HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Elevers uppfattningar av operationer med negativa tal

Patrick Smedberg

Anton Uhlin

Examensarbete 15 hp
Inom Lärande

Lärarutbildningen
Vårterminen 2013

Handledare
Anna-Lena Ekdahl

Examinator
Mikael Segolsson

HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE OCH
KOMMUNIKATION (HLK)
Högskolan i Jönköping

Examensarbete 15 hp
inom Lärande
Lärarutbildningen

Vårterminen 2013

SAMMANFATTNING

Patrick Smedberg, Anton Uhlin

Elevers uppfattningar av operationer med negativa tal

Antal sidor: 28

Negativa tal har inte alltid varit lika självklara som de är idag. En elev som aldrig tidigare mött negativa tal, än mindre räknat med dem, kommer troligtvis anse att det är ologiskt att tala om −2 äpplen. Forskning visar på att det finns en mängd svårigheter och missuppfattningar om operationer med negativa tal. En del av dessa missuppfattningar grundas i den tvetydighet som finns beträffande minustecknets funktioner - då minustecknet både används som operator och som beteckning för negativitet. Den negativa talmängden är en del av kursplanen i matematik för årskurs 4 till 6. Vanligtvis är det dock först i årskurs 8 som elever undervisas om operationer med negativa tal.

Syftet med denna studie är att undersöka hur elever i årskurs 7 uppfattar addition och subtraktion av negativa tal. Detta ämnar vi att uppfylla genom att besvara följande frågeställning; På vilka kvalitativ skilda sätt uppfattar elever operationer med negativa tal?

Som grund för urvalet genomfördes ett förtest varifrån åtta elever valdes ut till att delta i kvalitativa intervjuer. Dessa intervjuer resulterade i att fem kvalitativt åtskilda beskrivningskategorier kunde urskiljas; *det finns inget under noll*, *eliminering av termer*, *omvända räkneoperationer till vänster om noll*, *positiva och negativa tal samarbetar ej* samt *positiv eller negativ differens*. Vi hoppas att denna studie kan bidra till en ökad förståelse om vilka olika elevuppfattningar det finns av operationer med negativa tal.

Sökord: matematik, negativa tal, grundskola, fenomenografi, addition, subtraktion

Postadress	**Gatuadress**	**Telefon**	**Fax**
Högskolan för lärande och kommunikation (HLK) Box 1026 551 11 JÖNKÖPING	Gjuterigatan 5	036–101000	036162585

Innehåll

1 Inledning

I kommentarmaterialet till den internationella undersökningen TIMSS[1] 2007 framgår det att svenska elever har svårigheter med beräkningar av negativa tal (Skolverket, 2010). Negativa tal kan vara särskilt utmanande för elever när de stöter på dem för första gången. En tänkbar anledning till detta är att negativa tal inte går att tolka på samma sätt som positiva tal, och är inte heller det sätt som elever är vana vid att tolka tal på. Exempelvis är det inte möjligt att betrakta negativa tal som en konkret samling av ett antal objekt (Skott, Hansen, Jess & Schou, 2010). Likaså blir de båda räkneoperationerna multiplikation och division mindre greppbara med negativa tal än med positiva tal. En annan tänkbar anledning till de olika svårigheter som finns rörande negativa tal är de brister som finns inom de metaforer och förklaringsmodeller som används för att illustrera operationer med negativa tal. Det är långt ifrån oproblematiskt att konstruera en modell som ter sig logisk och intuitiv för samtliga fall med negativa tal inom de fyra räknesätten.

Vid införandet av negativa tal finns risk för förvirring på grund av vissa begrepps tvetydighet. Minustecknet symboliserar både en operation och att ett tal är negativt. Detta gör att när en elev stöter på ett negativt tal, exempelvis -2, kan eleven tolka detta som en del i en uträkning, snarare än ett tal i sig. En annan tvetydighet är betydelsen av ett tals storlek. Vilket tal är störst, -8 eller 3? Här finns utrymme för tolkning, då båda talen kan vara störst beroende på om man menar talens *värde* eller *storlek* (Kilhamn, 2011), där 3 har störst värde medan -8 har störst storlek. Detta ligger till grund för många av de missuppfattningar som finns beträffande negativa tal.

