HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Undervisning i elementär algebra med generella symboler

eller hur jag blev kompis med lilla μ

Jesper Johansson

Examensarbete 15 högskolepoäng
Inom Lärande
Lärarutbildningen
Höstterminen 2013

Handledare
Ayme Pinó Rodriguez
Examinator
Martin Hugo

Högskolan för lärande
och Kommunikation (HLK)
Högskolan i Jönköping

Examensarbete 15 hp.
inom Lärande
Lärarutbildningen
Höstterminen 2013

Sammanfattning

Jesper Johansson

Undervisning i elementär algebra med generella symboler

eller hur jag blev kompis med lilla μ

Antal sidor: 35

Studien syftar till att **testa, utveckla** och **jämföra** elever på teknikprogrammets förmåga att lösa **förstagradsekvationer** samt **förenkla** algebraiska uttryck där den obekanta variabeln är av familjär natur, $\boldsymbol{x}$ alternativt y, och där den obekanta är en **godtycklig symbol,** till exempel λ eller σ. Deltagarna i studien har gjort ett inledande oförberett test varefter de under höstterminen i årskurs 1 har fått undervisning i ämnet under 32 h. för att slutligen genomföra ett avslutande test. Studien inleddes augusti 2011 och sträcker sig fram till januari 2013. Totalt har 87 elever fördelat på två årgångar, deltagit i studien.

Här visas med 99 %-ig och 72 %-ig säkerhet att lösning av förstagradsekvationer och förenkling av algebraiska uttryck upplevs som svårare när de genomförs med en generell symbol, som λ eller σ, jämfört med en känd dito, som x, då elever kommer direkt från grundskolan. Det visas även med 85 %-ig & 75 %-ig säkerhet att lösningsfrekvensen för uppgifterna är högre då symbolen x används.

Efter 32 h. extraundervisning i algebra där de introducerats för det grekiska alfabetet så gick lösningsfrekvenserna på likartade uppgifter upp med 30 – 200 % och hamnade i området 0,85 – 0,95. Skillnaden i upplevd svårighetsgrad och lösningsfrekvens försvann inom ekvationslösningen men kvarstod för förenklingsuppgifter.

Vi ser en linjär korrelation mellan resultat på det inledande diagnostiska provet och betyg från grundskolan. Elever med betyget G presterar med mer än 90 %-ig säkerhet sämre än elever med betyget VG eller MVG. En linjär korrelation mellan lösningsfrekvens och upplevd svårighetsgrad kunde befästas vid såväl det inledande som avslutande testet.

Resultaten har jämförts med resultat från en liknande studie som gjordes kring 2000. Vi fann att eleverna i denna studie högst troligt sämre förberedda från grundskolan då de börjar gymnasiet men efter en termin är de minst lika bra eller bättre.

Nyckelord: algebra, elementär algebra, symbolhanterande algebra, gymnasieskolan, teknikprogrammet, algebraisk förenkling, förstagradsekvationer, matematik.

Högskolan för Lärande
och Kommunikation (HLK)
Box 1026
551 11 Jönköping

Gjuterigatan 5

Tel: 036 – 10 10 00
Fax: 036 – 16 25 85

Undervisning i elementär algebra med generella symboler

Innehållsförteckning

Undervisning i elementär algebra med generella symboler

Inledning

Behovet av matematik och algebra som verktyg är av central betydelse för att klara studier på gymnasieskolans naturvetenskapliga eller tekniska program. Ett av de viktigaste verktygen för att lösa fysikaliska, matematiska och tekniska problem är, tillsammans med läsförståelse, symbolahanterande elementär algebra. Att precis som Ekenstam och Greger se algebrakunskaperna som ett *"kritiskt filter"* eller en *"tröskel"* för framtida framgångsrika studier inom naturvetenskap och teknik är inte fel.

> *Elementary algebra is a threshold to be crossed for succesfull futher studies in mathematics. But also in other subjects, physics, technology etc. depend heavily on skill in handling algebraic expression.*
>
> (Ekenstam & Greger 1987)

Hösten 2011 inleddes arbetet med en ny kursplan för gymnasieskolan. I kursplanen för Teknik 1 så betonas elevernas förmåga att lösa problem (Kursplan – Teknik 1 2011). I syfte att förbereda eleverna för fortsatta studier på Teknikprogrammet har en delkurs bestående av symbolhanterande algebra, med godtyckliga symboler, samt problemlösning integreras i kursen Teknik 1. Resultaten av undervisningen har under åren 2011 & 2012 dokumenterats och i den här studien presenteras en utvärdering av dessa. Vi vill se om eleverna blir bättre på att lösa förstagradsekvationer och att göra algebraiska förenklingar efter avslutad undervisning. Vi vill också se om de efter avslutad undervisning upplever någon signifikant skillnad i svårighetsgrad på uppgiften beroende på om den obekanta variabeln använts tidigare, typiskt *x*, eller är en godtycklig grekisk eller latinsk bokstav. Om skillnaderna är små och kunskaperna goda så har det övergripande målet uppnåtts, nämligen att förbereda eleverna för framtida studier och yrkesliv.

Samtidigt med denna rapports färdigställande presenterade Skolverket resultaten från PISA-undersökningen 2012. Resultaten visade att Svenska 15-åringars kunskaper i Matematik hade försämrats ytterligare och nu låg nu långt under OECD-genomsnittet. (Skolverket 2013) I ljuset av detta blir arbeten som detta än mer relevanta.

Bakgrund

Vad är algebra?

> *"Algebra has been defined as the science which teaches how to determine unknown quantities by means of those that are known"*
>
> (Euler 1767)

> *"Algebra is a method of investigating quantity by means of general charcaters called symbols"*
>
> (Brooks 1871, p. 19)

> *"The science which employeys letters in reasonig about numbers, either to discover their general properties or the find the value of the unknown number from its relations to known numbers, is called algebra."*
>
> (Wentworth, 1881, p. 4)

Citatet av Euler säger att algebra kan användas för att ta reda på okända storheter utifrån kända dito. baserat på något samband, problemlösning. I citatet av Brooks sägs att detta går att göra med hjälp av godtyckliga symboler. Wentworth menar att vi kan kvantifiera våra resultat genom att ersätta symbolerna med siffror. En av nyttorna med algebra är således att lösa problem. Eller som Rojana uttrycker der.

> *In the beginning were the problems*
>
> (Rojano 1996)

I detta arbete så betraktas den symbolbaserade algebran främst som ett redskap för att lösa naturvetenskapliga och tekniska problem.

Symbolbaserad algebra och den notation som används idag utvecklades så sent som under det sena 1500-talet och det tidiga 1600-talet av Vietem, Harriot, Hèrigone och Descartes. (Esteve 2008) Descarte introducerade tidigt en metodik för att lösa problem algebraiskt:

- Problemet anses först vara löst.
- De ingående storheterna ges namn
- Det görs ingen skillnad mellan kända och okända
- Relationer mellan kända och okända storheter tas fram
- De okända storheterna löses ut

(Charbonneau 1996) En liknande problemlösningsmetodik ges även av (Johansson 2012).

Symbolhantering och Formler

I princip kan vilken symbol som helst användas för att beteckna en storhet i ett matematiskt uttryck eller formel. Längd skulle till exempel kunna betecknas av ett piktogram föreställande en hand. (Godfrey & O'Connor 1995) För att notationen skall fungera måste dock konsensus råda i en tillräckligt stor grupp. Inom fysik, kemi och teknologi används symboler för att beteckna olika storheter och mått. (Se till exempel formelsamlingen Physics Handbook, (Nordling 2006).)

Vanligen används det latinska alfabetet men då det finns flera storheter av liknande karaktär som rimligen skulle betecknas med samma bokstav så utvidgas valet av möjliga symboler ofta först till versaler och därefter till det grekiska alfabetet. Tid betecknas vanligen med bokstaven t (s.), en längre tid eller periodtiden för svängning betecknas med T (s.) , en tidskonstant för ett förlopp mäts även det i sekunder och betecknas ofta med den grekiska bokstaven tau, τ. En liknande situation gäller för längd som mäts i meter och betecknas med l och våglängd som även det mäts i meter men betecknas med l:s grekiska motsvarighet lambda, λ. Vi inser att för att klara den tillämpade matematiken i natur- och teknikvetenskapliga frågeställningar så måste en generalisering av kunskaperna i elementär algebra till att gälla godtyckliga symboler ha gjorts.

Algebra i skolan

I det forntida Mesopotanien var kunskaper i att lösa andragradsekvationer något som förbehållet det yppersta styrande skicket. Det var ett sätt att visa att man hade den intellektuella kapaciteten för att leda landet. (Katz 1997). Författaren har inte kunnat finna något liknade samband i nutid.

