen kan försummas exempelvis när elever endast utför traditionella beräkningar med addition och subtraktion, exempelvis vid tabellträning med matematikuppgifter likt $5 + 5 = \_$.

En granskning av matematikläromedel i Kina och USA påvisade att de amerikanska läromedlen var uppbyggda med operationella uppgifter medan de kinesiska framhävde likhetstecknets relationella innebörd (Li et al., 2008). En analys av tre olika matematikläromedel för årskurs 1 i Sydafrika påvisade att uppgifter kring likhetstecknets betydelse saknades helt och hållet (Essien, 2009). Jämförelser mellan matematikläromedel i andra länder skulle vara av intresse. Dock skulle en sådan granskning försvåras om vissa länder inte är flitiga användare av läromedel i matematikundervisningen. En granskning och jämförelse av svenska matematikläromedel anser vi också vara intressant inför våra framtida yrkeskarriärer. Kanske skulle en sådan granskning kunna finna de mest fördelaktiga läromedlen för en relationell syn på likhetstecknet? Visserligen anser vi att matematiklärare inom grundskolan bör ha tillräcklig didaktisk och matematisk kunskap att kunna välja ett läromedel som gynnar den relationella förståelsen av likhetstecknet eller undervisa helt utan läromedel. Av erfarenhet från verksamhetsförlagd utbildning har bristfälliga matematiska och didaktiska kunskaper hos lärare uppmärksammats. Detta är ett stort problem. I många fall går även undervisningstiden åt till att skapa ordning och reda i klassrummet, vilket resulterar i att betydelsefull undervisningstid går till spillo. Därför är vi övertygade om att detta är en anledning till att många lärare förlitar sig på ett matematikläromedel. De har helt enkelt varken tid eller ork till något annat. På grund av detta är det ännu viktigare att lärare har förmåga att välja ett gynnsamt matematikläromedel, vilket bland annat innefattar en relationell syn på likhetstecknet.

6.2.3 Nationella och internationella styrdokument

Att reflektera och diskutera matematik är viktiga grundstenar i ett matematiskt tänkande, inte minst när det gäller likhetstecknet (Barlow & Harmon, 2012; Falkner et al., 2007; Knuth et al., 2008; Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998; Warren, 2007). Förmågorna i syftestexten till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011b) beskriver att elever förväntas kunna diskutera matematik. Detta genom att föra resonemang om och kring matematik. Vidare beskrivs i det centrala innehållet att elever ska ges kunskaper om matematiska likheter samt likhetstecknet och dess betydelse. Matematiska likheter och likhetstecknets betydelse återfinns även i kunskapskraven för årskurs 3, vilka understryker dess betydelsefullhet för vidare studier (Skolverket, 2011b). Likhetstecknet har fått en betydande plats i läroplanen för grundskolan, vilket betonades innan. Dock framgår det inte ur läroplanen hur tecknet bör läras in, det vill säga relationellt eller operationellt. Kanske borde det tilläggas i läroplanen att elever i slutet av årskurs 3 behöver förstå likhetstecknet relationellt? Skulle problemet med den operationella synen på likhetstecknet minskas om det tydligt framgick i styrdokumenten att tecknet bör läras in relationellt eller måste högre didaktiska och kunskapsmässiga krav ställas på matematiklärare?

Det finns olika syn på likhetstecknets betydelse i undervisningen i olika författningar från skilda delar av världen. I Sydafrikas nationella läroplan finns inte betydelsen av att lära ut likhetstecknet presenterat i årskurs 1 (Essien, 2009). Däremot betonas betydelsen av att elever behöver ges kunskaper kring likhetstecknets betydelse i årskurs 1 i den amerikanska författningen *The Common Cord Standards* (Barlow & Harmon, 2012). Ett antagande kring den amerikanska författningen skulle kunna vara att det syftas på en relationell förståelse för likhetstecknet och inte en operationell. En vidare granskning av författningen skulle behöva göras för att kunna anta något sådant. Det skulle i så fall även kunna antas att elever i USA ges en relationell syn på likhetstecknet om det är specificerat i författningen. I de svenska styrdokumenten är det inte specificerat om likhetstecknet ska läras ut operationellt eller relationellt, vilket nämndes tidigare i denna diskussionsdel. Om den amerikanska författningen har en avsaknad av den relationella förståelsen för likhetstecknet skulle det kunna antas leda till problem kring lärares undervisning och elevers förståelse för likhetstecknet. I Sydafrika skulle det också kunna antas att elever ges en operationell syn på likhetstecknet, då läroplanen inte nämner likhetstecknets betydelse i matematikundervisningen i årskurs 1 överhuvudtaget. Avsaknad av undervisning kring likhetstecknet skulle kunna antas generera i en operationell syn på tecknet. Eftersom en studie av Essien (2009) hävdar att vissa läromedel missgynnar en relationell förståelse på grund av att de är uppbyggda av traditionella aritmetiska matetikuppgifter inom addition och subtraktion ($4 + 3 = \_$ och $7 - 5 = \_$) skulle detta antagande kunna göras. Vi frågar oss om svenska elever skulle ges en operationell syn på likhetstecknet om tecknet inte hade presenterats överhuvudtaget i den svenska läroplanen. Fyller det någon funktion att likhetstecknet benämns i läroplanen när det ändå inte framkommer om tecknet ska läras in operationellt eller relationellt?