Som två blivande matematiklärare har vi funnit ett särskilt intresse för operationer med negativa tal. Vid elevers första möta med negativa tal, kommer de tolkningar och uppfattningar de har om den naturliga talmängden $(0, 1, 2, 3$ ...) tvingas att förändras. Negativa tal ska enligt kursplanen i matematik introduceras i årskurs 4 till 6, och operationer med dessa ska introduceras i årskurs 7 till 9 (Skolverket, 2011). Baserat på samtal med undervisande lärare i årskurs 7 till 9 samt granskning av matematikböcker, framgår att det vanligtvis är i årskurs 8 som operationer med negativa tal introduceras. Vårt intresse ligger i att undersöka vilka skilda uppfattningar elever i årskurs 7 har om operationer med negativa tal, innan de undervisats om hur dessa utförs och kan tolkas. Vi hoppas i och med denna studie att bidra till en ökad kunskap om elevers uppfattningar om det matematiska fenomenet operationer med negativa tal.

[1] Trends in International Mathematics and Science Study

2 Bakgrund

Inledningsvis kommer negativa tal och minustecknets olika funktioner definieras och presenteras. Därefter kommer det ges en redogörelse av negativa tals framväxt och tidigare forskning om taluppfattning, negativa tal och operationer med dessa. Slutligen kommer tidigare forskning om elevers missuppfattningar om operationer med negativa tal att presenteras.

2.1 Negativa tal, minustecknet och deras historiska framväxt

Negativa tal

Till mängden negativa tal hör alla de tal som är mindre än noll, exempelvis -5. De positiva och de negativa heltalen utgör tillsammans talmängden heltal, vilken vanligtvis betecknas $\mathbb{Z}$. Begreppet *negativ* härstammar från det latinska begreppet *nega*, som betyder förneka eller upphäva. Ett negativt tal kan skrivas på flera olika sätt, men vanligast är att de betecknas på ett av följande sätt; -a, (-a) eller $^{-}$a (Crowley & Dunn, 1985; Kilhamn, 2011).

Minustecknets olika betydelser

Minustecknet har inom matematik flera olika funktioner. Det kan både användas som operator för att beteckna en subtraktion, men även som symbol för att beteckna ett tals negativitet (Skott et al., 2010). Minustecknets olika användningsområden kan leda till tolkningssvårigheter, då det kan vara svårt att skilja mellan de olika användningsområdena. Ett problem finns även i den notation som används för att beteckna ett negativt tal, då exempelvis alla tal i $-4 - (-3) = -1$ är negativa. Det är dock endast en av termerna vars negativitet betecknas med en parentes (Kilhamn, 2011). För att reda i denna problematik, utvecklade Vlassis (2004) begreppet negativitet för att illustrera de olika sidor som finns beträffande minustecknet och dess användning. Vlassis beskriver att minustecknet har tre olika funktioner; en *unär funktion*, vilken är den funktion minustecknet har då ett tal ska betecknas som negativt. En *binär funktion*, är då minustecknet används som en operator, det vill säga som symbol för subtraktion. Minustecknet används även i egenskap av en *symmetrisk funktion*, som till viss del påminner om den binära funktionen, men istället används för att beteckna en omvänd operator, alternativt en invers. Adderas ett tal med sin invers elimineras talet och resulterar således i talet noll, exempelvis $5 + (-5) = 0$. Fortsättningsvis kommer den unära funktionen benämnas som *minustecknet som beteckning för ett negativt tal* och den binära funktionen som *minustecknet som operator*.

Den historiska framväxten av negativa tal

Negativa tal förekom tidigt i ett flertal av de kulturer som är upphovsmakare till den matematik som vi använder idag. De tidigaste notationerna om negativa tal som man känner till idag är från Han-dynastin i Kina (200 f.kr. – 200 e.kr.). Under denna tid förekom dock ingen generell beteckning för negativa tal, utan positiva tal illustrerades med röda stavar medan negativa tal illustrerades med svarta stavar (Crowley & Dunn, 1985). Trots att matematiker länge varit medvetna om de negativa talens existens, kom det att dröja länge innan de blev helt accepterade av matematiker världen över. Diofantos verkade under 200-talet i antikens Grekland, och i hans skrift *Arithmetica* förekom ekvationer som $4x + 20 = 0$. Lösningen till en sådan ekvation betraktades dock som absurd (Persson, 2007). Matematiken i Europa och framförallt i antikens Grekland kretsade vid den här tiden kring geometri, och tal användes främst som redskap för att beräkna och illustrera storheter av exempelvis ytor och sträckor (Kilhamn, 2011). Ett tal var därför tvunget att ha en geometrisk mening, vilket medförde att de negativa talen inte sågs som meningsfulla. En linje utan längd var ingen linje, och därför utnyttjades noll som en representation för ingenting.

