Att se det som inte syns – om talföljder i årskurs 3 och 4

L Erixson, K Frostfeldt Gustavsson, K Kerekes & B Lundberg

Internationell forskning och undersökningar visar att elever har svårt att lära sig algebra i allmänhet samt att konstruera och beskriva talföljder i synnerhet. Undervisningen, som fokuserar på olika undervisningsmetoder i stället för på det som krävs för att lära, anses vara en av de viktigaste orsakerna till detta.

Studiens syfte är att, utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv, studera det som är kritiskt för elever i årskurs 3 och 4 när de ska lära sig att konstruera och beskriva vad som kännetecknar olika talföljder. I artikeln beskrivs de identifierade kritiska aspekterna och hur dessa gjordes synliga i undervisningen genom variation. Learning study användes som metod.

Resultatet visar att eleverna utvecklade förmågan att beskriva talföljder när det i undervisningen gavs möjlighet för dem att urskilja sambandet mellan talen och talens inbördes förhållande till varandra, urskilja helheten, förstå att det finns ett system mellan talen som kan varieras i oändlighet och upptäcka att talföljder kan byggas upp på olika sätt. Detta benämns i studien som kritiska aspekter.

Introduktion

Resultaten i svenska skolor har försämrats, inte minst i matematik visar TIMSS 2007 (Skolverket, 2008). Uppgifterna i TIMSS-studierna är uppdelade i fem huvudområden – algebra, geometri, mätningar, statistik och aritmetik. I 2003 års undersökning

Karin Frostfeldt Gustavsson, 1–7-lärare i svenska, engelska och SO på Ribbaskolan i Gränna.

Klara Kerekes, 1–7-lärare i matematik, NO och teknik på Ribbaskolan i Gränna, licentiand inom FontD forskarskolan, Linköpings universitet.

Birgitta Lundberg, 1–7-lärare i svenska, SO, matematik och bild på Ribbaskolan i Gränna.

Lea Erixson, mellanstadielärare på Ribbaskolan i Gränna.

var de svenska elevernas resultat genomgående sämre inom geometri och algebra än inom de andra områdena (Skolverket, 2005). Analyser av resultatet i TIMSS 2007 visar också att om medelprestationerna i de olika huvudområdena jämförs med varandra är det algebra som drar ner de svenska resultaten.

Enligt Skolverkets (2009) rapport om resultatet på TIMSS Advanced 2008 är undervisningen en viktig orsak till varför svenska elever inte lyckas lika bra i matematik som de gjorde för tio år sedan. Undervisningen i matematikämnet handlar mer om ett slags överförande av färdiga modeller och beräkningsprocedurer som presenteras i läroboken än genomgångar som leder till förståelse och lärande. Eleverna lämnas i allt större utsträckning åt att på egen hand räkna i sina matematikböcker som anger olika exempel på beräkningsprocedurer utan att beskriva i vilket sammanhang de ska användas (Skolverket, 2008). Lärare koncentrerar sig på metoder som de ska tillämpa i en undervisningssituation i stället för att fokusera på det som krävs för att lära (Carlgren & Marton, 2000). För att elever ska lära sig det vi vill att de ska lära sig måste undervisningen mer systematiskt grunda sig på olika sätt att presentera de aspekter som är kritiska för att förstå ett specifikt innehåll (Holmqvist 2006). Kullberg (2010) menar att ett gynnsamt lärande kräver fokus på relationen mellan eleven och det som han/hon ska lära sig.

Vi tyckte att detta samband var intressant och ville utveckla vår matematikundervisning för att ge eleverna möjlighet att förbättra sina kunskaper i ämnet. Genom Skolverkets satsning på matematik sökte vi, två lärare i årskurs 3 och två lärare i årskurs 4, projektpengar och fick möjligheter att utveckla våra idéer. Vi ville ta reda på hur eleverna uppfattar, förstår och tillägnar sig undervisningen i matematik eftersom vi hade uppmärksammat att eleverna inte tillgodogjort sig undervisningen så som vi hade förväntat oss. Matematikprojektet fördjupades till en learning study (Holmqvist, 2006; Kullberg 2010), en modell som har vidareutvecklats från den japanska metoden lesson study (Stigler & Hiebert, 1999).

Stigler & Hiebert (1999) jämförde i sin studie hur lärare i Hong Kong, Japan och USA bedriver matematikundervisning och fann stora skillnader i undervisningen länderna emellan. De beskrev de japanska lärarnas framgångsrika matematikfortbildning i den egna praktiken när de använder sig av lesson study. Metoden innebär en ständigt pågående förbättring av undervisningen. Det som gör den japanska modellen unik är att lärarnas kunskaper tas tillvara, utvecklas och bildar en gemensam, professionell kunskapsbas. Systemet säkerställer en gradvis förbättring av lärande över tid (Stigler & Hiebert, 1999). Detta inspirerade oss att själva på liknande sätt försöka utveckla vår matematikundervisning. I vår undersökning ville vi ta reda på vilka möjligheter till lärande vi ger elever i undervisningen. Vi ville bli bättre på att hitta det som är avgörande för eleven i lärandesituationen för att lärande ska uppstå. Vi ville också utveckla förmågan att se det som ska undervisas om – ett matematiskt innehåll – på ett nytt sätt. Hur kan innehållet under en lektion varieras för att eleverna ska upptäcka och förstå det som ska läras?

I Lgr11 (Skolverket, 2011) står det att momentet mönster är en viktig del inom matematiken och en förkunskap till algebra. I litteraturen beskrivs hur viktigt det är att arbeta med olika slags mönster och att erbjuda eleverna aktiviteter med mönster (Mouwitz, 2004; Orton & Orton, 1999; Papic & Mulligan, 2007). Mönster inom matematiken kan innebära geometriska former eller talföljder som upprepas eller förändras regelbundet (Matematik – ett kommunikationsämne, 1996). I den nya kursplanen i matematik (Skolverket, 2011) har området mönster förstärkts och placerats in under kunskapsområdet algebra i det centrala innehållet för såväl årskurs 1–3 som 4–6. Undervisningen i matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmågor att konstruera, beskriva och uttrycka talföljder och geometriska mönster (Skolverket, 2011). I vår studie har vi valt att fokusera på talföljder med naturliga tal inom talområdet 1–1 000. Vad är det vi lärare måste lyfta fram inom området talmönster för att våra elever ska få möjligheter att utveckla dessa förmågor?