6.2.4 Olika arbetssätt

Grundstenen i barns matematiska lärande, vilken beskrevs i bakgrunden till denna litteraturstudie (se kap 3.2), är att utforska relationer mellan miljön omkring dem och sig själva (Björklund, 2012; Boesen et al., 2006). Precis som Ahlberg (2000) anser vi det är viktigt att ha i åtanke att låta elever konkret upptäcka och lära matematik. Att konkret upptäcka och lära kring likhetstecknet är därför betydelsefullt för att elever i den begynnande matematikundervisningen ska ges en relationell förståelse för likhetstecknet. Detta kan ske genom olika didaktiska verktyg (se kap. 5.2).

Lärares utformning av undervisning kan vara en anledning till att elever ges en operationell syn på likhetstecknet (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998; Skemp, 2006; Warren, 2007). Vi ser betydelsen av att lärare har god matematikkunskap samt goda matematikdidaktiska förmågor för att undvika att elever ges en operationell syn på likhetstecknet och istället ges en relationell. Något vi anser vara betydelsefullt i lärarkompetensen är att vara insatt i aktuell forskning kring ett matematiskt område, i detta fall likheter och likhetstecknet. Goda kunskaper om matematiska symboler, och användning av dessa, är också av betydelse. Det är av stor vikt att lärare litar på sina matematikkunskaper och sin didaktiska förmåga samt inte låter ett matematikläromedel styra undervisningen. Visserligen kan det, som vi nämnt tidigare, vara till fördel att ha ett läromedel att luta sig mot. Dock får läromedlet aldrig ersätta lärares matematikdidaktiska kompetens.

För att gynna en relationell syn på likhetstecknet har flera olika tillvägagångssätt uppmärksammats i detta arbete. Vissa av tillvägagångssätten har även påvisat goda effekter för att omvandla elevers operationella syn på likhetstecknet till en relationell, då elever bär med sig en operationell syn sedan tidigare (Knuth et al., 2008; Molina & Ambrose, 2006). Dessa arbetssätt anser vi med fördel kunna användas för att gynna en relationell syn på likhetstecknet redan i den begynnande matematikundervisningen i förskoleklass och årskurs 1. De olika metoder, vilka presenterades i arbetets resultatdel (se kap. 5.2), är alla effektiva för att nå en relationell syn på likhetstecknet. Att avgöra om en viss metod skulle vara mer fördelaktig än någon annan skulle kräva att varje arbetssätt prövades och att resultaten av dessa jämfördes. Det är också viktigt att ha i åtanke att alla elever har olika förutsättningar och gynnas av skilda arbetssätt. Det skulle därför vara felaktigt att hävda att ett arbetssätt skulle vara mer fördelaktigt än ett annat, då elever tar till sig kunskap på olika sätt. Skolans värdegrund och uppdrag (Skolverket, 2011b) föreskriver att hänsyn ska tas till elevers skilda förutsättningar och behov samt att undervisningen därför inte kan utformas lika för alla. Vidare beskrivs att elevers utveckling ska främjas, vilket lärare kan åstadkomma genom att låta elever ta del av ett varierat innehåll genom olika arbetsformer.

Viss forskning (Li et al., 2008) visar att det är gynnsamt att undervisa om likheter och olikheter med konkret material. I detta fall handlar det konkreta materialet om att jämföra objekt (exempelvis en matsked och en tesked). Däremot menar annan forskning (Essien, 2009) att detta arbetssätt inte är att föredra, då det ger elever fel förståelse för likhetstecknet. Med det menas att elever ges förståelse för att likhetstecknet/olikhetstecken används för att beskriva relationer mellan objekt och inte mellan tal. Istället borde elever ges möjlighet att skapa förståelse för att likhetstecknet/olikhetstecken beskriver en relation mellan tal och inget annat. Utifrån detta kan frågan ställas om det verkligen är gynnsamt att jämföra längder på objekt, då likhetstecknet är en matematisk symbol som betecknar lika kvantiteter. Man kan fundera på om likhetstecknet är till för att jämföra längder eller antal samt vad som är mest gynnsamt för elevers relationella förståelse för likhetstecknet.

Många forskningsresultat (Adolfsson Boman et al., 2013; Essien, 2009; Li et al., 2008; Schliemann et al., 2007) antyder att det är gynnsamt att använda olika balansverktyg för att modellera likhetstecknets relationella innebörd. Däremot hävdar Warren (2007) motsatsen. Hon menar att fokus kan förflyttas från antalsjämförelsen till balansverktygens eventuella obalans. Om balansverktyg av någon anledning är ojämna, trots lika kvantiteter på båda sidor, kan fokus förflyttas till balansverktyget istället för antalet. Detta har vi uppmärksammat på verksamhetsförlagda utbildningar. Vi har uppmärksammat att elever med matematiksvårigheter ofta fokuserar på balansverktyget och inte på kvantiteterna som jämförs. Detta blir ett problem då dessa elever inte alls förstår balansverktygens betydelse. Det är viktigt att bejaka detta i vårt framtida yrke som grundlärare i förskoleklass till årskurs 3. Viktigt är också att tänka på att vissa elever kan gynnas av detta arbetssätt, medan andra inte gör det.