Det var först när algebran utvecklades i de österländska kulturerna som de negativa talen började nå en allt högre grad av acceptans inom matematiken. I skrifter av den indiske matematikern Brahmagupta från år 628, har man funnit att man till varje tal infört ett nytt tal som kom att benämnas som ett negativt tal. (Crowley & Dunn, 1985). Adderades ett tal med dess negativa motsvarighet resulterade detta i summan noll. I skriften *Bramasphuta-siddhanta* formulerade Brahmagupta regler för hur tecknet på en summa och en differens bestäms då additionen eller subtraktionen utförs med rationella tal.

> [The sum] of two positives [is] positive, of two negatives, negative; of positive and negative [the sum] is their difference; if they are equal, it is zero… [If] a smaller [positive] is to be subtracted from a larger positive, [the result] is positive; [if] a smaller negative from a larger negative, [the result] is negative; [if] a larger from a smaller their difference is reversed – negative becomes positive and positive negative. (Mumford, 2010, s. 123-124);

Enligt dessa regler är det storleken och ordningen på de rationella talen som avgör tecknet på summan eller differensen. Med talen tecken avses om talet är positivt eller negativt. Det kom dock att dröja fram till 1500-talet innan algebra hade sin storhetstid i de österländska kulturerna, och det var först då som negativa tal fick en allt högre status inom matematiken. Matematiker var under 1500- och 1600-talet ense om negativa tals existens, men avvisade dem som lösningar till ekvationer, och benämnde istället dessa som *falska rötter*. Det var först under 1800-talet som den formella definitionen av negativa tal nedtecknades (Crowley & Dunn, 1985).

2.2 Styrdokument

I kursplanen för matematik (Skolverket, 2011) finns beskrivet när elever ska introduceras för olika begrepp, talmängder och beräkningsmetoder. Den utveckling som ska ske beträffande elevers kunskap om tals egenskaper och beräkningar med dessa beskrivs på följande sätt;

- I årskurs 1-3 behandlas de naturliga talens egenskaper och centrala metoder för beräkningar med dessa.
- I årskurs 4-6 kommer talmängden att utvidgas för att omfatta den rationella talmängden, beräkningar av tal berör dock endast de naturliga talen.
- I årskurs 7-9 kommer talmängden att utvidgas ytterligare, för att omfatta hela den reella talmängden. Här kommer även metoder för beräkningar av reella tal behandlas.

Då negativa tal är en delmängd till den rationella talmängden, ska elever enligt kursplanen introduceras till dessa i årskurs 4 till 6. De metoder för beräkningar som ska behandlas inom dessa årskurser berör dock endast de naturliga heltalen, det vill säga de positiva heltalen samt talet 0. Operationer med negativa tal ryms inom den reella talmängden, vilket medför att det är inom årskurs 7-9 som elever ska undervisas om operationer med negativa tal.

2.3 Tidigare forskning

Taluppfattning

”En god taluppfattning ger en intuitiv känsla för tal och hur de tolkas och används” (Reys & Reys, 1995, s. 28). *Taluppfattning* är en kunskap och förtrogenhet som utvecklas via erfarenheter och inhämtande av kunskap. Ett karakteristiskt drag inom taluppfattning är en strävan efter att skapa mening åt situationer och att relatera tal till sammanhang (Reys & Reys, 1995). McIntosh, Reys och Reys (1992) har tagit fram flera olika aspekter som tillsammans utgör grunden för en god taluppfattning. Några av dessa är *förståelse för tals betydelse och storlek*, *kännedom av operationers innebörd och funktion* och *strategier för beräkning och antalsbestämning*. Enligt McIntosh (2008) är det främst i två sammanhang som elever kommer i kontakt med negativa tal i vardagen; *temperaturer* och *övertrasserade saldon på bankkonton*. Detta medför att alla, om än i varierande grad, behöver ha en god taluppfattning om negativa tal. Det är dock nödvändigt att elever har en god taluppfattning om dessa för att vidare kunna utvecklas inom matematiken (McIntosh, 2008). Enligt McIntosh (2008) finns det framförallt tre kända svårigheter och missuppfattningar beträffande negativa tal; *vad som är stora och små negativa tal*, *sammanblandning av negativa tal och tal mindre än 1* och *sammanblandning av minustecknet som beteckning för en räkneoperation och minustecknet som beteckning för ett negativt tal*.