Genom att använda variationsteorin fick vi möjlighet att studera sambandet mellan undervisning och lärande (Marton & Booth, 2000). Kullberg (2010) hänvisar till Kennedy som anser att detta samband är det mest komplexa och det man vet minst om i lärarens arbete. Även i den svenska skolan har ett större intresse visats för *hur* eleven lär sig medan lärandets innehåll har tagits för givet (Carlgren & Marton, 2000). För att kunna fokusera på hur innehållet i undervisningen behandlas för att eleverna ska lära sig om talföljder valde vi att genomföra en learning study. Metoden ger oss möjlighet att få syn på det som eleverna måste förstå för att kunna beskriva vad som kännetecknar olika talföljder. Vi kan studera vad eleverna erbjuds att lära under en lektion. Eftersom det finns variationer i hur saker och ting uppfattas är en förutsättning för lärande att eleverna erfar denna variation av lektionsinnehållet för att kunna generalisera och därmed förstå.

Syfte

Syftet med studien var att utifrån ett variationsteoretiskt perspektiv och genom en learning study studera, upptäcka och validera aspekter som är kritiska för elever när de ska lära sig att beskriva vad som kännetecknar olika talföljder. Studien syftade även till att beskriva hur man kan möjliggöra för eleverna att urskilja de kritiska aspekterna i undervisningen för att de ska kunna utveckla kunskap om lärandeobjektet.

De specifika forskningsfrågorna var:

- Hur skapas förutsättningar för eleverna i årskurs 3 och 4 att lära sig beskriva olika talföljder?
- Vilka är de kritiska aspekterna och hur kan de varieras?

Forskningsöversikt

I vår studie undersökte vi hur våra elever lär sig om talföljder som vi finner inom området mönster i matematiken. En talföljd är en serie av tal som upprepas eller förändras på ett regelbundet sätt (Matematik – ett kommunikationsämne, 1996). Att kunna se hur en talföljd fortsätter är en pre-algebraisk uppgift inom området mönster och dess generalisering (Algebra för alla, 1998).

Det finns en mängd olika sorters talmönster, men det är svårt att i litteraturen hitta en indelning och tydlig definition av dessa. Det vi har funnit är mer en beskrivning av ett urval av olika slags talföljder. I Analysschemat i matematik för åren före skolår 6 (Skolverket, 2009) finns följande kategorisering av talföljder:

- mönster där skillnaden mellan talen är lika: 2, 4, 6, 8, 10
- mönster där skillnaden mellan talen ökar med ett för varje steg: 1, 2, 4, 7, 11
- mönster där varje tal bildas av att det föregående talet multipliceras med två: 1, 2, 4, 8, 16
- och slutligen mönster där talen bildas genom att talen 1, 2, 3, 4 multipliceras med sig själva (Skolverket, 2009, s.34).

Berglund (2009) benämner talföljder där det följande talet konstrueras av de två föregående för *rekursiva talföljder*. Ett exempel på en rekursiv talföljd är Fibonnaccis talföljd (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 …). En annan sorts talföljd är en *aritmetisk talföljd* där varje nytt tal ökar med ett konstant värde i förhållande till det föregående talet, exempelvis 1, 4, 7, 10 … (Berglund, 2009). Det som är karakteristiskt för en aritmetisk talföljd enligt Kiselman och Mouwitz (2008) är att differensen mellan ett tal i talföljden (förutom det första) och närmast föregående tal alltid är lika stor. I vårt exempel för aritmetiska talföljder är differensen mellan talen lika med 3. En *geometrisk talföljd* är en talföljd där kvoten mellan ett tal i talföljden (förutom det första) och närmast föregående tal alltid är lika stor (Kiselman & Mouwitz, 2008). Ett exempel på geometrisk talföljd med kvoten 2 är 5, 10, 20, 40, 80 ….

I engelskspråkig litteratur benämns talföljder som *linear sequence* och *quadratic sequence* (Hargreaves m fl., 1999, s. 72 och 75) som vi skulle kunna kalla för linjära och kvadratiska talföljder. Definitionen av en linjär talföljd stämmer överens med de svenska författarnas definition av aritmetiska talföljder. En kvadratisk talföljd definieras som en talföljd där differensen av differenserna är konstant (Hargreaves m fl., 1999). I den kvadratiska talföljden 1, 2, 4, 7, 11 … bildar differensen en aritmetisk/linjär talföljd (första differensen) 1, 2, 3, 4 …, medan den andra differensen (differensen mellan differenserna) är konstant och lika med 1.

I studien används termerna aritmetisk, rekursiv, geometrisk och kvadratisk talföljd. Även begreppet *visuellt talmönster* förekommer i studien, eftersom det finns en sådan uppgift på vårt för- och eftertest. I ett visuellt talmönster får eleverna stöd i en bild och det består av ett antal figurer/komponenter där storleken på figuren/komponenten ändras succesivt utifrån en additiv struktur (Papic & Mulligan, 2007). Dessa mönster kan också vara konstruerade genom att en komponent ökar i antal medan den andra hålls konstant, vilket är fallet i den uppgift som vi använder oss av i studien.

Att arbeta med talföljder och kunna se dess delar och hur de hänger ihop är ett sätt att kunna erfara tal och siffror. Om vi vill erfara en talserie kan vi göra det på olika sätt. Vi kan erfara det som en serie med tolv ental, 5 8 1 2 1 5 1 9 2 2 2 6 eller som en talserie där skillnaden mellan talen växlar mellan tre och fyra, 5 8 12 15 19 22 26. De som erfar en serie tal på det senare sättet har en möjlighet att se regelbundenheten. För att kunna se denna regelbundenhet måste talen vara grupperade på ett särskilt sätt. En förutsättning för att hitta mönstret är att kunna gruppera talen och upptäcka strukturen i talserien (Marton & Booth, 2000).

I en brittisk studie (Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall, 1998) undersöktes vilka strategier 7–11-åringar använder för att analysera och beskriva linjära och kvadratiska talföljder. Man fann att eleverna letade efter skillnader mellan talen i talföljden, differensen mellan skillnaderna, egenskaper i skillnaden, talens egenskaper (vanligtvis jämna och udda tal) och produkter i multiplikationstabellerna. Eleverna kombinerade även talen för att få nästa tal i talföljden. En slutsats av studien är att eleverna bör erbjudas att arbeta med olika slags talföljder och utmanas med uppgifter där en och samma talföljd kan fortsätta på flera sätt, exempelvis 1, 2, 4 … som kan fortsätta med 1, 2, 4, 8, 16 … eller 1, 2, 4, 7, 11 … för att utveckla förmågan att upptäcka talföljder och generalisera denna kunskap. Att det är viktigt att eleverna erbjuds möta och arbeta med talföljder uppbyggda med olika strukturer poängterar även Frobisher och Threlfall (1999) liksom Heiberg Solem, Alseth och Nordberg (2011).