En fördelaktig metod är att undervisa kring likhetstecknet genom problemlösning (Adolfsson Boman et al., 2013; Barlow & Harmon, 2012; Falkner et al., 2007; Schliemann et al., 2007a, 2007b). Fördelarna med detta arbetssätt är att elever får möjlighet att koppla sina tidigare kunskaper med det matematiska innehållet (Barlow & Harmon, 2012). Elever lär sig även att samarbeta med andra, diskutera och dra slutsatser (Adolfsson Boman et al., 2013; Barlow & Harmon, 2012; Falkner et al., 2007). Dessutom hävdar viss forskning att elever ser detta som det mest logiska sättet att förstå matematiska sammanhang (Schliemann et al. 2007). Vi upplever att problemlösning är ett engagerande sätt för elever att erövra matematiken. Av erfarenhet från verksamhetsförlagd utbildning engageras elever lätt i problemlösningsuppgifter, då de ser det som meningsfullt och intresseväckande. Dock kan problemlösning vara svår att organisera i klassrumspraktiken, då det kräver att elever har viss vana vid att arbeta utan lärares ständiga handledning. Vi har erfarenheter av att elever tappar fokus, då de förväntas arbeta självständigt. Detta sker ofta, både då de ska arbeta individuellt eller i grupp. Det är därför av betydelse att introducera problemlösning i undervisningen i de första årskurserna för att arbetssättet ska vara välbekant för eleverna. Problemlösning i sig är ett viktigt inslag i matematikundervisningen i hela grundskolan, då detta återfinns i styrdokumenten (Skolverket 2011a, 2011b). I förmågorna i syftestexten för matematik (Skolverket, 2011b) betonas att elever ska kunna lösa matematiska problem och kunna formulera egna sådana. Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik (Skolverket, 2011a) understryker problemlösningens centrala roll i kursplanen för matematik, då ett av de långsiktiga målen i matematikundervisningen innebär att elever ska kunna formulera och lösa problem. Detta med hjälp av matematik och genom att självständigt kunna välja rätt metod. Att elever får använda sig av problemlösning för att förstå likhetstecknets relationella innebörd anser vi vara fördelaktigt, då både arbete med likhetstecknet *och* problemlösning sker parallellt. Att undervisa på detta sätt ger elever ett meningsfullt sammanhang att förstå likhetstecknet i, vilket av erfarenhet saknats på skolor. Likhetstecknet ägnas inte särskilt mycket uppmärksamhet, utan tas för givet att elever tar till sig automatiskt. Risken med detta är att elever tar till sig likhetstecknet på ett operationellt sätt. Även kommentarmaterialet (Skolverket, 2011a) förtydligar betydelsen av att elever får tillämpa och möta begrepp i olika situationer för att vidare kunna utveckla kunskaper om obekanta tal. Detta kan exempelvis innebära att elever får använda sig av problemlösning.

Viss forskning poängterar att det är betydelsefullt att införa likhetstecknet *tillsammans* med symboler för större än och mindre än (Hattikudur & Alibali, 2010; Li et al., 2008). Däremot finns det annan forskning som förespråkar att undervisning om likhetstecknet bör komma *efter* undervisning kring större än och mindre än (Adolfsson Boman et al., 2013; Essien, 2009). Inget antagande om vilken av dessa metoder som är mest gynnsam kan göras, då fler granskningar på dessa skulle behöva göras. Den senare metodens fördelar, anser Adolfsson Boman et al. (2013), är att elever själva får upptäcka likhetstecknet genom att själva uppmärksamma att det behövs ett tecken för att beskriva likheter. Dock ställer vi oss aningen kritiska till detta arbetssätt, då det endast är nationella forskare som förespråkar detta. Det skulle bland annat behöva göras fler granskningar av internationella forskningsresultat för att komma fram till om metoden är gynnsam eller inte.

Ett arbetssätt vi skulle vara intresserade av att pröva är att låta elever omvandla operationella uppgifter i matematikläromedel till relationella, det vill säga att eleverna själva får göra om uppgifter likt $2 + 3 = \_$ till exempelvis $\_ = 2 + 3$ eller $2 + 3 = 9 - 4$. Detta arbetssätt var något vi kom på under skrivandets gång. På detta sätt blir elever delaktiga i undervisningen och ges möjlighet att göra matematiken till sin. Skolans övergripande mål och riktlinjer (Skolverket, 2011b) föreskriver att varje elev ska ges möjlighet till delaktighet i undervisningen och sitt eget lärande. De ska också få möjlighet att ta ansvar för sina studier (Skolverket, 2011b). Detta får de möjlighet till genom att ändra operationella uppgifter i matematikläromedlen till relationella.