Det är dock problematiskt om elevers uppfattningar rörande de naturliga talen direkt överförs till att även gälla de negativa talen. Beträffande talens storlek kan elever uppfatta det som märkligt att säga att -3 är ett *större tal* än -10, då det kan upplevas motsägelsefullt till hur negativa tal används i vardagen. Angående temperaturer är exempelvis -10 °C *kallare* än -3 °C, medan -10 är ett *mindre* tal än -3 (McIntosh, 2008).

En svårighet som Kilhamn (2011) funnit beträffande elevers uppfattningar om negativa tal är att elever har svårt att skilja på, samt identifiera de olika typer av värden ett specifikt tal har; det vill säga talets *värde* (value) samt talets *storlek* (magnitude). Varje enskilt tal har både ett värde och en storlek, där varje tals värde är unikt. Detta kan enklast liknas vid respektive tals placering på en tallinje, där exempelvis (-3) har ett mindre *värde* än 3, det vill säga att $(-3) < 3$. Varje enskilt tal har även en storlek, men till skillnad från talets värde är denna storlek inte unik för endast ett tal, utan två olika tal kan ha samma storlek. Ett tals storlek bestäms av talets avstånd till 0. Detta medför att talet -3 har samma storlek som talet 3, då båda talen är belägna lika långt från noll (Kilhamn, 2011). Inom matematiken betecknas tals storlek vanligtvis med absolutbeloppstecken, vilket medför att ovanstående exempel kan skrivas $|-3| = |3|$. De två möjligheter att betrakta tals värden är något som kan få konsekvenser på hur elever opererar med negativa tal. En sådan konsekvens är att elever inte nödvändigtvis uppfattar att en beräkning av skillnaden mellan två tals *värden* alltid resulterar i en *storlek*. Hur denna skillnad beräknas skiljer sig dock beroende på om det är två positiva, två negativa eller ett positivt och ett negativt tal som ska jämföras (Kilhamn, 2011).

Elevers missuppfattningar om operationer med negativa tal

Med tanke på den omstridda utveckling och uppfattning matematiker historiskt sett haft om negativa tal, ligger det nära till hands att tro att det fortfarande är ett svårt och komplicerat område för dagens matematiker och elever (Skott et al., 2010). Svårigheter inom matematiken bygger många gånger på att de representationsformer och metaforer som används inom undervisningen enbart är välfungerande i vissa specifika fall. En metafor som är välfungerade i vissa fall, kan i andra fall leda till svårigheter för elevers kommande matematiska förståelse. Ett sådant exempel är begreppet *tal* (Skott et al., 2010). De representationer lärare presenterar beträffande tal är i nästintill samtliga fall konkreta, där ett tal representerar ett eller flera konkreta föremål. Denna representation är dessutom logisk när det kommer till att utföra räkneoperationer, då det på ett logiskt och konkret sätt går att addera, subtrahera, multiplicera eller dividera dessa konkreta föremål. Denna uppfattning blir dock ett hinder när elevernas förståelse av tal ska komma att utvidgas till att även omfatta negativa tal, där det blir omöjligt att använda konkreta föremål som representation (Skott et al., 2010). Som en följd av denna svårighet, väljer lärare många gånger att utnyttja alternativa representationsformer och metaforer för att åskådliggöra och illustrera negativa tal. En vanlig representationsform är tallinjen (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2011). En tallinje är en ”rät linje där varje punkt på linjen svarar mot precis ett reellt tal och där omvänt varje reellt tal svarar mot precis en punkt på linjen med bevarande av ordningen” (Kiselman & Mouwitz, 2008, s. 61). Det är även möjligt att använda sig av en tallinje för att konkretisera aritmetiska beräkningar (Beswick, 2011).