Hargreaves m fl. (1999) har gjort en studie där ett flertal elever visade god förmåga att utifrån en serie av tal kunna avgöra om det var en talföljd eller inte och beskriva denna. När eleverna skulle skapa egna talföljder och beskriva en regel för talföljdens uppbyggnad dominerade talföljder som bestod av produkterna i olika multiplikationstabeller. I en studie gjord av Zazkis och Liljedahl (2002) där lärarstudenter uppmanades skapa egna talföljder visas liknande resultat. Studenterna skapade från början aritmetiska talföljder inom lågt talområde och med multiplikativ struktur (som en multiplikationstabell). Efter ytterligare uppmaningar att ge andra förslag valde fortfarande många talföljder med en struktur utifrån en konstant skillnad mellan talen, dock inom högre talområde och talföljder där skillnaden mellan talen ökade respektive minskade.

Warren och Cooper (2007) har i en studie med åttaåringar i Australien, undersökt vad lärare kan göra för att få elever att se och beskriva visuella växande mönster. Enligt Warren och Cooper har forskning visat att de svårigheter ungdomar visar upp inom algebra härstammar från brister i den tidiga undervisningen. Om eleverna inte får stöd i form av lärares instruktioner har de svårt att hitta okända steg och positioner i växande mönster. Eleverna behöver även få hjälp med att se vad i ett växande mönster som förändras och med vilken regelbundenhet. Annars fokuserar de endast på en komponent. Barn i Australien har generellt liten erfarenhet av växande visuella mönster. Studien visar att det finns aktiviteter i klassrummet som stödjer elevernas lärande och tänkande: att använda konkret material, att mötas av specifika frågor som hjälper eleverna att generalisera och att tydliggöra förhållandet mellan mönstersekvensen och dess position i talföljden (Warren & Cooper, 2007).

De refererade studierna ger alla förslag på aktiviteter och/eller arbetssätt som kan främja utvecklingen av att upptäcka och skapa talföljder. Ingen av dem beskriver emellertid vad eleverna måste lära sig för att behärska detta, det vill säga vad som är kritiskt för att utveckla förmågan.

Teori och metod

Variationsteorin

Inom den fenomenografiska forskningen beskrivs människors kvalitativt olika sätt att uppfatta fenomen i sin omvärld.

> *Fenomenografin är en forskningsansats inom främst pedagogisk och didaktisk forskning som avtäcker innebördsteman och som för sitt berättigande förutsätter att det finns företeelser i världen som har olika innebörd för olika människor (Kroksmark, 2007).*

Variationsteorin, som har ett teoretiskt perspektiv på lärande, har vuxit fram ur fenomenografin. Medan fenomenografin intresserar sig för hur eleverna uppfattar ett lärandeobjekt så fokuserar variationsteorin på vad som är kritiskt för att utveckla ett visst kunnande eller förmåga (Marton & Booth, 2000). Enligt variationsteorin uppstår lärande först när man uppfattar omvärlden på ett nytt sätt. För att man ska kunna urskilja det nya måste vissa delar i det man ska lära vara konstanta och andra varieras (Runesson, 1999). Om man ska lära sig känna igen fåglars sång kan man först inte urskilja någon speciell, utan man hör bara fågelsång. När man sedan fått erfara att fåglar har olika läten kan man så småningom särskilja arternas unika sång.

Lärandeobjekt och kritiska aspekter är centrala begrepp inom *variationsteorin*. Lärandeobjektet är en förmåga som består av två delar, det direkta och det indirekta lärandeobjektet (Marton, Runesson & Tsui, 2004; Wernberg, 2009). Det direkta beskriver innehållet i det som lärs, alltså lärandets *vad*-aspekt. Det indirekta lärandeobjektet avser den förmåga eller färdighet som ska utvecklas, alltså *hur* eleven ska visa sin färdighet (Holmqvist, 2006). Läraren bör planera sin undervisning med hänsyn till såväl det indirekta som det direkta lärandeobjektet. Det läraren avser att undervisa om kallas det intentionella lärandeobjektet. Det som eleven sedan i praktiken får möjlighet att lära kallas det iscensatta lärandeobjektet. Den kunskap och förmåga eleven tillägnar sig under lektionen är det erfarna lärandeobjektet och kan studeras genom ett eftertest (Marton, Runesson & Tsui, 2004). Vi kommer senare i texten att sätta dessa begrepp i relation till metoden learning study, som vi har använt oss av i studien.

För att nå framgång i undervisningen måste läraren ta reda på vilken uppfattning av lärandeobjektet som den lärande har. Lärandeobjektet måste avgränsas för att vi ska veta vad som ska ingå och inte ingå i detsamma (Holmqvist, 2006). I vår studie började vi med att inventera vilka olika slags mönster vi kände till. Vi insåg tidigt att vi var tvungna att avgränsa oss och valde lärandeobjektet *att kunna beskriva vad som kännetecknar olika talföljder.*

Begreppet kritiska aspekter används för att beskriva det som är nödvändigt att få syn på för att lära sig något nytt. För att få syn på och förstå lärandeobjektet måste de kritiska aspekterna hittas av läraren genom konstruktion av för- och eftertest, analyser av för- och eftertestens resultat samt analyser av filmade lektioner. Beroende på elevernas tidigare erfarenheter av lärandeobjektet kan de kritiska aspekterna vara olika för olika elever. För att lärande ska möjliggöras måste läraren synliggöra de kritiska aspekterna för eleverna genom ett mönster av variation, så att det kan kopplas till elevens erfarenhet av lärandeobjektet (Kullberg, 2010; Marton, Runesson & Tsui, 2004).

De fyra mönster av variation som Marton, Runesson och Tsui (2004) beskriver är: kontrast, generalisering, separation och fusion. Kopplat till vår studie skulle dessa teoretiska begrepp kunna beskrivas på följande sätt:

- *Kontrast*: För att veta vad något är behöver man också veta vad det inte är. När vi i vår learning study använder lärandeobjektet talföljd så jämförs det med en talserie som inte bildar något mönster för att synliggöra motsatsen, exempelvis 1, 2, 4, **9**, 11, 16 ...
- *Generalisering*: För att förstå det specifika behöver man uppleva det genom olika representationer. En aspekt, som inte förändrar fenomenet men visar på en bredd, ska varieras. För att förstå vad en talföljd är måste man erfara olika typer av talföljder. Ett flertal exempel på olika sorters talföljder presenterades (en sorts talföljd åt gången) för att urskilja viktiga egenskaper och drag hos dessa talföljder (exempelvis aritmetiska, geometriska, kvadratiska och rekursiva talföljder), samt vad som inte är relevant (exempelvis vilket tal talföljden börjar med, riktningen på talföljden).
- *Separation*: För att kunna erfara en specifik aspekt av något och kunna separera denna aspekt från andra aspekter, måste den specifika aspekten varieras medan de andra aspekterna förblir invarianta. Till exempel det första talet i flera talföljder är samma tal men differensen är unik för varje talföljd, **3**, 6, 9, 12, 15 ..., **3**, 4, 6, 9, 13 ..., **3**, 6, 15, 24 ...
- *Fusion*: För att lärande ska uppstå behöver eleven ta hänsyn till alla kritiska aspekter och erfara dem samtidigt. När en talföljd ska beskrivas måste eleven ha tillägnat sig alla kritiska aspekter för att kunna erfara dem samtidigt i en ny situation.