Ovanstående kan vara ett skäl till att algebra av tradition har upplevts som svårt. Frågan ”*Vad är det bra för?*” kan lika gärna tolkas som ett uttryck för oförståelse som en konkret fråga. (Arcavi 1995). Arcavi belyser även det faktum att det tagit tusentals år för mänskligheten att ta sig dit den är idag. En utbildare bör således ha respekt för de svårigheter som kan uppkomma då en adept skall gå från aritmetik till att använda symboler till att använda en godtycklig funktion.

Undersökningar har visat att kineser är bättre på generaliserade lösningar jämfört med amerikanska barn. Amerikanerna visade sig dock vara relativt duktiga på kvalitativa resonemang, specialfall och aritmetiska lösningar. En jämförelse mellan läroplanerna i de båda länderna visar att 8:e klass i USA motsvarar 5:e klass i Kina. Skillnaderna beror inte enbart på att eleverna börjat tidigare och hunnit längre utan på kulturella skillnader såsom vanan att använda en mängd olika tecken i skrift vilket gör det lättare att generalisera inom algebran. (Cai 2004) Kan svenska elever identifiera sig mer med de amerikanska eleverna än de kinesiska eleverna?

Förkunskaper från Grundskolan

De som börjar på gymnasieskolan före hösten 2013 kommer att ha gått igenom grundskolan med läroplanen från 1994, uppdaterad 2000. 2011 introducerades en ny kursplan för grundskolan. De som börjar på gymnasiet hösten 2013 kommer att ha läst efter den nya läroplanen de två sista åren av grundskolan. En jämförande studie av läroplanerna visar vissa skillnader.

Innehållet som behandlar algebra är i princip det samma men i den senare läroplanen så använder man sig av begreppet centralt innehåll, dvs något som <u>skall</u> gås igenom, medans läroplanerna från 1994 och 2000 använder sig av begreppet strävansmål.

I strävansmålen för matematik sägs att eleverna skall ha kunskap inom grundläggande algebraiska begrepp, algebraiska uttryck, formler, ekvationer och olikheter. (Läroplan för Grundskolan 2000) I läroplanen för grundskolan från 2011 så poängteras i det centrala innehållet att eleven efter genomgången grundskola skall ha gått igenom algebraiska uttryck, formler och ekvationer. De skall ha behandlat innebörden i variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer samt metoder för ekvationslösning. (Kursplan – Matematik Grundskolan 2011). Elevernas kunskaper bör reflekteras i deras betyg från grundskolan. De elever som studerats i denna studie har läst under den äldre läroplanen från 2000.

Vilken Matematikundervisning ger Gymnasieskolan?

Matematikämnet på gymnasieskolans Naturvetenskapliga och Tekniska program behandlar, tillsammans med mycket annat, algebra. I kurserna Matematik 1c, 2c, 3c, 4 och 5 sker en kunskaps- och svårighetsmässig progression. I matematik 1c behandlas formler och algebraiska uttryck, lösning av förstagradsekvationer samt enklare potensekvationer. Ekvationslösningen generaliseras till att inbegripa lösning av exponentialekvation, andragradsekvationer med reella och komplexa rötter samt rotekvationer i matematik 2c. När eleverna behandlar derivata och extremvärdesproblem i matematik 3c så tillämpas de kunskaper som de skaffat sig i tidigare kurser. Matematik 4 innebär en ökad abstraktionsgrad då eleverna skall tillämpa och utveckla sina kunskaper i algebra genom att lösa trigonometriska ekvationer och manipulera trigonometriska uttryck. I kursen löser de även enklare polynomekvationer. I den avslutande kursen, matematik 5 så nämns inte algebra explicit i kursplanen men eleverna kommer att tillämpa sina förvärvade kunskaper. (Kursplan – Matematik 1c, 2c, 3c, 4 & 5 2011)

Generellt så används symbolen x som obekant. Ibland kan symbolerna y, z, n och t tillämpas. Endast i undantagsfall då rena tillämpningsuppgifter av problemkaraktär ges så används andra symboler än *x*, *y*, eller *t*. Inom till exempel fysik och konstruktion används en mängd olika latinska och grekiska bokstäver för att beteckna de ingående storheterna. (Se t.ex. (Nordling 2006).) I undervisningssituationen är följande fråga relevant. Skall en känd symbol användas för att fokus primärt skall hamna på det nya begreppet eller skall en godtycklig symbol används i syfte att förbereda eleverna för tillämpningar?

Vad förväntas på Gymnasiet?

I kursplanerna för Fysik 1-3 (Kursplan Fysik 1, 2, 3 2011) så är en av underrubrikerna i det centrala innehållet Fysikens karaktär, arbetssätt och matematiska metoder. Behovet av att använda matematiken som redskap betonas alltså redan i den grundläggande kursen Fysik 1 där speciellt fysikaliska modeller av verkligheten lyfts fram. Vanligen går det att kvantifiera dessa modeller med algebraiska uttryck och formler. I fortsättningskursen, Fysik 2, blir det centrala innehållet mer specifikt. Då den matematiska modelleringen skall innefatta ”*linjära och icke-linjära funktioner, ekvationer och grafer samt derivator och vektorer*”.

I det centrala innehållet för Fysik 3 nämns återigen behovet av matematik som verktyg men man utvidgar det centrala innehållet till att även innehålla behandling av numeriska metoder och simuleringar för att revidera och testa hypoteser. (Kursplan – Fysik 1a, 2, 3 2011)

Teknikämnet syftar bland annat till att utveckla elevens förmåga att lösa tekniska problem. I kursen Teknik 1 poängteras i det centrala innehållet teorier och modeller som innefattar beräkningar och rimlighetsbedömningar. Fortsättningskursen Teknik 2 betonar i det centrala innehållet ”*matematiska modeller för givna förlopp*” tillsammans med tekniska, fysikaliska och matematiska förutsättningar för bland annat energiöverföring. (Kursplan – Teknik 1 & 2, 2011)

Undervisningen i konstruktion skall ge gymnasieeleverna ”*Förmåga att lösa problem och konstruktionsuppgifter samt utföra beräkningar genom att använda matematiska och teknikvetenskapliga teorier och modeller*.” Konstruktion 1 skall innehålla beräkningar. I Konstruktion 2 skall såväl analytiska som numeriska konstruktionsberäkningar behandlas. Konstruktion 3 är den sista gymnasiekursen inom ämnet konstruktion och där sker en ”*fördjupning i teoretiska modeller och konstruktionsberäkningar med hänsyn tagen till matematiska och teknikvetenskapliga samband*”. (Kursplan – Konstruktion 1 – 3 2011). Kemi 1 & 2 betonas behovet av modeller och utvärdering av resultat. (Kursplan – Kemi 1 & 2)

Genomgången kan utvidgas till att behandla de behov som krävs inom relevanta yrken och på relevanta utbildningar såsom ingenjörs- och civilingenjörsutbildningar. Då natur- och teknikvetenskapliga modeller ofta beskrivs med hjälp av algebraiska uttryck och formler så visa genomgången ovan att påståendet och citatet på sidan 1 är högst relevant.

> *Elementary algebra is a threshold to be crossed for succesfull futher studies in mathematics. But also in other subjects, physics, technology etc. depend heavily on skill in handling algebraic expression.*
> (Ekenstam & Greger 1987)

Behovet av matematik och algebra som verktyg är således av central betydelse för att klara studier på gymnasieskolans naturvetenskapliga eller tekniska program. Att se kunskaperna som ett *”kritiskt filter”* eller en *”tröskel”* för framtida framgångsrika studier är korrekt.

Klippanprojektet: Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse

För lite mer än 10 år sedan genomfördes en longitudinell studie som undersökte algebrakunskaperna hos elever som började på NV-programmet. (Persson & Wennström 1999, 2000a, 2000b, 2000c, 2001)

Bakgrunden till studien var tvådelad. Undersökningen inspirerades enligt författarna framför allt av den debatt om studenternas dåliga förkunskaper i matematik som fördes under 1997, (Johansson 1998 & Skolverket 1999). Man ville även undersöka hur de elever som gått igenom hela högstadiet efter läroplanen LPO94 lyckades. Cirka 100 stycken elever vid Klippans Gymnasium deltog i studien mellan 1998 och 2001.

I projektet ville man bland annat undersöka vilka kunskaper som krävs för att klara NV-programmet. De ville undersöka om inlärningen skedde kontinuerligt eller i trappsteg samt vilka krav som ställs för att bibehålla kunskaperna.

Vid skolstarten i årskurs 1 genomfördes ett diagnostiskt test. Testet kompletterades med enkäter och intervjuer. Testproceduren upprepades två gånger under årskurs 2 och en gång under årskurs 3.