7 Avslutande ord

Lärares didaktiska kompetens måste ligga till grund för val av metoder för att introducera likhetstecknet relationellt till den elevgrupp läraren har till förfogande. Viktigt är också att ha i åtanke att elever lär på olika sätt utifrån sina skilda förutsättningar, därför är det av betydelse att lära ut detta matematiska innehåll på flera olika sätt. Att endast använda en metod gör det omöjligt att möta alla elever och därför anser vi att det är lärares skyldighet att inte enbart använda ett arbetssätt. Skolans demokratiska uppdrag (Skolverket, 2011b) konstaterar att undervisningen i grundskolan ska anpassas till varje enskild elev utifrån deras olika förutsättningar och behov. Detta skulle kunna uppfattas som att undervisningen måste organiseras utifrån elevers olika sätt att ta till sig kunskap genom varierad undervisning i form av olika arbetssätt. Detta för att säkerställa att alla elever ges en likvärdig utbildning utifrån sina individuella förmågor och förutsättningar. Skollagen (2010:800) fastslår att all undervisning ska ske på ett likvärdigt sätt, oavsett var i landet undervisningen sker.

Avslutningsvis vill vi understryka betydelsen av att elever i den begynnande matematikundervisningen i förskoleklass och årskurs 1 får möjlighet att lära sig den relationella synen på likhetstecknet. Det är lärares ansvar, och vårt framtida läraruppdrag, att elever förstår symbolens relationella innebörd så att de kan använda sig av den vid ekvationslösning.

Det skulle vara av intresse att undersöka hur lärare i klassrumspraktiken benämner likhetstecknet, det vill säga om de benämner likhetstecknet ”blir” eller ”är”. Vi har under vår verksamhetsförlagda utbildning observerat att många lärare benämner likhetstecknet ur ett operationellt perspektiv i förskoleklass till årskurs 3 i skolan i dag. Kan detta vara en av orsakerna till elevers operationella syn på symbolen?

8 Referenser

Adolfsson Boman, M., Eriksson, I., Hverven, M., Jansson, A., & Tambour, T. (2013). Att introducera likhetstecknet i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1. *Forskning om undervisning och lärande, 10*, 29–49. Hämtad från http://www.forskul.se/tidskrift/nummer10/att_introducera_likhetstecken_i_ett_algebraiskt_sammanhang_for_elever_i_arskurs_1

Ahlberg, A. (2000). Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande. I K. Wallby et al. (Red.), *Matematik från början* (s. 9–98). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Barlow, A. T., & Harmon, S. E. (2012). Problem Contexts for Thinking About Equality: An additional Resource. *Childhood Education*, *88*(2), 96–101. doi:10.1080/00094056.2012.662121

Baroody, A. J., & Ginsburg, H. P. (1982). *The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New York, NY. Hämtad från http://eric.ed.gov/?id=ED214765

Bergsten, C., Häggström, J., & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Björklund, C. (2012). De yngsta barnens matematik. I B. Grevholm (Red.), *Lära och undervisa matematik från förskoleklass till åk 6* (s. 61–84). Stockholm: Norstedts.

Boesen, J., Emanuelsson, G., Johansson, B., Wallby A., & Wallby, K. (2006). *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*. Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM.

Carpenter, T., & Franke, M. (2001). Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *Proceedings of the 12th ICM Study Conference: The future of the teaching and learning of algebra, Australia, 1,* 155–162. Hämtad 13 februari 2015 från https://minerva-access.unimelb.edu.au/handle/11343/35000#files-area

Carpenter, T., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carpenter, T., & Levi, L. (2000). *Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in Primary Grades* (Research Report No. 00.2). Hämtad från National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science: http://ncisla.wceruw.org/publications/reports/RR-002.PDF

Essien, A. A. (2009). An Analysis of the Introduction of the Equal Sign in Three Grade 1 Textbooks. *Phytagoras – Journal of the Association for Mathematics Education in South Africa, Sydafrika, 69,* 28–35. doi:10.4102/Pythagoras.v0i69.43

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (2007). Children's understanding of Equality: a Foundation for Algebra. *Teaching Children Matchematics, 6*(4), 232–236. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41197398?seq=1#page_scan_tab_contents

Hattikudur, S., & Alibali, M. W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inenquality symbols help?. *Journal of Experimental Child Psychology, 107,* 15–30. doi:10.1016/j.jecp.2010.03.004

Häggström, J., Persson, E., & Persson, P–E. (2012). Taluppfattning, aritmetik och algebra. I B. Grevholm (Red.), *Lära och undervisa matematik från förskoleklass till åk 6* (s. 85–144). Stockholm: Norstedts.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317–326. doi:10.1007/BF00311062

Kiselman, C. O. (u.å.). Olikhet. I *Nationalencyklopedin.* Hämtad 12 februari, 2015 från http://www.ne.se

Kiselman, C., & Mouwits, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Hattikudur, S., McNeil, N. M., & Stephens, A. C. (2008). The Importance of Equal Sign Understanding in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13*(9), 514–519. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41182605?seq=1#page_scan_tab_contents

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2008). Sources of Differences in Children's Understandings of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. *Cognition and Instruction, 26,* 195–217. doi:10.1080/07370000801980845

Likhetstecken. (u.å.). I *Nationalencykolpedin*. Hämtad 26 januari, från http://www.ne.se/

Lundberg, I., & Sterner, G. (2006). *Räknesvårigheter och lässvårigheter under de första skolåren – hur hänger de ihop?.* Stockholm: Natur och Kultur.