Metod

I början av 2000-talet utvecklade Ferenc Marton och några kollegor i Hong Kong learning study ur lesson study (Holmqvist, 2006; Kullberg, 2010). Learning study är en modell för lärares kompetensutveckling samt en ansats för forskning i praktiken med en lärandeteori som grund (Carlgren, 2012). I en learning study samarbetar lärarna och en forskare/handledare när de planerar, analyserar och reviderar lektioner. Lektionerna filmas för att kunna analyseras. Lärarna söker ta reda på ett lärandeobjekts kritiska aspekter och det är också det centrala i metoden. För- och eftertestet används för att ta reda på elevens förståelse, hitta de kritiska aspekterna, skapa det intentionella lärandeobjektet och se hur det iscensattes. Lärarna analyserar tillsammans med en handledare på ett systematiskt sätt vad som blir skillnaden i elevernas lärande vilket hela tiden står i fokus (Holmqvist, 2006; Kullberg, 2010).

I figuren på sid 71 presenterar vi en learning study-cykel med förtydligande från vår studie.

1. Val av lärandeobjekt

Cykeln inleds med att läraren väljer en förmåga eller en kunskap som eleven ska utveckla. Vårt lärandeobjekt är att kunna beskriva vad som kännetecknar olika talföljder.

2. Förtest

För att ta reda på elevernas förståelse av lärandeobjektet konstrueras ett förtest. Genom en analys av det synliggörs kritiska aspekter av lärandeobjektet.

3. Lektionen planeras av lärarna tillsammans.

Lärarna planerar och diskuterar hur aspekterna bör urskiljas och varieras.

4. Lektionen genomförs

En av lärarna genomför lektionen som filmas.

5. Eftertest

Efter några dagar genomförs ett eftertest för att se vad eleverna lärde sig.

6. Lärarna ser den inspelade lektion och reviderar den.

Filmen analyseras och med information från för- och eftertest revideras lektionen för att ev bidra med nya kritiska aspekter.

Fig 1. Fritt efter en modell av Runesson (2011).

Urval

Det empiriska materialet till vår studie har samlats in på skolan och i klasserna där vi arbetar. Det är fyra elevgrupper som har deltagit i studien – två grupper i år 4 och två i år 3. Elevantalet var till en början 62 stycken, 26 i år 3 och 36 i år 4. Efter bortfall medverkade 53 elever i studien, 24 i år 3 och 29 i år 4. Dessa elever genomförde både förtest och eftertest samt deltog i en lektion. De elever som inte medverkade vid alla eller något moment utgör studiens bortfallsgrupp. I studien redovisas endast resultat från de elever som deltagit vid samtliga datainsamlingstillfällen samt en learning study-lektion.

Analys

Det material som samlats in för analys är förtest, eftertest, sammanställningar av resultat på för- och eftertest i excelformat, videodokumentation och anteckningar från analys av filmer. Analyser i studien har skett vid ett flertal tillfällen och genomfördes i form av samtal och diskussioner gemensamt i gruppen med de fyra lärarna och en handledare från högskolan, med variationsteorin som analysverktyg. Förtestens resultat, videodokumentation från lektionerna och eftertestens resultat har studerades för att identifiera de kritiska aspekter som var avgörande för eleverna att lära sig om talföljder samt för att se vad som togs för givet och hur innehållet i undervisningen varierades (Fig. 2). Efter varje lektion har de kritiska aspekterna validerats genom att analysera elevernas svar på eftertestet, för att försäkra att dessa verkligen är kritiska för lärandeobjektet.

Den första analysen genomfördes efter förtestet. Rättningen av förtestet gjordes av respektive lärare efter gemensamma riktlinjer. Varje uppgift poängsattes för varje rätt delsvar i respektive talföljd. Detta gjordes med syftet att se vad som är kritiskt för eleverna för att lära sig konstruera och beskriva olika talföljder och inte i syfte att räkna antal rätta respektive felaktiga svar efter en rättningsmall. Resultaten fördes in i exceldokument gruppvis. Inom gruppen redovisades resultaten på elevnivå och på uppgiftsnivå. I förtestet analyserade vi även elevernas förmåga att beskriva talföljder med egna ord genom att undersöka elevernas ordval i deras beskrivningar. Kvaliteterna i deras egna beskrivningar ingick också i analysen. Vid analysen av förtestet identifierades några kritiska aspekter inom talföljder och mönster. Den gav oss ett underlag för att planera lektion 1.

Efter genomförd lektion 1 och eftertest gjordes analysen på samma sätt som efter förtestet. För att se om eleverna har utvecklat förmågan att beskriva talföljder med egna ord listades och jämfördes elevernas beskrivningar på för- och eftertest för att se om de nu använde fler matematiska begrepp.

I analysen av videodokumentationen iakttog vi hur våra kritiska aspekter varierades och hur vårt lärandeobjekt iscensattes och varit möjligt att erfara. I analysen av lektionen fokuserade vi på vilka möjligheter eleverna gavs för att utveckla sina kunskaper kring talföljder. Vi uppmärksammade och diskuterade också de ord läraren använde i lektionen och på vilket sätt ordvalet påverkade elevernas förståelse för lärandeobjektet. Varje film analyserades gemensamt vid flera tillfällen för att upptäcka nya kritiska aspekter eller enskilda elevers öppningar för variationer.

Inför varje ny lektion analyserades eftertesten och filmerna noga enligt beskrivningen ovan, för att eventuellt upptäcka nya kritiska aspekter och för att ge oss möjlighet att variera lärandeobjektet för eleverna.

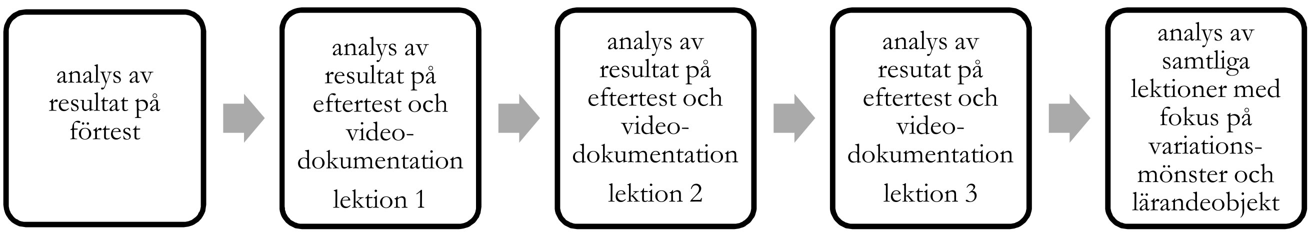

Fig 2. Analysens arbetsgång och innehåll.