Förkunskaperna från högstadiet varierade. 25 % av eleverna bedömdes ha väldigt goda kunskaper, 50 % ansågs ha acceptabla kunskaper. Förkunskaperna för de resterande 25 % bedömdes som undermåliga. Det ansågs att dessa elever kunde få problem med att uppnå betyget godkänt på matematik kurserna A & B.

I slutet av årskurs 3 fann man bland annat att merparten av eleverna behärskar grundläggande förenklingsalgebra bra men att felen i de flesta fall beror på dåliga taluppfattning så som negativa tal. Man såg att förmågan att hantera bråk var relativt dålig men att lösning av vanligt förekommande ekvationer fungerar tillfredsställande.

Tabell 1. Sammanställning av lösningsfrekvens för valda uppgifter i Klippanprojektet.

	Uppgift	Lösningsfrekvens			
		NV1 ht	NV2 ht	NV2 vt	NV3 vt
1	Förenkla: $10x+3(4-3x)+8$	0,54	0,88		
2	Förenkla: $10x-3(4-3x)+8$	0,42	0,77		
3	Förenkla: $y+3(4+3y)+8$	0,6	0,92		
4	Lös ekvationen: $4x-15=75$	0,71	0,86		
5	Lös ekvationen: $x+25=55$	0,90			
6	Lös ekvationen: $x/5+6=14$	0,81	0,85		
7	Lös ekvationen: $3(20+y)-2(5+2y)=40$		0,84		
8	Förenkla: $3(4-3x)+4(3-4x)$			0,82	0,77
9	Lös ekvationen: $4x-15=75-x$			0,74	0,72
10	Lös ekvationen: $x/5-6=14$			0,86	0,86

Syfte och mål

Syfte

Att inom ramen för kursen Teknik 1 (Kursplan – Teknik 1 2011) **testa** och **utveckla** elever på teknikprogrammets förmåga att lösa **förstagradsekvationer** samt **förenkla** algebraiska uttryck där den obekanta är av familjär natur, $\boldsymbol{x}$ alternativt y, och där den obekanta är en **godtycklig symbol,** till exempel λ eller σ. Vidare syftar studien till att utveckla elevernas problemlösningsförmåga och göra dem bättre förberedda för fortsatta studier inom matematik, fysik och i teknikämnet.

Mål

Studien kan sammanfattas i sex stycken mätbara mål. I studien ville vi undersöka:

Om det är någon skillnad i **lösningsfrekvens** av förstagradsekvationer och förenkling av algebraiska uttryck med x respektive godtycklig symbol som obekant **före** undervisning har getts respektive **efter** undervisningsperioden.

Om det är någon skillnad i **upplevd svårighetsgrad** vid lösning av förstagradsekvationer och förenkling av algebraiska uttryck med x respektive godtycklig symbol som obekant **före** undervisning har getts respektive **efter** undervisningsperioden.

Om eleverna efter avslutad **undervisning** har **förbättrat** sina kunskaper i förenkling av algebraiska uttryck och lösning av förstagradsekvationer med x respektive godtycklig symbol som obekant.

Om eleverna efter avslutad **undervisning** upplever det som **lättare** att utföra förenkling av algebraiska uttryck och lösning av förstagradsekvationer med x respektive godtycklig symbol som obekant.

Hur **upplevd svårighetsgrad** korrelerar mot andelen **korrekta svar** vid lösning av förstagradsekvationer samt förenkling av uttryck med x resp. godtycklig symbol som obekant.

Hur förkunskaperna i början av kursen beror på elevernas **betyg** från **grundskolan**?

Metod

Deltagarna i studien har gjort ett inledande oförberett test där algebraiska förenklingar och förstagradsekvationer med *x* eller godtycklig symbol som obekant variabel genomfördes. De har fått undervisning i ämnet under 32 h. för att slutligen genomföra ett avslutande test i samband med slutprov för delkursen. Studien inleddes augusti 2011 och sträcker sig fram till januari 2013. Totalt har 87 elever fördelat på två årgångar, deltagit i studier. Hösten 2011 deltog 38 elever i studien och 2012 49 stycken.

Mål 1 – 4 för studien handlar om att mäta och jämföra lösningsfrekvens och skattad svårighetsgrad. Jämförelserna görs mellan val av obekant variabel samt före och efter genomförd undervisning. Såväl det inledande testet som det avslutande testet används för detta. Samtliga resultat från inledande test och och avslutande testet används då mål fem behandlas. Det sista av de sex målen uppfylls endast med hjälp av det inledande testet.

Inledande test

Under lektion 1 genomfördes ett anonymt inledande test. Eleverna fick lösa åtta stycken uppgifter som ingick i studien. Fyra av dessa behandlade förenkling av polynom och i fyra av uppgifterna skulle förstagradsekvationer lösas. Hälften av förenklingsuppgifterna och ekvationerna hade *x* som obekant variabel. Övriga 2 uppgifter hade en grekisk eller annan latinsk bokstav som obekant variabel. Eleverna fick skatta varje uppgifts svårighetsgrad på en 6-gradig skala. Om eleven upplevde uppgiften som väldigt svår så skattades den med 1 om eleven å andra sidan upplevde den som väldigt lätt så skattades den med 6. Uppgifterna har motsvarat de krav som ställts för betyg G respektive E i kursen Matematik A i LPF94 och Matematik 1c i GY11, (Alfredsson 2008, Szabo 2011). Det diagnostiska provet finns återgivet i *figur 1*. Uppgift 1 – 4 och 7 – 10 ingick i studien.

Teknik 1, 2011 Jesper Johansson

Kunskapscheck

Algebra och symbolhantering

Pojke: ☐ Flicka: ☐

Betyg i matematik från årskurs 9: IG ☐, G ☐, VG ☐, MVG ☐

Slutbetyg årskurs 9: ________

		Svår … Lätt
1.	Förenkla uttrycket $4x+2(x-3)$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
2.	Förenkla uttrycket $3(l+2)-5(l-2)$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
3.	Förenkla uttrycket $12x(2-x)-22x+1$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
4.	Förenkla uttrycket $3(2\varepsilon-7)-6\varepsilon^2+22$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
5.	Beräkna värdet av uttrycket $\frac{\alpha(3\alpha-4)}{2\alpha^2(1-3\alpha)}$ för $\alpha=-3$. Svara med tre gällande siffror.	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
6.	Beräkna värdet av uttrycket $\frac{2x(1-x)}{3(2-4x)(3x+2)}$ för $x=4$. Svara med fyra decimaler.	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
7.	Lös ekvationen $0{,}1\sigma+3{,}4=2{,}7$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
8.	Lös ekvationen $4(x+7)=36$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
9.	Lös ekvationen $(5-x)\cdot 3=0$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
10.	Lös ekvationen $11(\theta+8)=88$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
11.	Lös ekvationen $1+\frac{3x+2}{10}=\frac{10+2x}{6}$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
12.	Lös ekvationen $1-\frac{2(3\delta-1)}{5}=\frac{\delta+8}{6}-\frac{4\delta-2}{3}$	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐

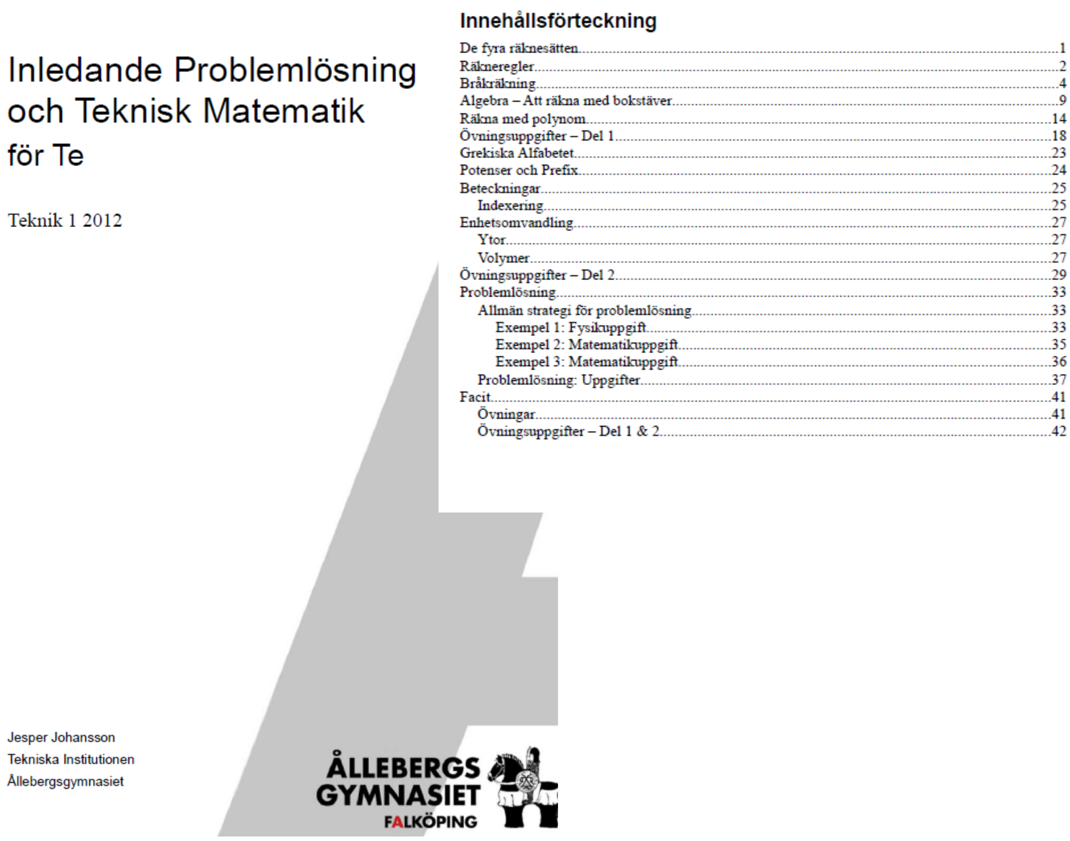
Lycka till
önskar
Jesper

Figur 1: Testformulär för den inledande testet. De fyra första uppgifterna behandlar förenkling av algebraiska uttryck och uppgift 7 – 10 behandlar lösning av förstagradsekvationer. Hälften av uppgifterna har x som obekant variabel och de övriga en grekisk eller annan latinsk bokstav som obekant. (Uppgift 5, 6, 11 & 12 ingick ej i studien.)

Undervisning

Eleverna fick efter det initiala testet 32 h. undervisning som inkluderade följande områden:

1. Räkneregler och prioriteringsordning
2. Räkning med bråk
3. Introduktion till algebraiska uttryck
4. Räkning med polynom
5. Förenkling av polynom
6. Lösning av förstagradsekvationer
7. Introduktion till det grekiska alfabetet
8. Förenkling och ekvationslösning med godtyckliga symboler


Inledande Problemlösning och Teknisk Matematik för Te

Teknik 1 2012

Jesper Johansson
Tekniska Institutionen
Ållebergsgymnasiet

ÅLLEBERGS GYMNASIET FALKÖPING

Innehållsförteckning

Figur 2: Försättsblad och innehållsförteckning för det läromedel som användes under den delkursen i Teknik 1.

Utöver det som listats ingick även material som behandlade potenser och prefix, beteckning av tekniska och fysikaliska storheter, enhetsomvandling (endast år 2012/2013), problemlösningsstrategier och tolkning av uppgiftstexter. I tabell 2 presenteras översiktligt planeringen av delkursen. Undervisningen har främst bestått av genomgångar och individuell uppgiftsräkning men vid ett antal tillfällen har uppgifter av mer öppen karaktär diskuterats och lösts i grupp.

Tabell 2. Översiktlig veckovis planering av studien 2011/2012 och studien 2012/2013. Siffrorna 1-8 anger vilket delområde som behandlades respektive vecka. Se under rubrik undervisning ovan.

v.	35					40					45					50			1		3
	Test					<----------------------------					Undervisning				---------------------------->						Prov
	1	2		3		4	5	6			7	8	8	8			Övriga moment				

Teknik 1, 2011 — Jesper Johansson

Delprov Teknik 1

Algebra och symbolhantering

Namn: ______________________

Datum: 2012-01-20
Tid: 13:10 – 14:40
Poäng: (E=10/C=8/A=4)

				Svår … Lätt
1.	Förenkla uttrycket	$5x+3(x-2)$	(1/0/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
2.	Förenkla uttrycket	$4(t+2)-5(t-3)$	(1/0/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
3.	Förenkla uttrycket	$8x(3-x)-22x+2$	(1/0/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
4.	Förenkla uttrycket	$4(3\sigma+2)-3\sigma^2+22$	(0/1/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
5.	Förenkla uttrycket	$\frac{Q}{4}(3-8Q)-\frac{1}{3}(4Q+9)$	(0/1/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
6.	Förenkla uttrycket	$\frac{3\theta}{9\theta^2}+\frac{(\theta^2-4)}{\theta+2}$	(0/0/1)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
7.	Lös ekvationen	$3\Omega-3=6$	(1/0/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
8.	Lös ekvationen	$0{,}2x+1{,}8=0{,}7x$	(0/1/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
9.	Lös ekvationen	$9(2-x)=0$	(1/0/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
10.	Lös ekvationen	$9(\rho-2)=81$	(1/0/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
11.	Lös ekvationen	$1+\frac{3x-2}{10}=\frac{10+2x}{6}$	(0/1/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐
12.	Lös ekvationen	$2-\frac{3\kappa-1}{8}=\frac{4(1+\kappa)}{2}-\frac{½\kappa+2}{3}$	(0/1/0)	1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐ 6: ☐

Figur 3: Testformulär för det avslutande testet. Testet inkluderades i det prov som gavs i slutet av delkursen. De sex första uppgifterna behandlar förenkling av algebraiska uttryck och de sex sista uppgifterna behandlar lösning av förstagradsekvationer. Hälften av uppgifterna har x som obekant variabel och de övriga en grekisk eller annan latinsk bokstav som obekant. Uppgift 5, 6, 11 & 12 har endast använts i examinationssyfte.

Avslutande utvärdering

Som avslutning på delkursen gjorde eleverna ett avslutande test under vecka 3 2012 & 2013. Testet ingick i det prov som fungerade som examination för delkursen. Det avslutande testet innehöll 4 stycken uppgifter som behandlade förenkling av algebraiska uttryck och 4 stycken uppgifter som behandlade förstagradsekvationer. Hälften av uppgifterna hade x som obekant och hälften en grekisk eller annan latinsk bokstav som obekant. Eleverna fick skatta uppgifternas svårighetsgrad på en 6-gradig skala. Testet återges i figur 3. Uppgift 1 – 4 och 7 – 10.

Testernas likvärdighet

Tabell 3. Sammanställning av uppgifter i det inledande testet och det avslutande testet. Uppgift 1 – 4 och 7 – 10 har använts i studien.

		Diagnostiskt prov	Slutprov
1	Förenkla uttrycket	$4x+2(x-3)$	$5x+3(x-2)$
2	Förenkla uttrycket	$3(l+2)-5(l-2)$	$4(t+2)-5(t-3)$
3	Förenkla uttrycket	$12x(2-x)-22x+1$	$8x(3-x)-22x+2$
4	Förenkla uttrycket	$3(2\varepsilon-7)-6\varepsilon^2+22$	$4(3\sigma+2)-3\sigma^2+22$
7	Lös ekvationen	$0{,}1\sigma+3{,}4=2{,}7$	$3\Omega-3=6$
8	Lös ekvationen	$4(x+7)=36$	$0{,}2x+1{,}8=0{,}7x$
9	Lös ekvationen	$(5-x)\cdot 3=0$	$9(2-x)=0$
10	Lös ekvationen	$11(\theta+8)=88$	$9(\rho-2)=81$

Tabell 3 visar att för uppgift 1 – 4 så är det endast siffror och symbol som skiljer det inledande och det avslutande testet åt. Uppgift 7 i det inledande testet är jämförbar med uppgift 8 i det avslutande. Samma sak gäller för 8 och 7. I de två följande uppgifterna, 9 och 10, har endast siffror och i ett fall symbol bytts ut. (Uppgift 5 och 6 på det avslutande testet har utelämnats från databehandlingen då svårighetsgraden är avsevärt högre än de övriga uppgifterna. Detsamma gäller för uppgift 11 och 12. Dessa har endast använts i examinationssyfte.)