Att använda metaforer som verktyg i undervisningen är dock inte helt oproblematiskt. Vid operationer med negativa tal saknas en metafor som kan illustrera hur negativa tal förhåller sig till både positiva och negativa tal inom både addition, subtraktion, multiplikation och division (Otten, 2009). Kilhamn har i sin avhandling *Making sense of negative numbers* (2011) följt en klass från årskurs sex till årskurs nio. Syftet med studien var att undersöka hur elevernas taluppfattning kom att utvecklas, då talområdet inom matematikundervisningen utvidgades till att omfatta både positiva och negativa tal. Kilhamn fann att somliga metaforer som används inom undervisningen inte avspeglas i den matematiska struktur som föranligger metaforen. En vanlig metod som används för att illustrera en subtraktion mellan ett negativt och ett positivt tal är att använda liknelser med *pengar och skulder*. En skuld på 100 kronor är *större* än en skuld på 50 kronor. Den matematiska representationen för dessa skulder talar dock om ett omvänt fall, där -100 är *ett mindre tal* än -50 (Kilhamn, 2011). Kilhamn menar att många av de svårigheter som idag finns beträffande negativa tal delvis härstammar från den utveckling, och skilda uppfattning, som matematiker haft om negativa tal under dess historiska utveckling. Negativa tal sågs tidigt som en motsatt kvantitet. De var dock begränsade till situationer där negativa kvantiteter var meningsfulla. I de fall då geometriska bevis och beräkningar ingick, var det inte meningsfullt att tala om negativa sträckor och areor. Ett negativt tal beskrevs därför länge som *ett tal som ska subtraheras*, vilket medförde att det var svårt att särskilja de två betydelser som finns beträffande minustecknet (Kilhamn, 2011). När tallinjen infördes för negativa tal var linjen tudelad, där noll var en utgångspunkt för två linjer åt motsatta håll, istället för en enad linje där alla tal hade samma status i förhållande till varandra. Kilhamn (2011) fann liknande uppfattningar bland elever beträffande en tallinje bestående av både en positiv och negativ del som tillsammans hade noll som minsta värde längst till vänster. De båda linjerna var graderade på samma sätt, förutom att den negativa axeln hade ett minus-tecken som beteckning för negativitet intill varje tal. De negativa talen blev på så vis större åt höger på tallinjen, och nollan betraktades som ett absolut noll.

I en studie gjord av Widjaja, Stacey och Seinle (2011) utnyttjades en tallinje graderad med både positiva och negativa heltal. Eleverna ombads att placera ut negativa decimaltal, såsom $-2{,}2$. En uppfattning som Widjaja et al. (2011) fann var att eleverna betraktade $-2{,}2$ som ett större tal än -2. De placerade därför $-2{,}2$ strax till höger om -2, vilket egentligen motsvarar värdet $-1{,}8$. Eleverna hade därmed en uppfattning om att talen alltid blir större åt höger på tallinjen, vilket förvisso är en korrekt uppfattning, dock förväxlas talets värde med talets storlek. Detta var även något som Kilhamn (2011) fann i sin studie.

Kilhamn (2011) fann en utbredd missuppfattning om att minustecknet endast betecknar en subtraktion, och att eleverna därmed inte såg att minustecknet även används för att beteckna en negativitet. Vlassis (2002; 2004; 2008) har i flera separata studier studerat elevers missuppfattningar om minustecknets olika funktioner då negativa tal och subtraktioner förekom i linjära ekvationer. I den studie Vlassis publicerade 2002 var syftet att undersöka elevers missuppfattningar och svårigheter med *balansmetoden* som lösnings-metod för linjära ekvationer. Vlassis fann att det främst var de uppgifter där negativa termer och subtrak-tioner förekom som vållade problem för eleverna. Det var främst två större missuppfattningar som Vlassis fann i denna studie; dels att eleverna hade svårigheter med att avgöra vilken tillhörighet minustecknet hade, samt en svårighet i att förenkla de termer som bestod av både en variabel och en negativ koefficient (Vlassis, 2002). En av uppgifterna som eleverna ombads beräkna var $2 - 3x + 6 = 2x + 12$. Här hade ele-verna många gånger svårt att avgöra minustecknets funktion i vänsterledet. Den vanligaste uppfattningen var att minustecknet var en operator, som medförde att eleven betraktade $3x$ termen som positiv, vilket i förlängningen ledde till att eleven subtraherade $2x$ från båda leden vilket sedermera resulterade i att väns-terledet förenklades till $8 - 1x$ istället för det korrekta $8 - 5x$ (Vlassis, 2002). Eleverna hade således svårig-heter att se att minustecknet i detta läge hade två funktioner; dels som operator, men även som beteckning för

$3x$-termens negativitet. En tänkbar orsak till detta torde enligt Vlassis vara användandet av balansmetoden som lösningsmetod till sådana ekvationer. I balansmetoden lär sig elever att betrakta likhetstecknet som en balansvåg, där det är tillåtet att subtrahera samma tal från båda sidorna. Eleverna övergeneraliserade där-med metoden att man även kan eliminera negativa termer på samma sätt som man eliminerar positiva termer, det vill säga via subtraktion av motsvarande termer i båda leden.