Resultat

I detta avsnitt presenteras resultatet av förtestet som låg till grund för det fortsatta arbetet i vår learning study. Sedan följer resultat av eftertester och analyser av studiens tre lektioner. Därefter presenteras de kritiska aspekterna med exempel, och resultatdelen avslutas med hur kritiska aspekter varierades under studiens lektioner.

Resultat av förtest

Vårt förtest innehöll talföljder och mönster av olika slag. Uppgifterna testade om eleverna hade förståelse för aritmetiska talföljder med upprepad addition (43, 46, 49 …), aritmetiska talföljder med upprepad subtraktion (35, 29, 23 …), talföljder som kan bli både geometriska och kvadratiska (6, 12 …), rekursiva talföljder där de två föregående talen kombineras för att få nästa tal i talföljden (1, 1, 2, 3, 5, 8 …), geometriska talföljder där varje tal bildas av att det föregående talet multipliceras med två (10, 20, 40, 80 …) och talföljder som varierar i riktning (talföljden läses lodrätt). Det innehöll också ett visuellt talmönster med ett växande och ett konstant inslag (○●○●●○●●?? ●●●●), visuellt talmönster med figurtal där mönstret växer systematiskt (se bild nedan) och hur man generaliserar numeriska utsagor (6+6=?, 16+6=?, 26+6=?). På tre av uppgifterna uppmanades eleverna förklara hur talföljderna är uppbyggda för att se deras förmåga att beskriva vad som kännetecknar talföljderna.

Visuellt talmönster med figurtal

Resultatet från förtestet visade att ingen fråga klarades av alla elever i någon grupp. De uppgifter som minst antal elever hade klarat är rekursiva talföljder, de talföljder som varierar i riktning samt visuella talmönster med ett växande och ett konstant inslag.

Resultaten på de uppgifter där eleverna skulle beskriva talföljder med egna ord visade att kvaliteten i deras beskrivningar skiljde sig åt beroende på om eleven själv konstruerat uppgiften eller om det var en på förhand given talföljd, samt hur frågan är ställd. De talföljder som eleverna skapat själva har de till övervägande del kunnat beskriva med ord och/eller matematiska symboler. Ungefär hälften av eleverna använde ord som hänger samman med multiplikationstabellen vid den egna konstruktionen, exempelvis ”uppbyggd med sjuans tabell”, ”med femmans produkter”, ”3 hopp”. Några elever gjorde aritmetiska talföljder och beskrev dessa med hjälp av uttryck som ”18 +2, 20+2, 22+2”, ”plus 11”, ”minus 15”. Elevernas beskrivningar av den geometriska talföljden visade att de hade bristande förmåga att beskriva vad som kännetecknar talföljden, alltså att varje nytt tal i talföljden bildas genom dubblering av det föregående talet. Uppgiften som testade hur eleverna kan generalisera numeriska utsagor, och uppmanade dem att se sambanden och att beskriva mönstret, beskrevs av eleverna utifrån mönstret i entalen och tiotalen i summan.

Analysen av resultaten från förtesten gav oss insikter i att eleverna inte har förmågan att beskriva talföljder, förutom de aritmetiska talföljderna. De första fyra kritiska aspekterna, *upptäcka relationen mellan talen i talföljden, upptäcka relationen mellan talen och hela talföljden, upptäcka det som inte syns* och *att upptäcka att talföljder kan variera i riktning* framkom i analysen (se sida 76 och 77 för detaljerad beskrivning av kritiska aspekter). Dessa kritiska aspekter gav oss grunden till det intentionella lärandeobjektet i den första lektionen. Eftersom eleverna visade god förståelse för uppgiften mönster med figurtal och eftersom fördjupandet i generaliserande av numeriska utsagor skulle vidga vårt lärandeobjekt, togs dessa bort från eftertestet.

Resultat av eftertest och analys lektion 1

Lektion 1 bjöd eleverna på många exempel med aritmetiska talföljder som låg inom talområdet 0–70. Lärandeobjektet att *kunna beskriva vad som kännetecknar en talföljd* gjorde att mycket tid ägnades åt att skriva en regel till varje talföljd för att ge eleverna förutsättningar att kunna beskriva talföljder med egna ord. Läraren gav på detta sätt eleverna ord de själva kunde använda för att beskriva en talföljd. Detta blev en ”utantillregel” och läraren styrde under lektionen in eleverna på det ”rätta”. Läraren använde orden ökar/minskar för att beskriva talföljden. Elevaktiviteterna bestod av att enskilt skapa egna talföljder som provades på kamraterna. Läraren gick runt under aktiviteten för att hitta olika exempel på talföljder men eleverna följde i stort sett lektionsmallen. Lektionen innehöll inga egentliga utmaningar för eleverna utan hölls inom ett relativt lågt talområde och med få variationer på talföljder. Exempel: 6, 13, 20, 27 … och regeln som beskriver denna talföljd: talföljden ökar med sju hela tiden.

Under lektion 1 iscensatte vi de fyra kritiska aspekterna som vi hittat genom förtestet. Resultatet på eftertestet efter lektion 1 visade att eleverna inte kunnat erfara lärandeobjektet genom dessa kritiska aspekter tillfredsställande då bara 55 procent av eleverna hade minst 75 procent rätt. Det var tre frågor som alla elever svarade rätt på. Vi upptäckte att vi tog för givet att eleverna kunde generalisera utifrån de talföljder vi presenterade. Analys av videolektionen visade att viss *generalisering* iscensattes då tre olika varianter av talföljder presenterades, aritmetiska talföljder och kvadratiska talföljder samt talföljder som varierar i riktning. Variationsmönstret *separation* iscensattes då vi varierade talen i de aritmetiska talföljderna med konstant skillnad och då vi började flera talföljder med samma tal men varierade storleken på skillnaden mellan talen i de kvadratiska talföljderna. *Fusion* iscensattes när vi synliggjorde mönstret mellan talen och i hela talföljden. *Kontrast* iscensattes inte alls under lektionen.

Resultatet och analysen av lektion 1 och eftertestet gav oss grunden till planeringen av lektion 2. Vi ersatte den kritiska aspekten *att upptäcka att talföljder kan variera i riktning* med en ny, *att upptäcka talföljders olika uppbyggnad* och planerade en lektion med variationsmönstret kontrast och arbete inom högre talområden. Lektion 2 skulle också innehålla mer interaktion mellan eleverna för att möjliggöra en diskussion mellan elever med olika kunskaper om olika sätt att beskriva vad som kännetecknar olika talföljder.