Löwing, M. (2006). *Matematik – undervisningens dilemman. Hur lärare kan hantera lärandets komplexitet.* Lund: Studentlitteratur.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla – Nödvändig för elever med inlärningssvårigheter.* Lund: Studentlitteratur.

McNeil, N. M., Fyfe, E. R., Petersen, L. A., Dunwiddie, A. E., & Brletic-Shipley, H. (2011). Benefits of Practising $4 = 2 + 2$: Nontraditional Problem Formats Facilitate Children's Understanding of Mathematical Equivalence. *Child Development, 82*(5), 1620–1633. doi:10.1111/j.1467-8624.2011.01622.x

McNeil, N. M., Grandau, L., Knuth, E. J., Alibali, M. W., Stephens, A. C., Hattikudur, S., & Krill, D. E. (2006). Middle-School Student's Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and instruction, 24*(3), 367–385. Hämtad från http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/s1532690xci2403_3#.VNSXDv50xaQ

Molina, M., & Ambrose, R. C. (2006). Fostering Relational Thinking while Negotiating the Meaning of the Equals Sign. *Teaching Children Mathematics, 13*(2), 1620–1633. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41199848?seq=1#page_scan_tab_contents

Powell, S. R., & Fuchs, L. S. (2010). Contribution of Equal-Sign Instruction Beyond Word-Problem Tutoring for Third-Grade Students with Mathematics Difficulty. *Journal of Educational Psychology, 102*(2), 381–394. doi:10.1037/a0018447

Rittle-Johnson, B., Matthews, P. G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing knowledge of mathematical equivalens: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology, 103*(1), 85–104. Hämtad från http://dx.doi.org/10.1037/a0021334

Sáenz-Ludlow, A., & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics, 35*(2), 153–187. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/3482997?seq=1#page_scan_tab_contents

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007a). Preface: Rethinking Early Mathematics Education. I A. D. Schliemann, D. W. Carraher & B. M. Brizuela, *Bringing Out the Algebraic Character of Aritmetic – From children's ideas to classroom practice* (s. ix–xviii). Mahwah, New Jersey: Lawrence Earlbaum.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007b). Interpreting Research About Learning Algebra. I A. D. Schliemann, D. W. Carraher & B. M. Brizuela, *Bringing Out the Algebraic Character of Aritmetic – From children's ideas to classroom practice* (s. 1–16). Mahwah, New Jersey: Lawrence Earlbaum.

Schliemann, A. D., Lins Lessa, M., Brito Lima, A. P., & Siqueira, A. (2007). Young Children's Understanding of Equivalences. I A. D. Schliemann, D. W. Carraher & B. M. Brizuela, *Bringing Out the Algebraic Character of Aritmetic – From children's ideas to classroom practice* (s. 17–35). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Sfard. A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections of Processes and Objects as Different Side of The Same Coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1–36. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/3482237?origin=JSTOR-pdf&seq=1#page_scan_tab_contents

Sherman, J., & Bisanz, J. (2009). Equivalences in Symbolic and Nonsymbolic Contexts: Benefits of Solving Problems With Manipulatives. *Journal of Educational Psyhcology, 101*(1), 88–100. doi:10.1037/a0013156

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School. 12*(2), 88–95. Hämtad från http://www.jstor.org/stable/41182357?seq=1#page_scan_tab_contents

SFS. (2010:800). *Skollagen.* Stockholm: Norstedts juridik.

Skolverket. (2011a). *Kommentarmaterialet till kursplanen i matematik.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011, Lgr 11.* Stockholm: Skolverket.

Vygotskij, L. S. (1971). *Tænkning og Sprog.* Köpenhamn: H. Reitzels forlag.

Warren, E. (2007). Exploring an understanding of equals as quantitative sameness with 5 year old students. I J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Ceo. (Red.). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. PME 31, Korea, 4,* 249–256. Hämtad 3 februari 2015 från http://www.google.se/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&ved=0CCcQFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.emis.de%2Fproceedings%2FPME31%2F4%2F248.pdf&ei=eQIVVa-5MaX-myQP4lIC4DA&usg=AFQjCNHG1gkka7GOTTbeS2DUoSFZv27iEA