I en senare studie fann Vlassis (2008) ytterligare två svårigheter beträffande minustecknets funktioner. Dels då två minustecken kommer på en följd, såsom när man sätter in lösningen $x = -1$ i ekvationen i $4 - x = 5$. I uttrycket $4 - (-1) = 5$ betraktade eleverna båda minustecknen som operationella (Vlassis, 2008). Detta leder även till den andra svårighet som Vlassis fann; att eleverna inte kunde se att ett och samma minustecken kan skifta funktion inom en och samma uppgift. Ett sådant skifte sker exempelvis i den nyss nämnda ekvationen, $4 - x = 5$. Inledningsvis betraktas minustecknet som en operator, men efter det att eleven subtraherat 4 från båda leden kommer eleven istället få en ekvation där minustecknet istället utgör en beteckning för x-termens negativitet; $-x = 1$ (Vlassis, 2008). Eleven fortsätter dock att betrakta minustecknet som operationellt, men då det inte längre utförs någon beräkning i vänsterledet är detta en inkorrekt uppfattning.

3 Syfte

Syftet med denna studie är att undersöka hur elever i årskurs 7 uppfattar addition och subtraktion av negativa tal. Detta ämnar vi att uppfylla genom att besvara nedanstående frågeställning:

- På vilka kvalitativ skilda sätt uppfattar elever operationer med negativa tal?

4 Metod

Inledningsvis kommer studiens forskningsansats att beskrivas. Därefter följer en presentation om studiens genomförande samt hur datamaterialet analyserats. De etiska ställningstaganden som studien tagit hänsyn till beskrivs och kapitlet avslutas med en metoddiskussion.

4.1 Fenomenografisk forskningsansats

Fenomenografi är en kvalitativ forskningsansats som syftar till att undersöka hur människor *uppfattar* särskilda fenomen, företeelser eller objekt i den verklighet som de lever i. Begreppet fenomenografi härstammar från de grekiska orden *fenomeno* och *grafi*, som tillsammans betyder *beskriva det som visar sig* (Alexandersson, 2006).

Fenomenografi är varken en metod eller en teori, även om den innehåller drag av båda. Fenomenografi är mer av en ansats för att kunna hantera vissa typer av forskningsfrågor. De företeelser som fenomenografin är utarbetad för att undersöka är främst fenomen som har med lärande och pedagogik att göra (Marton & Booth, 2000). Tanken är att undersöka på vilka skilda sätt något uppfattas, genom att kategorisera uppfattningar i olika beskrivningskategorier. Det är alltså uppfattningar av objekt som står i fokus, inte i essentiell mening *vad* eller *hur* själva fenomenet är, utan på vilka skilda sätt det uppfattas vara (Larsson, 1986). Beskrivningskategorierna är resultatet av en fenomenografisk studie (Kihlström, 2007). De olika beskrivningskategorierna är beskaffade på ett sådant sätt att en uppfattning som ryms inom en kategori inte ryms inom någon annan kategori. Det är dock viktigt att påpeka att det är uppfattningarna som kategoriseras och inte personerna, därför kan en och samma person ha olika uppfattningar som faller under olika kategorier. Den samlade mängden beskrivningskategorier utgör utfallsrummet, och inom detta utfallsrum ryms alla sätt att erfara fenomenet i fråga i den aktuella urvalsgruppen (Marton & Booth, 2000).

Eftersom fenomenografiska studier bygger på en liten grupp respondenter, kan beskrivningskategorierna inte sägas gälla för hela populationen, men beskrivningskategorierna täcker in samtliga uppfattningar som finns inom gruppen av respondenter. Gruppen av respondenter bör dock väljas på ett sådant sätt att en så stor bredd av uppfattningar erhålls, för att utfallsrummet ska vara så representativt som möjligt för populationen (Marton & Booth, 2000). Urvalet utgör därför en väsentlig del inom fenomenografiska studier. Den vanligaste datainsamlingsmetoden i en fenomenografisk studie är kvalitativa intervjuer (Kihlström, 2007).