Resultat av eftertest och analys lektion 2

I lektion 2 ägnades betydligt kortare tid till aritmetiska talföljder än i lektion 1. Olika exempel på samma sorters talföljder visades samtidigt, där exempelvis skillnader mellan talen i en aritmetisk talföljd var samma medan första talet i talföljden varierade (generalisering). För att möjliggöra för eleverna att erfara den specifika aspekten att det finns en relation mellan talen i talföljden och hela talföljden arbetade vi med talföljder där första talet var invariant medan differensen var unik för varje talföljd (separation). Talområdet var betydligt högre än i lektion 1. Det ägnades mycket mindre tid till att skriva regler till talföljderna, det sammanfattades kort efter färdigt moment. Läraren använder orden *skillnad mellan talen* för att beskriva talföljderna. Elevaktiviteterna var fler i lektion 2 och det pågick interaktion mellan eleverna under elevaktiviteten. Eleverna uppmanades att konstruera talföljder parvis och under aktiviteten var läraren aktiv genom att gå runt bland eleverna och leta exempel som öppnade för variation av talföljder. Dessa exempel lyftes i lärarens fortsatta aktivitet. I lektion 2 fick eleverna sortera ett antal olika talföljder i olika kategorier. Genom att dela ut flera olika typer av talföljder och också serier av tal utan mönster fick eleverna möjlighet att uppmärksamma likheter och skillnader mellan olika talföljder samt mellan serier av tal som bildar, respektive inte bildar, en talföljd (kontrast och fusion). Eleverna hade kategorierna skrivna på tavlan, men läraren betonade inte dessa kategorier tydligt. Vid slutet av lektion 2 lyfte läraren fram de talföljder som skulle uppmärksammas för att ge eleverna en ännu större möjlighet att få syn på de kritiska aspekterna.

Efter lektion 2 var resultatet bättre än efter lektion 1, en större andel elever (77 procent av eleverna hade minst 75 procent rätt) hade visat att de lärt sig om talföljder och närmat sig lärandeobjektet än vad det var efter lektion 1. Men det var fortfarande bara tre frågor som alla elever klarade av. Analysen av lektion 2 visade att alla då aktuella kritiska aspekter iscensattes. Eleverna arbetade inom ett högre talområde och interaktionen elev/lärare och elev/elev var större. Läraren tog vara på de variationer som kom från eleverna. Den nya aktiviteten, att sortera givna talföljder av olika slag, öppnade upp för alla mönster av variation: kontrast, generalisering, separation och fusion.

När vi analyserat lektion 2 insåg vi att lektion 3 endast krävde få förändringar. Dessa bestod av att eleverna i sorteringsövningen fick ett papper med fyra kategorier av talföljder inskrivna. Eleverna skulle sortera sina talföljder under rätt rubrik. Dessa kategorier är: *Skillnaden mellan talen är lika, Varje nytt tal bildas genom att det föregående talet multipliceras med två (dubblering), Skillnaden mellan talen ökar för varje steg/tal* och *Ingen talföljd eftersom det inte är något mönster mellan talen.*

Resultat av eftertest och analys lektion 3

I lektion 3 följer momenten samma modell som i lektion 2 utom i den sista elevaktiviteten och avslutningen av lektionen. Eleverna gavs större möjlighet att diskutera och sortera talföljder för att upptäcka variationer av de kritiska aspekter vi ansåg viktiga för att synliggöra lärandeobjektet. Vid övningen med sorteringen av olika talföljder fick eleverna ett papper med färdiga kategorier, som läraren tydligt betonade, vilket bidrog till en tydligare sortering. I elevaktiviteten hade läraren en aktiv roll genom att med hjälp av frågor och samtal styra in eleverna på de kritiska aspekter vi ville att de skulle få syn på.

På resultatet av eftertestet efter lektion 3 fann vi den största andelen elever (alla elever hade minst 75 procent rätt), jämfört med eftertest efter lektion 1 och 2, som utvecklat kunskap om lärandeobjektet. Samtidigt fann vi också här de största skillnaderna i resultat mellan för- och eftertest när det gäller antal rätt på respektive uppgift. Ingen fråga på förtestet klarades av alla elever medan det var 14 frågor i eftertestet som alla elever svarade rätt på.

Kritiska aspekter

Det eleven behöver upptäcka och tillägna sig för att förstå lärandeobjektet är de kritiska aspekterna (Marton, Runesson & Tsui, 2004; Wernberg, 2009). Efter att ha analyserat för- och eftertest samt vår videodokumentation efter lektion 1 hittade vi ursprungligen de fyra första kritiska aspekterna. Den fjärde togs bort redan efter den första lektionen eftersom analysen visade att det inte var en kritisk aspekt. Inför den andra lektionen utökades våra kritiska aspekter med den femte och efter den tredje framkom ytterligare en.

Sammanfattningsvis fann vi följande vara kritiskt för elevernas lärande inom området talföljder:

- *Upptäcka relationen mellan talen i talföljden*, vilket innebär att urskilja sambandet mellan talen och talens inbördes förhållande till varandra. Eleven ska alltså förstå att det inte är en uppräkning av tal utan att det händer något mellan talen.
  Exempel: 2 (+2), 4(+2), 6(+2), 8(+2) ...
- *Upptäcka relationen mellan talen och hela talföljden*, vilket innebär att eleverna behöver urskilja helheten, att det inte är tillräckligt att iaktta en mindre del av den ordnade mängden tal i talföljden. Eleven tittar bara på relationen mellan de två sista talen i talföljden och upptäcker då inte hela talföljdens uppbyggnad.
  Exempel: 1 (+1), 2(+2), 4(+3), 7(+4), 11(+5), 16(+6) ... där skillnaden mellan talen ökar med ett för varje tal. Om eleven endast ser vad som händer mellan de två sista talen kan talföljden missuppfattas och fortsätta med en konstant skillnad på 5.
  Exempel: 1, 2, 4, 7, 11, 16, **21**, **26** ...
- *Upptäcka det som inte syns, mellanrummen*, vilket innebär att eleverna måste få syn på det som händer i talföljden. Eleven måste förstå att det finns en regelbundenhet, ett mönster, ett system mellan talen som kan varieras i oändlighet.
  Exempel: 42 (+5) 47 (+10) 57 (+15) 72 (+20) 92 ... där skillnaden mellan talen ökar med 5 för varje nytt tal.
- *Upptäcka att talföljder kan variera i riktning*, vilket innebär att talföljden kan skrivas exempelvis horisontellt, vertikalt, i cirklar, i rutor, med tomma platser mitt i, med kommatecken emellan och lodrät.
  Exempel: 8, 15, , , 36,
- *Upptäcka talföljders olika uppbyggnad*, vilket innebär att talföljder inte alltid är aritmetiska, exempelvis 7, 14, 21, 28. Eleverna måste upptäcka att talföljder kan vara uppbyggda på andra sätt såsom kvadratiska talföljder exempelvis 42, 43, 45, 48, 52 ... eller geometriska talföljder exempelvis 20, 40, 80, 160, 320 ...

där varje tal bildas genom att det föregående talet multipliceras med ett visst tal (i detta exempel med två).