Bilaga – Översikt över analyserad litteratur

1. Författare **2. Titel** **3. Tidsskrift** **4. Publikationsår** **5. Land** **6. Databas**	**Syfte**	**1. Metod** **2. Urval** **3. Datainsamling**	**Resultat**
1. Adolfsson Boman, Eriksson, Hverven, Jansson & Tambour. 2. Att introducera likhetstecken i ett algebraiskt sammanhang för elever i årskurs 1. 3. Forskning om undervisning och lärande. 4. 2013. 5. Sverige. 6. SwePub.	Syftet: att låta eleverna lära sig symboler och matematiska principer med konkret material innan de introduceras i siffror.	1. Data från ett tidigare forskningsprojekt och observationer i klassrummet samt elevintervjuer. 2. 28 elever i årskurs 1, varav 16 intervjuades. 3. Observationer i klassrummet och videobandande inspelningar.	Resultat: införandet av likhetstecknet kan ske med hjälp av större än och mindre än. Elever behöver upptäcka algebra på ett praktiskt sätt innan de introduceras för siffrorna. Genom att introduceras av likhetstecknet genom praktiska moment får eleverna en relationell förståelse för likhetstecknet.
1. Ahlberg. 2. Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande. 3. Matematik från början. 4. 2000. 5. Sverige. 6. ERIC.	Syfte: att elever ska möta likhetstecknet i konkreta situationer	1. – 2. – 3. –	Resultat: konkret material kan användas för att ge elever möjligheten att arbeta med likhetstecknet först för att sedan föra in addition och subtraktion i undervisningen efteråt.
1. Barlow & Harmon. 2. Problem Contexts for Thinking About Equality – An Additional Resource. 3. Childhood Education. 4. 2012.	Syfte: att undersöka om problemlösningsuppgifter kring likhetstecknet kan främja elevers förståelse för tecknet.	1. Observationer av elever, vilka får göra tre olika aktiviteter kring likheter/likhetstecknet. Uppgifterna var utformade likt problemlösningsuppgifter. 2. – 3. Elevers loggböcker, observationer av elever i klassen och fotografering av elever.	Resultat: eleverna förstod likhetstecknet genom problemlösningsundervisning kring det matematiska innehållet. Arbetssättet fick eleverna att förstå likheter på ett meningsfullt sätt.

5. USA. 6. ERIC.			
1. Baroody & Ginsburg. 2. The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. 3. Konferensbidrag. 4. 1982. 5. USA. 6. ERIC.	Syfte: att undersöka effekten av en långsiktig undervisning för en relationell syn på likhetstecknet.	1. Matematiska spel samt arbetsblad. 2. 15 elever från åk 1–3. 3. Observationer av eleverna när de spelar spel samt insamling av arbetsblad.	Resultat: elever kan förstå likhetstecknet men det är operationellt trots praktisk undervisning. Eleverna är inte mogna för en relationell syn av tecknet förrän i trettonårsåldern.
1. Carpenter & Franke. 2. Developing algebraic reasoning in the elementary school: Generalization and proof. 3. Proceeding. 4. 2001. 5. USA. 6. ERIC.	Syfte: att karaktärisera grundskolelevers algebraiska resonerande.	1. Fallstudie på fyra år. De har arbetat med lärare. 2. 15 grundskolor med elever i årskurs 1–6 samt deras lärare. 3. De har gjort en djupdykande fallstudie i tre av undersökningens klasser.	Resultat: sanna/falska uttryck och öppna utsagor ger eleverna många fördelar att kunna diskutera likhetstecknets relationella innebörd.
1. Carpenter & Levi. 2. Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in Primary Grades. 3. Research Report. 4. 2000. 5. USA. 6. Google Scholar.	Syfte: att undersöka hur undervisningen bör utformas för att elever ska gå från ett aritmetiskt tänkande till ett algebraiskt.	1. Två studier. Den första är ett lärandeexperiment. Den andra är en fallstudie. 2. Studie 1: 8 elever i årskurs 1–2, Studie 2: 20 elever i årskurs 1–2. 3. Individuella intervjuer med elever och observationer.	Resultat: de flesta elever i andra studien förstod likhetstecknet relationellt. Resultat av båda studierna: likhetstecknet kan med fördel introduceras och förstås relationellt av elever i årskurs 1.
1. Essien. 2. An analysis of the introduction of the Equal Sign in Three Grade 1 Textbooks. 3. Phytagoras. 4. 2009.	Syfte: att analysera hur likhetstecknet introduceras i läroböcker för årskurs 1 (både elevböcker och lärarhandledning) i Sydafrika. Böckerna analyserades för att få en inblick i hur likhetstecknet introduceras från allra första början.	1. Analys av tre olika läromedel. 2. Tre olika läromedel (både elevböcker och lärarhandledning). 3. Läromedelsanalyser.	Resultat: att likhetstecknet bör införas före addition och subtraktion samt att "större än" och "mindre än" bör introduceras före likhetstecknet. Resultatet beskriver även att likheter inte bör introduceras formellt i matematikböcker, utan via en balansvåg först.

5. Sydafrika. 6. ERIC.			
1. Falkner, Levi & Carpenter. 2. Children's understanding of Equality: A Foundation for Algebra. 3. Teaching Children Mathematics. 4. 2007. 5. USA. 6. Primo.	Syfte: att betona betydelsen av att eleverna får en relationell syn på likhetstecknet för att vidare kunna utveckla ett algebraiskt tänkande. Artikeln beskriver hur Falkner organiserat sin undervisning kring likhetstecknet bland annat.	1. Beprövad erfarenhet och är en learning study. Tre undersökningar beskrivna i samma artikel. Vårt fokus:studierna kring likhetstecknet i årskurs 1–2 samt på förskolan. 2. En sammanslagen årskurs 1 och 2 samt en förskolegrupp. 3. Observationer.	Resultat: 14/16 elever hade utvecklat en relationell syn på likhetstecknet. Detta är inte eleverna i Falkners egen undersökning, utan elever som varit med i en liknande studie i samma stad. Eftersom artikeln skrevs innan läsåret var slut kunde inte Falkners egens klass resultat presenteras.
1. Hattikudur & Alibali. 2. Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? 3. Journal of Experimental Child Psychology. 4. 2010. 5. USA. 6. ERIC.	Syfte: att undersöka om den relationella förståelsen för likhetstecknet bäst gynnas genom jämförelse med andra tecken eller om det är mer gynnsamt med undervisning om endast likhetstecknet.	1. Tester för och efter undervisning. 2. 112 elever i årskurs 3 och 4. 3. Insamling och jämförelser av testerna.	Resultat: undervisning av likhetstecknet sker bäst genom jämförelse av likhetstecknet och större än och mindre än.
1. Kieran. 2. Concepts Associated with the Equality Symbol 3. Educational Studies in Mathematics. 4. 1981. 5. USA. 6. ERIC.	Syfte: att undersöka vad den senaste forskningen (1981) antyder vara problematiskt i undervisningen av likhetstecknet.	1. Jämförelse av andra studier. 2. – 3. Jämförelse av andra studier.	Resultat: att elever i alla åldrar har problem med att se likhetstecknet på ett relationellt sätt.