Kommentar

Nämnas bör att 68 av uppgifterna i kursmaterialet innehöll en obekant variabel av familjär natur, *x* alternativt *y*. Då eleverna introducerats för det grekiska alfabetet återkommer samma 68 uppgifter med en grekisk bokstav som obekant. Syftet med detta är att eleverna skall introduceras för en nyhet i taget. De har tidigare löst uppgifterna och kan med ett gott självförtroende ta sig an uppgifter med godtyckliga symboler. (Johansson 2012)

Parallellt med Teknik 1 har eleverna läst kursen Matematik 1c, (Kursplan – Matematik 1c). Visst material är gemensamt för kurserna men i Matematik 1c avhandlas det i en snabbare takt. En annan viktig skillnad är att eleverna i mycket mindre omfattning exponeras för godtyckligt valda obekanta variabler då eleverna arbetar med ekvationslösning i Ma1c (Szabo 2011). Utifrån de kunskapskriterier som finns för kursen Matematik 1c, (Kursplan – Matematik 1c), så har uppgift 1 – 4 samt 7 – 10 bedömts motsvara nivån för betyget E. (Uppgift 5, 11 och 12, som endast gavs i examinationssyfte, motsvarar kunskapskriterier för betyget C och uppgift 6 för motsvarar kriterierna för betyget A.) (Kursprov 2011, Szabo 2011)

Databehandling och Statistik

Målen med studien har redovisats ovan. I listan nedan har målen kvantifierats till ett antal mätbara mått. Vi avser att använda punktskattningar av medelvärdet för storheterna som används för att uppfylla mål 1 – 4 och ange ett konfidensintervall för dessa. Detta för att med en viss säkerhet kunna säga var det riktiga medelvärdet kan ligga. För målet i punkt 5 kommer en linjär regression med tillhörande feluppskattning att göras. Punktskattningar av medelvärdet för resultaten i respektive betygsgrupp med tillhörande konfidensintervall kommer att presenteras för att uppfylla mål 6.

1,3. Lösningsfrekvens före och efter
   a) Ekvationer med *x* och med symbol
   b) Förenklingar med x och med symbol

2,4. Upplevd svårighetsgrad före och efter
   a) Ekvationer med *x* och med symbol
   b) Förenklingar med x och med symbol

5. Korrelation mellan upplevd svårighetsgrad och lösningsfrekvens

6. Grundskolebetyg kontra resultat på diagnostiskt prov.

Vi noterar att storheten **lösningsfrekvensen** är **binomialfördelad**. Svaren är antingen rätt eller felaktiga. Vi betraktar den **upplevda svårighetsgraden** som **normalfördelad**. För en uppgift av normal svårighetsgrad så svarar de flesta 3 eller 4 på den 6-gradiga skalan och minst 1 respektive 6.

Då antalet deltagare i undersökningen är begränsat, 87 stycken totalt och 38 respektive 49 per årskurs, så följer att den upplevda svårighetsgraden egentligen skall betraktas som *t*-fördelning[1]. Detta bortser vi ifrån då vi felet vid 40 – 50 prov blir relativt litet.

Arbetsgången för att ta fram ett resultat och ett konfidensintervall till de olika varianterna på lösningsfrekvens och upplevd svårighetsgrad följer alla samma metodik. För varje storhet gör vi en punkskattning av medelvärdet, $\bar{x}$ och standardavvikelsen s .

(1) $$\bar{x}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$$

1 *t*-distributionen närmar sig normalfördelningen då antalet prov närmar sig 200 men redan vid 100 prov är skillnaden mellan normalfördelning och *t*-distributionen små. Den främsta skillnaden är att *t*-distributionen ger en något högre standardavvikelse än normalfördelningen. Vi kan se *t*-distributionen som en *"tillplattad"* normalfördelning där graden av *"tillplattningen"* är störst för få prov.

(2) $$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Med hur stor säkerhet, konfidens, ett värde kan beläggas ges av

(3) $$\mu = \bar{x} \pm k \cdot s$$

där μ är medelvärdet, $\bar{x}$ punktskattningen av medelvärdet, s är standardavvikelsen. Värdet på k beror på hur många som deltar i studier och vilken statistisk fördelning avvikelsen förväntas ha. I fallet med upplevd svårighetsgrad så är även konfidensintervallet normalfördeltat. Konfidensintervallet för den binomialfördelade lösningsfrekvensen kan även den antas vara normalfördelad, (Milton & Arnold 1995). Konstanten k i ekv. 3 ges då av:

(4) $$k \approx \kappa / \sqrt{n}$$

där n är antalet prov och κ är en normalfördelad variabel som beror på hur med vilken grad av konfidens intervallet, 90%, 95% etc., skall ha. För ett 90 %-igt konfidensintervall så är $\kappa = 1.645$.

Givet talparen $(x_{1,} y_1)$, $(x_{2,} y_2)$, ... ,(x_n, y_n). Sökt, den räta linje på formen $y = a + b(x - \bar{x}) = kx + c$ som med minsta möjliga fel beskriver det förmodade linjära sambandet mellan punkterna.

Problemet löses genom betrakta det överbestämda ekvationssystemet

(5) $$\begin{bmatrix} x_1 k & c \\ x_2 k & c \\ \dots & \dots \\ x_n k & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}$$

Bästa möjliga lösning till den linjära regressionen fås genom att göra ekvationssystemet kvadratiskt. Detta görs genom att multiplicera vänster och höger led med transponatet till matrisen $\boldsymbol{A}$. De båda obekanta k och c fås då ekvationssystemet löses enligt ekv. (6).

(6) $$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{y} \Rightarrow \begin{bmatrix} k \\ c \end{bmatrix} = \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{A}\right)^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{y}\right)$$

Metoden finns beskriven i mer detalj och på flera sätt i till exempel (Råde 1998).

Resultat

Totalt 89 elever har deltagit i studien. De har i början av höstterminerna 2011 och 2012 gjort en inledande test innehållande fyra uppgifter som behandlar algebraiska förenklingar och fyra stycken som behandlar ekvationslösning. Hälften av uppgifterna i respektive kategori har haft *x* som obekant variabel och hälften har haft en godtycklig symbol som okänd variabel. Uppgifterna har motsvarat de krav som ställts för betyg G respektive E i kursen Matematik A i LPF94 och Matematik 1c i GY11, (Alfredsson 2008, Szabo 2011). I slutet av ett genomgången kurs har ett avslutande test genomförts. Vid det avslutande testet har uppgifter av identisk karaktär givits. Eleverna har angett svar på uppgifterna samt skattat dem på en 6-gradig skala där 1 är svårt och 6 är lätt. För detaljer se föregående kapitel.

Inledande test hölls under vecka 34 2011 och 2012. I tabell 4 kan vi se en sammanställning av resultaten.

Tabell 4. Utfall från det inledande testet.

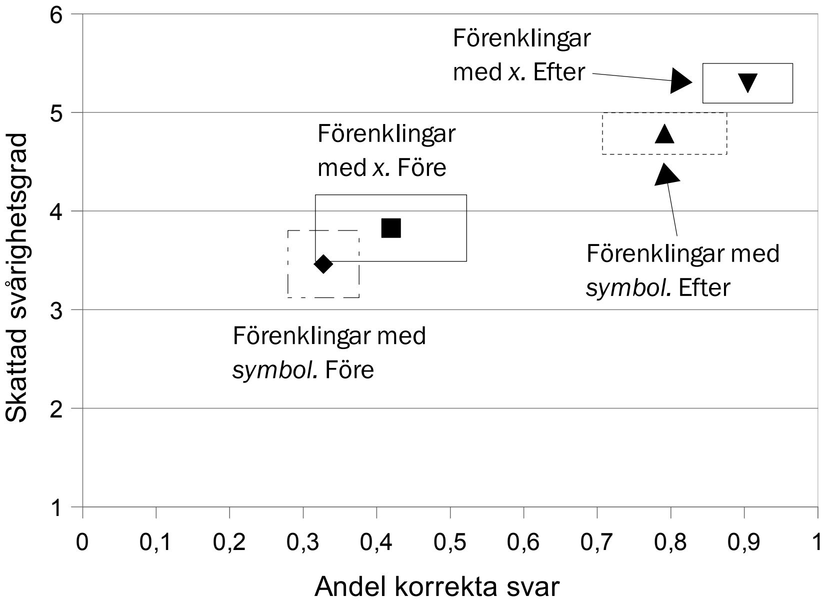
	Resultat	Svårighetsgrad
Förenkling med *x*	0,42	3,83
Förenkling med symbol	0,33	3,46
Ekvationslösning med *x*	0,66	4,25
Ekvationslösning med symbol	0,50	3,31

Standardavvikelserna för den skattade svårighetsgraden ligger mellan 1,62 och 1,97. Då lösningsfrekvenserna är binomialfördelade och de ligger kring 0.5 så fås helt i linje med teorin standardavvikelser i samma storleksordning.

Resultaten från det diagnostiska provet visar att populationen med:

- 75 %-ig säkerhet presterar sämre vid förenkling med godtycklig symbol.
- 72 %-ig säkerhet upplever förenkling med godtycklig symbol som svårare.
- 85 %-ig säkerhet presterar sämre vid ekvationslösning med godtycklig symbol.
- 99 %-ig säkerhet upplever ekvationslösning med godtycklig symbol som svårare.

I figur 4 respektive figur 5 presenteras resultaten från det inledande testet och det aavslutande testet grafiskt. Rektanglarna representerar ett 90 %-igt respektive 99 %-igt konfidensintervall.