- *Upptäcka skillnaden mellan talen i talföljden*, vilket innebär att förstå att skillnaden mellan två tal i talföljden inte är detsamma som antalet tal emellan två tal på tallinjen.
  Exempel: 10, 15, 20, 25, 30 ... där skillnaden mellan talen är 5 men antalet tal på tallinjen är 4.

Analysen av förtestet gav oss fyra tänkbara kritiska aspekter till lärandeobjektet *att beskriva vad som kännetecknar olika talföljder*. Efter varje ny lektionsanalys förändrades den kommande lektionen för att ge större möjlighet för eleverna att upptäcka lärandeobjektet, och kritiska aspekter togs bort eller nya lades till. För att eleverna skulle kunna urskilja de kritiska aspekterna ville vi skapa en variation kring talföljderna i lektionen. Variationen skulle hjälpa eleverna att urskilja de kritiska aspekterna och på så sätt närma sig lärandeobjektet.

Diskussion och slutsatser

Elevernas resultat på förtestet visar att deras förmåga att fortsätta och beskriva olika typer av talföljder var begränsade. Under arbetets gång har vi insett förtestets begränsningar när det gäller utformandet av testet såväl språkligt som innehållsmässigt. Trots att vi lärare var noga med att följa samma struktur vid genomförandet i våra grupper upptäckte vi efteråt att det ändå fanns skillnader. Om exempelvis någon elev hoppade över en uppgift uppmanades han/hon att försöka en stund till medan andra elever inte fick samma möjlighet. Uppgiften *Gör nu en egen talföljd. Den ska vara lagom svår för dina klasskamrater*, anser vi, begränsade eleverna med ordet ”lagom” i stället för att utmana dem. Ytterligare en begränsning var att förtestet gav alltför få tillfällen att beskriva olika typer av talföljder, för att ge en tydlig bild av elevernas förmåga att beskriva dessa. Vi kunde, trots allt, utifrån testet urskilja tänkbara kritiska aspekter som efter lektionen verkligen visade sig vara kritiska aspekter.

När vi i början av studien planerade lektion 1 begränsade vi omedvetet elevernas möjligheter att upptäcka olika typer av talföljder. Vi trodde då att om vi erbjöd några få variationer av talföljder och arbete inom ett lågt talområde, 0–70, skulle det underlätta för eleverna att tillägna sig lärandeobjektet. Eftersom förtestet visade att eleverna saknade förmågan att beskriva vad som kännetecknade olika talföljder ägnades mycket tid, och stort fokus, under lektion 1 åt att ge eleverna färdiga ord och uttryck som ett slags överförande av en modell. Färdiga modeller kan begränsa elevens eget tänkande vilket kan leda till att tilltron till den egna förmågan minskar (Skolverket, 2008). Trots att vi under studiens gång läst forskning och undersökningar kring matematikundervisning som bekräftar detta, skapade vi lektion 1 med färdiga modeller och upptäckte vårt misstag först senare i studien.

En elev frågade under lektion 2 om man var tvungen att göra en talföljd som liknade lärarens exempel vilket var en aritmetisk talföljd. När eleven fick höra att det är fritt fram att konstruera vilken talföljd som helst gav eleven ett exempel på kvadratisk talföljd som läraren kunde ta vara på i nästa moment i undervisningen. Detta har gjort oss uppmärksamma på hur viktigt det är att lyfta elevers öppningar för variation och uppmuntra till eget tänkande och tilltro till sin egen förmåga i lärandeprocessen.

Resultaten efter lektion 1 visade att eleverna inte fått utveckla sina kunskaper nämnvärt när det gäller att beskriva vad som kännetecknar en talföljd. Detta anser vi har flera orsaker: brist på interaktion mellan lärare-elev/elev-elev, hur lektionstiden disponerades mellan lärarledd genomgång och elevaktivitet samt ett lektionsinnehåll som inte utmanar eller visar på tillräcklig variation inom området talföljder. Eleverna gavs inte möjlighet att urskilja de kritiska aspekterna och erbjöds inte alla mönster av variation. Resultatet efter lektion 2 visade att åtgärder av ovanstående brister fick önskad effekt.

Marton och Booth (2000) skriver att vi erfar en talserie på olika sätt, antingen som en serie med ett antal siffror eller en talserie där vi ser ett mönster enligt vilket talserien är uppbyggd. Detta stämmer överens med hur våra elever såg de olika talföljderna vi arbetade med. Vi kunde också se att de elever som såg en serie tal på det senare sättet även hade visat förmågan att se regelbundenheten i en talföljd, precis som Marton och Booth (2000) beskriver. Det var betydligt fler elever som kunde se en regelbundenhet i talföljderna efter att vi i undervisningen möjliggjort att upptäcka relationen mellan talen i talföljden (den första kritiska aspekten). Eleverna har fått se och själva prova att gruppera tal på ett särskilt sätt och urskilja sambandet mellan talen och talens inbördes förhållande till varandra.

Vi kan se vissa likheter mellan några av de kritiska aspekterna som vi har hittat och de strategier som eleverna använder för att upptäcka talföljder och generalisera sina kunskaper i studien gjord av Hargreaves med flera (1998). Fyra av de sex beskrivna strategierna i Hargreaves med flera (1998) studie handlar om att eleverna söker efter talens inbördes relationer i talföljden, vilket innefattas av vår första kritiska aspekt som benämns *Upptäcka relationen mellan talen i talföljden*. En av de aktiviteter i klassrummet som stödjer elevernas lärande och tänkande beskrivna i Warrens och Coopers (2007) studie är aktiviteten där de får hjälp med att se vad i ett växande mönster som förändras och med vilken regelbundenhet. Elever som inte fick denna hjälp fokuserade endast på en komponent i det växande mönstret. Den andra kritiska aspekten i vår studie, *Upptäcka relationen mellan talen och hela talföljden*, innebär att eleverna behöver urskilja helheten då det inte är tillräckligt att fokusera bara någon del av den ordnade mängden tal i talföljden för att kunna beskriva den. Om eleven exempelvis bara iakttar relationen mellan de två sista eller två första talen i talföljden blir det svårt för henne/honom att upptäcka mönstret som talföljden är uppbyggd efter.

Vi har funnit att det inte räcker att förstå och se att det händer något mellan talen och att urskilja sambandet mellan talen (första kritiska aspekten). Eleven måste förstå att detta samband är ett regelbundet mönster som kan varieras i oändlighet för att utveckla sin förmåga att konstruera och beskriva talföljder. I studien sammanfattar vi detta i den tredje kritiska aspekten, *Upptäcka det som inte syns – mellanrummen*. Även den sjätte kritiska aspekten, *Upptäcka skillnaden mellan talen i talföljden*, skiljer vår studie från de andra som vi beskrivit tidigare. För att erhålla en förståelse av lärandeobjektet måste eleverna förstå att skillnaden mellan två tal i talföljden inte är detsamma som antalet tal emellan två tal på tallinjen.