1. Knuth, Alibali, Hattikudur, McNeil & Stephens. 2. The Importance of Equal Sign Understaning in the Middle Grades. 3. Mathematics Teaching in the Middle School. 4. 2008. 5. USA. 6. MathEduc.	Syfte: att undersöka om elever i mellanstadiet har svårigheter med likhetstecknet och hur lärare kan undervisa för att elever ska förstå betydelsen av likhetstecknet.	1. Elevkommentarer om likhetstecknet. 2. Elever i årskurs 6–8. Okänt antal. 3. Analys av elevkommentarer med kategorisering av elevsvaren.	Resultat: elever har svårigheter med likhetstecknet då de ser det operationellt. För att eleverna ska få en relationell förståelse ska likhetstecknet undervisas genom elevdiskussioner (ex. i uppgifter som $3 + 4 = 9 - 2 = 5 + 2$).
1. Li, Ding, Capraro & Capraro. 2. Sources of Differences in Children's Understanding of Mathematical Equality: Comparative Analysis of Teacher Guides and Student Texts in China and the United States. 3. Cognition and instruction. 4. 2008. 5. USA, Kina. 6. MathEduc.	Syfte: att undersöka lärares undervisningsmaterial och hur lärare och elevers arbetsböcker ser ut för att hitta orsaken till de låga resultaten i USA och de höga i Kina.	1. Tester av elever och jämförelse av resultaten. 2. 145 elever från årskurs 6. 3. Jämförelser av olika arbetsböcker och lärarhandledningar inom matematik.	Resultat: orsaken till att elever i USA presterar sämre än elever i Kina är att skolmaterialet i USA endast bygger på uppgifter som kan tokas operationellt. I USA ligger fokus på resultatet/svaret av uppgiften och inte processen dit. I Kina ligger stort fokus på likhetstecknet och dess betydelse.
1. McNeil, Fyfe, Petersen, Dunwiddie & Brletic-Shipley. 2. Benefits of Practising $4 = 2 + 2$: Nontraditional Problem Formats Facilitate Children's Understanding of Mathematical Equivalence. 3. Child Development.	Syfte: att utreda om aritmetiska uttrycka skrivna på ett icketraditionellt sätt påverkar elevers förståelse för ekvivalens.	1. Välkontrollerad undersökning med eftertest. 2. 90 elever, 7–8 år gamla. Eleverna delades slumpmässigt in i tre olika grupper, vilka undervisades på tre olika sätt. Grupperna var: traditionell undervisning, icketraditionell undervisning samt en grupp där undervisningen inte ändrats alls. 3. Observationer och eftertest.	Resultat: att elever kan tillägna sig matematiska likheter genom att undervisningen modifieras. En icketraditionell undervisning kring likhetstecknet skulle medföra en bättre förståelse för likhetstecknet hos elever.

4. 2011. 5. USA. 6. ERIC.			
1. McNeil, Grandau, Knuth, Alibali, Stephens, Hattikudur & Krill. 2. Middle-School Student's Understanding of The Equal Sugn: The Book They Read Can't Help. 3. Cognition and instruction. 4. 2006. 5. USA. 6. ERIC.	Syfte: att undersöka om likhetstecknet bör undervisas i en icke-traditionell kontext eller genom uppgifter som framhäver likhetstecknets som en relationell symbol.	1. Granskning av matematikläromedel för elever i mellanstadiet (ålder: 11–14 år). 2. 4 mellanstadiematematikböcker. 3. –	Resultat: operationer på båda sidor av likhetstecknet gav en god förståelse för likhetstecknets som en relationell symbol. Författarna kom fram till att lärare behöver ge elever många erfarenheter av uttryck där de ska lägga till lika mycket på båda sidor av likhetstecknet. Detta för att förstärka den relationella synen på likhetstecknet, vilken många elever har en avsaknad av.
1. Molina & Ambrose. 2. Fostering Relational Thinking while Negotiating the Meaning of the Equals Sign. 3. Teaching Children Mathematics. 4. 2006. 5. USA. 6. MathEduc.	Syfte: att ta reda på hur elevers relationella förståelse för likhetstecknet stärks genom att de undervisas genom sanna och falska matematiska uttryck som involverar likhetstecknet.	1. Teaching study av gästlärare. 2. 18 elever, fem lektionspass. 3. Varierad undervisning med sanna/falska matematiska uttryck med fokus på likhetstecknet samt öppna utsagor.	Resultat: många av eleverna i undersökningen fick en relationell förståelse för likhetstecknet genom att arbeta med sanna/falska uttryck och öppna utsagor.
1. Sáenz-Ludlow & Walgamuth. 2. Third grader's interpretations of equality and the equal symbol. 3. Educational Studies in Mathematics. 4. 1998. 5. USA. 6. ERIC.	Syfte: att presentera en analys som gjorts på tredjeklassares förståelse för likheter och likhetstecknet. Ett mål var att undersöka hur social interaktion influerar barns förståelse för aritmetiska koncept.	1. Socio-konstruktivistiskt lärandeexperiment. 2. En tredjeklass. Sex flickor och åtta pojkar. 3. Deltagande observation med videoinspelning.	Resultat: eleverna utvecklade en relationell förståelse för likhetstecknet genom att undervisas genom socialinteraktion och genom att beskriva likheter på olika sätt.