Figur 4: Jämförelse av resultaten för algebraiska **förenklingar** *vid inledande test och vid avslutande test. Rektanglarna visar storleken av ett 90 %-igt konfidensintervall. Resultaten visar att populationen med 75 %-ig säkerhet presterar sämre när förenklingarna sker med en godtycklig symbol som variabel. Skillnad i upplevd svårighetsgrad kan befästas med 72 %. Efter genomförd kurs kvarstår skillnaderna. Skillnad i prestation kan med 87 % fastslås och däremot är skillnaden i upplevd svårighetsgrad mindre, 62 % säkerhet. Noterbart är att det skett en mer än 100 %-ig förbättring.*

De avslutande testen hölls v. 3 2012 och 2013. I tabell 5 finns testresultaten sammanställda.

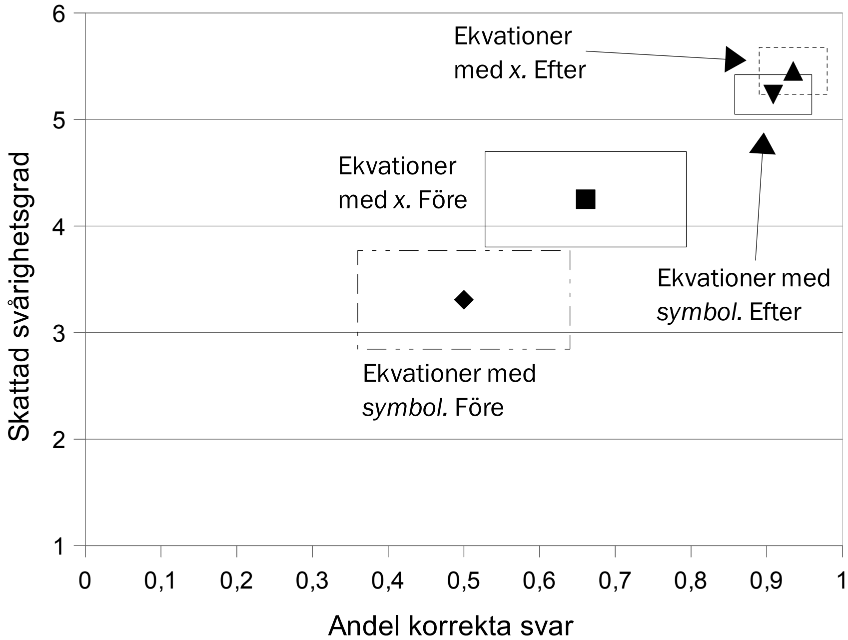
Tabell 5. Resultat från avslutande test.

	Resultat	Svårighetsgrad
Förenkling med *x*	0,9	5,3
Förenkling med symbol	0,79	4,79
Ekvationslösning med *x*	0,91	5,23
Ekvationslösning med symbol	0,93	5,46

Standardavvikelserna för den skattade svårighetsgraden ligger för slutprovet mellan 0,97 och 1,27. Resultatens standardavvikelser har sjunkit ned mot 0,3. Resultaten från det avslutande testet visar att populationen med:

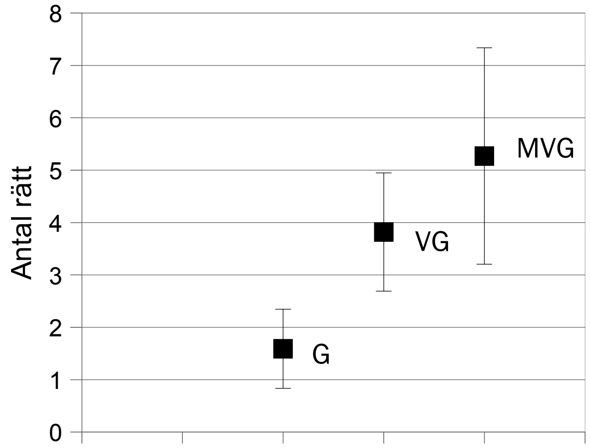
- 87 %-ig säkerhet presterar sämre vid förenkling med godtycklig symbol.
- 98 %-ig säkerhet upplever förenkling med godtycklig symbol som svårare.

Vi kan **ej** med statistisk säkerhet fastställa några **skillnader** i resultat och upplevd svårighetsgrad beträffande **ekvationslösningen**. (Vi kan med 40 % säkerhet belägga sämre resultat och med 62 %-ig säkerhet säga att godtyckliga symboler upplevdes svårare.)



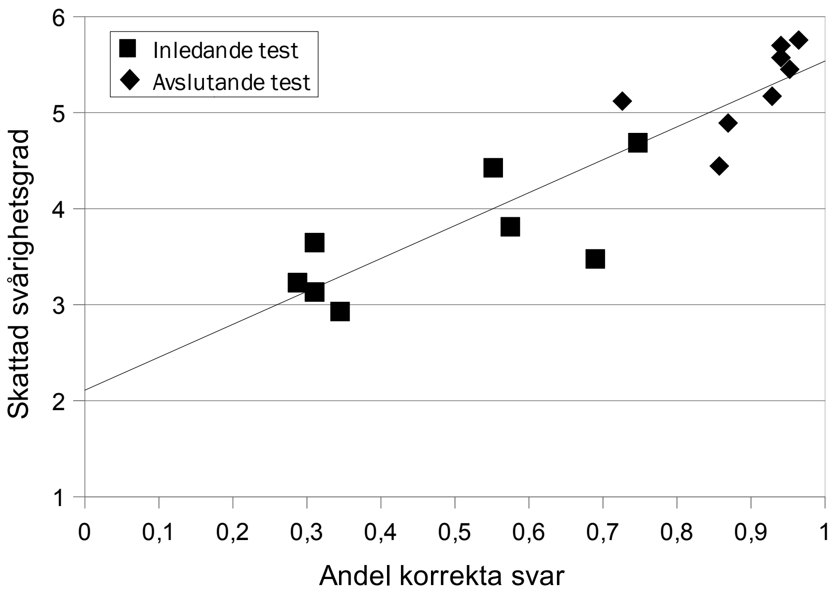
Figur 5: Jämförelse av resultaten för ***ekvationslösning*** *vid inledande och avslutande test. Rektanglarna i visar storleken av ett 99 %-igt konfidensintervall. Figuren visar att vi med 99 %-ig konfidens kan säga att ekvationslösning upplevdes som svårare vid det diagnostiska testet innan kursen genomfördes. Vidare kan vi med en något lägre grad av konfidens, 70 %, säga att populationen presterade sämre när de löste ekvationer med en godtycklig symbol vid det diagnostiska testet. Vid provet, efter det att kursen genomförts, så kan vi ej se någon statistiskt signifikant skillnad vare sig i resultat eller skattad svårighetsgrad mellan ekvationer med godtycklig symbol eller med x som obekant.*

Nivån på elevernas förkunskaper påverkar utgången av det inledande. I figur 6 är medelvärdet av antalet korrekta svar presenterat för respektive betygskategori. Felstaplarna beskriver ett 90 %-igt konfidensintervall. Utifrån resultaten kan vi med 90 %-ig säkerhet säga att elever med betyget G i matematik presterade sämre än elever med betyget VG eller MVG. Vi noterar att elever med betyget MVG i medeltal presterar bättre än de med betyget VG men att felmarginalerna är för stora för att kunna dra säkra slutsatser.



Figur 6: Antal rätt på det inledande testet som funktion av betyg. Felstaplarna anger ett 90%-igt konfidensintervall. Vi kan med 90 %-ig säkerhet säga att elever med betyget G från grundskolan presterar sämre än elever med betyget VG eller MVG från grundskolan.

I undersökningen studeras även hur den upplevda svårighetsgraden och andelen korrekta svar beror av varandra. Resultaten finns presenterade i figur 7. Vi noterar ett relativt linjärt beroende mellan upplevd svårighetsgrad och andel korrekta svar. Beroendet kan beskrivas med ekvationen; $y=3{,}43\cdot x+2.11$.



Figur 7: Upplevd svårighetsgrad som funktion av antalet korrekta svar på inledande test, kvadrater, respektive avslutande test, diamanter. Ett, med god korrelation, linjärt samband mellan prestation och upplevd svårighetsgrad kan ses. Ekvationen y=3,43x + 2,11 beskriver sambandet med korrelationen 0,82.

Tabell 6. Sammanställning av uppgifter i det diagnostiska provet och slutprovet. Uppgift 1 – 4 och 7 – 10 har använts i studien. Övriga uppgifter har endast använts till examination. Bakom respektive uppgift så redovisas lösningsfrekvensen och den skattade svårighetsgraden.