I samtliga studier som vi refererar till kan man se tendensen att elever/studenter använder sig av produkterna i multiplikationstabellerna när de skapar egna talföljder (Hargreaves, Shorrocks-Taylor & Threlfall, 1998; Hargreaves m fl., 1999; Zazkis & Liljedahl, 2002). Detta är något som även våra elever använde sig av, särskilt i förtestet. Resultaten på eftertesten efter den andra och tredje lektionen visade att det förekom en betydlig rikare variation av olika talföljder i elevernas exempel.

Avslutande reflektioner

Under analysarbetet kunde vi konstatera att de två sista lektionerna blev mycket bättre jämfört med den första. Under arbetets gång har våra kunskaper om variationsteorin fått oss att se på sambandet mellan undervisning och lärande med nya ögon. Vi har utvecklat förmågan att se lärandeobjektet på ett nytt sätt (Holmqvist, 2006). Trots att vi från början var så nöjda med den första lektionen, insåg vi efter ingående analyser av inspelad lektion och elevernas resultat på eftertestet, att lektionen radikalt behövde förändras. Insikten om detta fick oss som lärare att konstatera hur många misslyckade ”förstalektioner” vi har bakom oss. Kunskaper om variationsteorin har hjälpt oss att se på lärandeobjektet med nya ögon och utforska elevernas lärande i relation till undervisningens innehåll. Vi har lärt oss att se hur elevernas lärande reflekterar vår undervisning (Runesson, 2011, personlig kommunikation) och vi har blivit mer och mer medvetna om hur mycket vi har kvar att lära.

Sättet på vilket lärandeobjektet presenteras, varieras och bearbetas under lektionen har stor betydelse för resultatet. Eleven måste få erfara en variation av lärandeobjektet så att det blir möjligt att generalisera, det vill säga att använda sin kunskap i nya situationer. Vår studie har inneburit att vårt förhållningssätt har skiftat fokus från elevens förutsättningar till lärarens sätt att undervisa kring lärandeobjektet. Det viktigaste är inte metoder, arbetssätt eller grupper utan hur vi som lärare möjliggör lärande för eleverna.

Frågorna som vi ställer oss är: Vad måste eleverna få syn på för att lärande ska uppstå? Vilka tidigare erfarenheter av lärandeobjektet har eleverna? Fick eleverna möjlighet att lära det som var avsett att lära eller gav lektionen ett annat resultat? Tar vi som lärare tillvara elevernas egna öppningar för variation? Det sistnämnda kan ge oss lärare exempel på elevers missuppfattningar och få oss att upptäcka eventuella nya kritiska aspekter. Under studien har vi blivit mer uppmärksamma på elevernas egna öppningar för variation vilket visade sig i lektion 2 och 3. Fokus under våra kollegiala diskussioner ligger numera kring vad i det aktuella lärandeobjektet vi ska behandla i undervisningen, vilken förmåga eleverna ska utveckla samt vilka förkunskaper och uppfattningar eleverna har. Vad tar vi som lärare för givet om elevernas förmågor och kunskaper som hindrar lärandet (Marton & Booth, 2000)?

Referenser

Algebra för alla. (1998). Nämnaren. Institutionen för ämnesdidaktik. Göteborgs Universitet.

Berglund, L. (2009). *Tal och mönster.* Lund: Studentlitteratur.

Bryman, A. (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder.* Malmö: Liber Ekonomi.

Carlgren, I. (2012). The learning study as an approach for ”clinical” subject matter didactic research. *International Journal for Lesson and Learning Studies,* Vol. 1 Iss: 2, s. 126–139.

Carlgren, I. & Marton, F. (2000). *Lärare av i morgon*. Stockholm: Lärarförbundets förlag.

Frobisher, L. & Threlfall, J. (1999). Teaching and Assessing Patterns in Number in Primary Years. I A. Orton. (red.) *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 84–103). London: Cassell.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. & Threlfall, J. (1998). Children´s strategies with Number Patterns. *Educational Studies*, 24:3, s. 315–331.

Hargreaves, M., Threlfall, J., Frobisher, L. & Shorrocks-Taylor, D. (1999). Children´s Strategies with Linear and Quadratic Sequences. I A. Orton. (red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 67–83). London: Cassell.

Heiberg Solem, I., Alseth, B. & Nordberg, G. (2011). *Tal och Tanke – matematikundervisning från förskoleklass till årskurs 3*. Lund: Studentlitteratur.

Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan. Learning study som skolutvecklingsmodell.* Lund: Studentlitteratur.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, Göteborgs Universitet.

Kroksmark, T. (2007). *Fenomenografisk didaktik – en didaktisk möjlighet.* Didaktisk Tidskrift Vol. 17, No. 2–3.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Professional insights gained and shared by teachers of mathematics.* Gothenburg Studies In Educational Sciences 293. http://hdl.handle.net/2077/22180.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, F., Runesson, U. & Tsui, A. B. M. (2004). The Space of Learning. I Marton, F. & Tsui, A. B. M. (red). *Classroom discourse and the space of learning* (s. 3–40). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum.

Matematik – ett kommunikationsämne. (1996). Nämnaren. Institutionen för ämnesdidaktik. Göteborgs Universitet.

Mouwitz, L. (2004). *Bildning och matematik. Rapport 2004:29* R. Högskolverket Falköping: Elander Gummessons AB.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. I A. Orton. (red.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (s. 104–120). London: Cassell.

Papic, M. & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. I J. Watson, & K. Beswick (red.), *Mathematics: Essential research, essential practice. (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Hobart),* Vol. 2, s. 591–600. Adelaide: MERGA.

Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* (Göteborg Studies in Educational Sciences, 129). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, U. (2011). Lärares kunskapsarbete – exemplet learning study: *Forskning om undervisning och lärande:* Stockholm: Stiftelsen SAF i samverkan med Lärarförbundet.

Runesson, Ulla. Professor i pedagogik vid Högskolan för lärande och kommunikation, Jönköping. (2011). *Föreläsning "Samproducerad kunskap – Av lärare för lärare".* HLK, 16 augusti.

Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: Free Press.

Skolverket. (2005). *En sammanfattning av TIMSS 2003.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala matematiska begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer.* Rapport 323. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2009). *TIMSS Advanced 2008. Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv.* Rapport 336. Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2009). *Analysschema i matematik för åren före årskurs 6*. www.skolverket.se

Skolverket. (2011). *Lgr11. Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet, 2011.* Stockholm: Fritzes.

Warren, E. & Cooper, T. (2007). Generalizing the Pattern Rule for Visual Growth Patterns: Actions that Support 8 Year Olds' Thinking. *Educational Studies in Mathematics,* 67(2), s. 171–185.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna.* Umeå: Umeå Universitet.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The Tension Between Algebraic Thinking and Algebraic Notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, s. 379–402.