1. Schlieman, Carraher & Brizuela. 2. Preface: Rethinking Early Mathematics Education och Interpreting Research About Learning Algebra. 3. Bringing Out the Algebraic Character of Aritmetic. 4. 2007a, 2007b. 5. New Jersey. 6. Antologi med forskningsrapporter.	Syfte: att det kan vara fördelaktigt att undervisa i aritmetik och algebra samtidigt.	–	–
1. Schliemann, Lins Lessa, Brito Lima & Siqueira. 2. Young Children's Understanding of Equivalences. 3. Bringing Out the Algebraic Character of Aritmetic – From Children's ideas to classroom practice. 4. 2007. 5. New Jersey. 6. Antologi med forskningsrapporter.	Syfte: analysera elevers förståelse för likheter.	1. Två olika studier i samma litteratur. Båda bygger på elevintervjuer med observationer. 2. I den första är det 80 elever (tio från varje årskurs) på en brasiliansk privatskola. Eleverna är 5–12 år. I den andra har de intervjuat 120 brasilianska elever individuellt, vilka är 7–10 år gamla. 24 elever i varje ålderskategori. 3. Insamlingen utgår från intervjuer och observationer i den första undersökningen. I den andra delades eleverna in i grupper där fyra olika kontexter undersöktes (A,B,C och D). A: Balansvåg. B: Balansbräde. C: Verbala problem. D: Skrivna ekvationer.	Resultat: I den första undersökningen kom de fram till att även 7–10-åringar har förståelse för att balansvågen visade olikheter om sidorna på vågen hade olika tyngd. Resultatet av den andra undersökningen var att sjuåriga elever kunde förstå likheter på alla de fyra olika sätten (A, B, C och D), men att verbala problem troligen är mest logiska för elever i den åldern.

1. Sherman & Bisanz. 2. Equivalences in Symbolic and Nonsymbolic Contexts: benefits of Solving Problems With Manipulatives. 3. Journal of Educational Psycology. 4. 2009. 5. Kanada. 6. ERIC.	Syfte: att undersöka om elevers missförstånd beror på närvaron av symboler vid inlärningen eller om det har en mer grundläggande missuppfattning (studie 1). Det är också att undersöka om en icke-symbolisk inlärning av likhetstecknet är att föredras för att få en relationell syn på tecknet (studie 2).	1. Elevintervjuer med konkret material. 2. 48 elever i årskurs 2 (studie 1) och 32 elever i årskurs 2 (studie 2). 3. Analys av elevintervjuer och elevlösningar.	Resultat: elever kan förstå likhetstecknet på ett operationellt när det presenteras med symboler. För att förstå likhetstecknet på ett relationellt sätt är det att föredra att introducera likhetstecknet utan symboler.
1. Skemp. 2. Relational Understanding and Instrumental Understanding. 3. Mathematics Teaching in the Middle School. 4. 2006. 5. Storbritannien. 6. Google Scholar.	Syfte: att visa att det finns två sätt att se på matematik, relationellt och instrumentellt.	1. Beprövad erfarenhet. 2. – 3. Beprövad erfarenhet.	Resultat: det finns många fördelar med att undervisa om likhetstecknet på ett relationellt sätt.
1. Warren. 2. Exploring an understanding of equals as quantitative sameness with 5 year old students. 3. Konferensbidrag. 4. 2007. 5. Korea. 6. MathEduc.	Syfte: undersöka elevers utveckling av algebraiskt tänkande genom att eleverna får undersöka kvantiteter i konkret form.	1. Lärandeexperiment med två intervjuer med uppgifter kring likheter. 2. 40 femåringar. 3. Videofilmade lektioner.	Resultat: visar att elever i femårsåldern är kapabla att till viss del förstå kvantitativa likheter, exempelvis tre lika tunga bollar på varsin sida av en balansvåg. Eleverna är kapabla att presentera detta i symbolisk form. Undersökningen påvisar problem med att undervisa kring likheter med hjälp av balansvåg. Resultatet påvisade även att algebra kan föras in tidigt i matematikundervisningen eftersom eleverna i undersökningen påvisat förmåga att klara av det.