		Inledande test		Avslutnde test	
1	Förenkla uttrycket	$4x + 2(x - 3)$	0,55 4,85	$5x+3(x-2)$	0,94 5,70
2	Förenkla uttrycket	$3(l + 2) - 5(l - 2)$	0,31 3,65	$4(t+2)-5(t-3)$	0,73 5,12
3	Förenkla uttrycket	$12x(2 - x) - 22x + 1$	0,29 3,23	$8x(3-x)-22x+2$	0,87 4,89
4	Förenkla uttrycket	$3(2\varepsilon - 7) - 6\varepsilon^2 + 22$	0,34 2,93	$4(3\sigma+2)-3\sigma^2+22$	0,86 4,44
5	*Förenkla uttrycket*			$\frac{Q}{4}(3-8Q)-\frac{1}{3}(4Q+9)$	*0,24* *2,88*
6	*Förenkla uttrycket*			$\frac{3\theta}{9\theta^2}+\frac{(\theta^2-4)}{\theta+2}$	*0,08* *1,73*
7	Lös ekvationen	$0{,}1\sigma + 3{,}4 = 2{,}7$	0,31 3,13	$3\Omega-3=6$	0,96 5,76
8	Lös ekvationen	$4(x+7) = 36$	0,75 4,69	$0{,}2x+1{,}8=0{,}7x$	0,93 5,17
9	Lös ekvationen	$(5-x)\cdot 3 = 0$	0,57 3,81	$9(2-x)=0$	0,94 5,57
10	Lös ekvationen	$11(\theta+8) = 88$	0,69 3,48	$9(\rho-2)=81$	0,95 5,45
11	*Lös ekvationen*	$1+\frac{3x+2}{10}=\frac{10+2x}{6}$	*0,02* *1,74*	$1+\frac{3x-2}{10}=\frac{10+2x}{6}$	*0,45* *2,96*
12	*Lös ekvationen*	$1-\frac{2(3\delta-1)}{5}=\frac{\delta+8}{6}-\frac{4\delta-2}{3}$	*0,00* *1,23*	$2-\frac{3(3\kappa-1)}{8}=\frac{4(1+\kappa)}{2}-\frac{½\kappa-2}{3}$	*0,17* *1,79*

I tabell 7 finner ni en jämförelse mellan det inledande och avslutande testet. Lösningsfrekvensen för förenkling av algebraiska uttryck har ökat mellan 71 % och 200 %. Samtidigt upplever eleverna att svårighetsgraden sjunkit i samma utsträckning, se tabell 7 och figur 7. Ökning i lösningsfrekvens för förstagradsekvationer är inte lika stor men det skall kommas ihåg att respondenterna startade från en högre nivå. Även här har den upplevda svårighetsgraden avtagit i samma utsträckning, se tabell 7 och figur 7.

Tabell 7. Ökning i lösningsfrekvens och minskning i svårighetsgrad för jämförbara uppgifter vid inledande och avslutande test.

Uppgifter:	Lösningsfrekvens	Svårighetsgrad
1 → 1	+71 %	-17 %
2 → 2	+135 %	-40 %
3 → 3	+200%	-51 %
4 → 4	+153 %	-51 %
7 → 8	+200 %	-84 %
8, 10 → 10	+32 %	-33 %
9 → 9	+65%	-46 %

Diskussion

Efter det att eleverna har gått igenom delkursen så höjer de sina resultat med mellan 30 % och 200 % på enskilda uppgifter. Lösningsfrekvenserna ligger generellt mellan 0,85 och 0,95. den upplevda svårighetsgraden ligger för dessa uppgifter kring 5, det vill säga "*ganska lätt*". (Se t.ex. tabell 6). Delkursen i Teknik 1 har, tillsammans med Matematik 1 c, gett resultat. Det råder ingen tvekan om att devisen "*övning ger färdighet*" är sann. Det vore dock önskvärt om kunskaperna fanns hos eleverna då de lämnar grundskolan.

Att lösa ekvationer eller förenkla algebraiska uttryck med en godtycklig symbol upplevs till en början svårare än att göra samma sak med en tidigare känd symbol, *x,* som obekant variabel. Resultaten visar att vi med en säkerhet uppemot 99 % kan säga att så är fallet. Vi ser även att de presterar sämre då de ställs inför uppgifter med godtycklig symbol. Försämringen i prestation är dock mindre än skillnaden i upplevd svårighetsgrad och den kan beläggas med mindre säkerhet. Vad beror detta på? En möjlig tolkning är att respondenterna ställs inför något helt nytt och upplever det som svårt. Det nya påminner dock så mycket om det de redan kan att de löser uppgifterna automatiskt.

Efter genomgången delkurs är skillnaden mellan prestation och upplevd svårighetsgrad borta när det gäller ekvationslösning men den kvarstår för algebraiska förenklingar. I båda fallen så har de höjt lösningsfrekvensen markant och den upplevda svårighetsgraden har sjunkit i lika stor utsträckning. Kan det vara så att de får öva mer på ekvationslösning eller är det så att den upplevs mer konkret, känd från tidigare och användningsbar?

Det råder ett relativt linjärt beroende mellan antalet rätt på det inledande testet och betyget från grundskolan. Resultaten visar att det med mer än 90 %-ig säkerhet går att säga att de med G i betyg från grundskolan presterar sämre på den inledande diagnosen än de med VG eller MVG. Se figur 6. De med G i betyg har en lösningsfrekvens som är mindre än 20 %. En så låg lösningsfrekvens kommer att göra fortsatta studier på Teknikprogrammet svåra. Vad som är än mer intressant är konfidensintervallens storlek. Konfidensintervallen växer med betyget. Spridningen för betyget MVG är så stor att ett resultat inte med säkerhet går att skilja från ett VG. Detta kan ha minst två orsaker. Antingen så glömmer eleverna över sommarlovet eller så tolkas betygskriterierna olika på olika grundskolor.

Vi ser en god linjär korrelation mellan lösningsfrekvens och uppskattad svårighetsgrad. I figur 7 skall man notera att linjen inte skär y-axeln i 1 utan i 2,11. Om lösningsfrekvensen är noll så är det rimligt att antaga att respondenterna skattar uppgiften som väldigt svår, det vill säga med en 1:a. Våra resultat visar att eleverna överskattar sin förmåga och istället gör skattningen

2. Vi kan tolka det som en överskattning av förmågan men kan lika gärna säga att de angriper uppgifterna med ett gott självförtroende. I en formativ bedömningssituation, (Jönsson 2010). där eleverna gör en självskattning så är resultatet här bra att ta i beaktande.

På sidan 5 har tio stycken uppgifter från Klippanprojektet redovisats med lösningsfrekvens. (Persson & Wennström 1999, 2000a, 2000b, 2000c, 2001) Uppgifterna är valda för att de påminner om de som gjorts i denna studie och till viss del är jämförbara. Uppgift 1, 2 och 3 på sidan 5 behandlar förenkling av förstagradspolynom där distributiva regeln måste tillämpas och variabeln är av känd natur, x eller y. Lösningsfrekvensen vid det test som gjordes höstterminen i årskurs 1 ligger i medeltal på 0,52. I denna studie så är motsvarande uppgifter 1 och 2. I denna studie har uppgift 1 x som obekant och en lösningsfrekvens på 0,55. Uppgift 2 har l som obekant och lösningsfrekvens 0,31. (Uppgift 3 & 4 innehåller termer av andra ordningen vilket är en försvårande omständighet. Lösningsfrekvensen för dessa uppgifter var 0,29 & 0,34.) När samma uppgifter testas i Klippan under höstterminen i årskurs 2 så ligger lösningsfrekvens i medeltal på 0,86. Motsvarande siffra för lösningsfrekvens av förenklingsuppgifter i denna studie efter avslutad delkurs är 0,85. Det bör poängteras att detta är oavsett om uttrycken innehåller en känd symbol eller en godtycklig eller om de innehåller termer av första eller andra graden.

Lösningsfrekvensen av förstagradsekvationer med x som obekant var vid det diagnostiska provet 0,75 & 0,57. Motsvarande siffror för Klippanprojektet, uppgift 4 – 5, är i medeltal 0,81. Då samma uppgifter testas av i början av årskurs 2 i Klippan så är lösningsfrekvensen i princip densamma, 0,86. I denna studie så är lösningsfrekvensen för förstagradsekvationer på E-nivå 0,95 oavsett val av variabel. Det bör nämnas att de avslutande resultaten här är tagna vid en provsituation då eleverna är förberedda och har kunskapen aktuell.

Eleverna i denna studie är högst troligt <u>sämre förberedda,</u> se PISA-studien (Skolverket 2013), från grundskolan då de börjar gymnasiet men efter en termin är de <u>minst lika bra eller bättre</u> rustade jämfört eleverna som skrevs in på Naturvetenskapliga programmet vid Klippans gymnasium 1999.

Slutsats

I denna studie har vi med 99 %-ig och 72 %-ig säkerhet visat att lösning av förstagradsekvationer och förenkling av algebraiska uttryck upplevs som svårare när de genomförs med en generell symbol, som λ eller σ, jämfört med en känd dito, som *x,* då elever kommer direkt från grundskolan. Vi har även med 85 %-ig & 75 %-ig säkerhet visat lösningsfrekvensen för uppgifterna är högre då symbolen *x* används.

Efter 32 h. extraundervisning i algebra där de introducerats för det grekiska alfabetet så gick lösningsfrekvenserna på likartade uppgifter upp med 30 – 200 % och hamnade i området 0,85 – 0,95. Skillnaden i upplevd svårighetsgrad och lösningsfrekvens försvann inom ekvationslösningen men kvarstod för förenklingsuppgifter. Undersökningen har genomförts under höstterminen i årskurs 1 och totalt 87 personer har deltagit.

Vi ser en linjär korrelation mellan resultat på det inledande diagnostiska provet och betyg från grundskolan. Elever med betyget G presterar med mer än 90 %-ig säkerhet sämre än elever med betyget VG eller MVG. En linjär korrelation mellan lösningsfrekvens och upplevd svårighetsgrad kunde befästas.

Resultaten har jämförts med resultat från en liknande studie som gjordes kring 2000. Vi fann att eleverna i denna studie högst troligt sämre förberedda från grundskolan då de börjar gymnasiet men efter en termin är de minst lika bra eller bättre.

Utblick

När ett tekniskt eller naturvetenskapligt problem skall lösas så måste det först definieras. I skolans värld innebär det oftast en skriven uppgiftstext. En praktiserande ingenjör måste ibland definiera problemet själv eller följa de krav som finns i en given specifikation. I samtliga dessa fall måste den skriftliga informationen abstraheras och sättas i en teknisk, naturvetenskaplig, logisk och matematisk kontext. Ingenjören behöver inte bara kunna tänka logiskt och praktisera matematik. Ingenjören måste också ha ett språk.

I min undervisning på Teknikprogrammet i Falköping har kopplingen mellan språk och matematik samt teknik blivit allt tydligare. Elever med ett välutvecklat språk presterar i allmänhet bättre än elever med ett mer rudimentärt språk. Svenska grundskoleelevers resultat i matematik och läsförståelse har i internationella studier har gått ned. (PISA 2013) Det finns således ett behov av att utveckla bristande matematikkunskaper från grundskolan likaväl som det finns ett behov av att utveckla läsförståelsen i ett problemlösningssammanhang.

Uppgift 9

Antag att en stavhoppare som hoppar 6 m förflyttar sin tyngdpunkt 5 m uppåt. Beräkna med hjälp av energiprincipen stavhopparens ansatshastighet.

***Ledtråd**: Utnyttja energiprincipen. I det här fallet innebär det att rörelseenergin, E_k, vid upphoppet är lika med lägesenergin, E_p, vid den högsta punkten, (då tyngdpunkten förflyttat sig 5 m uppåt.):*

$$E_k = \frac{m v^2}{2} \qquad E_p = m g h$$

där m är massan i kg, v hastigheten i m/s, h höjden i m och g = 9.82 m/s².

Figur 8: Exempel på uppgift där eleven får lösa kombinera sina logiska och matematiska förmågor med läsförståelse. Uppgiften är hämtad från läromedlet "Inledande Problemlösning och Teknisk matematik för Te", (Johansson 2012)

I figur 8 ges exempel på en uppgift där eleven får kombinera sina logiska och matematiska förmågor med läsförståelse. Författaren ser fram emot att genomföra en studie där teknisk läsförståelse kombineras med matematik och algebra i syfte att förbereda elever än mer för fortsatta studier.

Referenser

Alfredsson, L. et. al. (2008), *Matematik 4000 kurs AB blå lärobok*, Natur och Kultur, Stockholm.

Arcavi, (1995), *Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future*, Journal of Mathematical Behavoiur, **14**, 145 – 162

Brooks, (1871), *The normal elementary algebra: Containing the first principles of the science, developed with conciseness and simplicity, for common schools, academics, seminaries and normal schools*, Philadelfia, Sower, Potts and Company

Cai, (2004), *Why do U.S. And Chinese students think differently in mathematical problem solving? Impact of early algebra learning and teacher's beliefs*, Journal of Mathematical Behaviour, **23**, 135 – 167

Charbonneau, L. (1996), From Euklid to Descarte: Algebra and its relations to geometry. In Nadine Bednarz, Carolyn Kieran & Lesley Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 55 - 62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Ekenstam, A. & Greger, K. (1987), *On children's understanding of elementary algebra*, Journal of Structural Learning, **9**, 303 – 315

Esteve, (2008), *Symbolic language in early modern mathematics: The Algebra of Pierre Hérigone (1580 – 1643)*, Historia Mathematica, **35**, 285 – 301

Euler, L. (1796), *Elements och Algebra*, Springer, New York 1984

Godfrey & O'Connor, (1995), *The Vertical Hand Span: Nonstandard Units, Expressions, and Symbols in the Classroom*, Journal of Mathematical Behaviour, **14**, 327 – 345

Högskoleverket (1999), *Räcker kunskaperna i matematik?*, Rapport.

Johansson, B. (1998), *Förkunskapsproblem I matematik?*, Rapport inst. För ämnesdidatik, Göteborgs Universitet

Johansson, J. (2012), *Inledande Problemlösning och Teknisk matematik för Te*, Falköping

Jönsson, A. (2010), *Lärande bedömning,* Gleerups Utbildning AB, Malmö

Katz, (1997), *Algebra and its Teaching: An Historical Survey*, Journal of Mathematical Behaviour, **16** (1), 25 – 38

Kursplaner för Grundskolan, (2000), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Fysik 1a, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Fysik 2, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Fysik 3, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Kemi 1, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Kemi 2, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Konstruktion 1, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Konstruktion 2, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Konstruktion 3, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan -Matematik 1c, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan -Matematik 2c, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan -Matematik 3c, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan -Matematik 4, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan -Matematik 5, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Matematik Grundskolan Lpr 2011, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Teknik 1, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursplan – Teknik 2, (2011), Skolverket, Stockholm

Kursprov Matematik 1c, höstterminen 2011, Skolverket, Stockholm.

Milton, J.S. & Arnold, J.C. (1995), *Introduction To Probability and Statistics*, 3:e upplagan, McGraw Hill, New York

Nordling, J. Österman, (2006), *Physics Handbook*, 6:e upplagan, Studentlitteratur, Lund

Person & Wennström (1999), *Gymnasieelevers algebraiska förmågaoch förståelse I,* Tsunami 1-2003 (Rapport Högskolan i Kritianstad)

Person & Wennström (2000a), *Gymnasieelevers algebraiska förmågaoch förståelse II,* Tsunami 2-2003 (Rapport Högskolan i Kritianstad)

Person & Wennström (2000b), *Gymnasieelevers algebraiska förmågaoch förståelse III,* Tsunami 3-2003 (Rapport Högskolan i Kritianstad)

Person & Wennström (2000c), *Gymnasieelevers algebraiska förmågaoch förståelse IV,* Tsunami 1-2004 (Rapport Högskolan i Kritianstad)

Person & Wennström (2001), *Gymnasieelevers algebraiska förmågaoch förståelse V,* Tsunami 2-2004 (Rapport Högskolan i Kritianstad)

Rojano, T. (1996), The Role of Problems and Problem solviing in the Development of Algebr. In Nadine Bednarz, Carolyn Kieran & Lesley Lee (Eds.), Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching (pp. 55 - 62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Råde, L. & Westergren, B. (1998), *Mathematics Handbook for Science and Enginering*, 2:a upplagan, Studentlitteratur, Lund

Skolverket (2013), *PISA 2012, 15 åringars kunskaper i matematik, läsförståelse och naturvetenskap*, Rapport 398, Stockholm.

Stacey & MacGregor, (2000), *Learning the Algebraic Method of Solving Problems*, Journal of Mathematical Behaviour, **18** (2), 149 – 167

Szabo, A. et. al., (2011), *Matematik origo 1c*, Bonniers utbildning, 2:a upplagan, Stockholm.

Szabo, A. et. al., (2012 a), *Matematik origo 2c*, Bonniers utbildning, 1:a upplagan, Stockholm.

Szabo, A. et. al., (2012 b), *Matematik origo 3c*, Bonniers utbildning, 1:a upplagan, Stockholm.

Wentworth, (1881) , *Elements of Algebra*, Boston, Ginn and Company

Figur- och Tabellförteckning