4.2 Kvalitativ intervju

I enlighet med fenomenografin har datainsamlingen inom denna studie genomförts via kvalitativa intervjuer (Marton & Booth, 2000). Kvalitativa intervjuer är konstruerade på ett sådant sätt att det inte finns några fasta svarsalternativ på intervjufrågorna, och inte heller ett på förhand tänkbart svarsutrymme (Alexandersson, 2006). Huvudintresset och tonvikten i intervjuerna ligger i att undersöka respondenternas egna uppfattningar om vad som är viktigt vid en beskrivning av händelser, mönster och beteenden (Bryman, 2011).

Kvalitativa intervjuer kan variera från att vara *öppna* och *semistrukturerade* till att vara *välstrukturerade*. (Alexandersson, 2006). Inom semistrukturerade intervjuer, vilket denna studie utgått från, har forskaren en intervjuguide bestående av förhållandevis specifika teman, till vilka respondenterna har en frihet att utforma svaren på det sätt som de själva vill. Denna intervjuguide behöver inte följas strikt, då frågorna inte måste komma i den ordning de står i intervjuguiden utan kan anpassas till respektive intervju. Det är även tillåtet att ställa frågor som inte ingår i intervjuguiden om dessa anknyter till något som respondenten sagt (Bryman, 2011).

4.3 Genomförande

Som ett steg i urvalsprocessen konstruerades ett förtest vars syfte var att finna respondenter till intervjuerna. Testet bestod av sex uppgifter och totalt elva deluppgifter (se bilaga 2). För att säkerställa förtestets kvalité utfördes ett pilottest i en grupp med 9 elever. Efter pilottestet gjordes en mindre revidering av förtestet. Enligt egna erfarenheter introduceras operationer med negativa tal vanligtvis i årskurs 8, vilket även urvalsgruppens lärare verifierade. Eftersom denna studie ämnar undersöka elevers uppfattningar av operationer med negativa tal innan eleverna undervisats om det, kom urvalet att bestå av två elevgrupper från årskurs 7.

Förtesten ägde rum i de båda elevgruppernas ordinarie klassrum och under ordinarie lektionstid. Testen utfördes enskilt utan hjälpmedel och tog cirka femton minuter att genomföra. Förtestet var konstruerat så att eleverna fick möjlighet att redovisa sina uträkningar samt nedteckna motiveringar till de uppgifter som så krävde. Vi var båda närvarande under hela genomförandet av testen i båda grupperna, och fanns på så vis till hands för eventuella frågor som kunde tänkas uppkomma under testen. De frågor som ställdes besvarades dock på ett sådant sätt att de inte påverkade elevens resultat. En sådan fråga uppkom exempelvis på uppgift $7-(-2)$, där en elev frågade vad parentesen i uttrycket betydde. Frågan besvarades med att eleven själv fick avgöra vad de kunde tänkas betyda, och att vi inte kunde bistå med mer hjälp än så.

När förtesten utförts gjordes en noggrann genomgång av resultatet. Urvalet utgör en viktig roll inom fenomenografiska studier, då huvudmålet är att finna och identifiera kvalitativt skilda uppfattningar av ett specifikt fenomen. Som följd av detta var det därför önskvärt att välja ut förtest vars svar och motiveringar bidrog till en stor variationsbredd. Från de insamlade testen valdes åtta elever med tillsynes skilda uppfattningar av operationer med negativa tal ut för intervju. Då de inledande deluppgifterna var sådana att eleverna enbart behövde redovisa svar, varierade inte svaren till dessa deluppgifter i någon större utsträckning. Exempelvis var typsvaren till uppgiften $3-10=7$ eller $3-10=-7$. Uppgift 2c) var den uppgift där flest skilda beskrivningar redovisades, då eleverna ombads att ge ett eget exempel på en verklig situation där $-5-6$ används som beräkning. Denna var en av de uppgifter där eleverna med egna ord fick beskriva en operation med negativa tal och kom att utgöra en grund för urvalet. Då vi ville försäkra oss om att de åtta utvalda eleverna var lämpliga att intervjua, fördes en diskussion med respektive lärare. Samtliga lärare, vårdnadshavare och utvalda elever samtyckte till intervju.

En intervjuguide konstruerades bestående av sex huvudteman (se bilaga 3). I enlighet med Kvale och Brinkmann (2009) var dessa huvudfrågor korta och enkla. De åtta elevernas förtest kom delvis att användas under planeringen av varje enskild intervju, då tre deluppgifter från förtestets första uppgift samt elevernas egna svar på uppgift 2*c*) kom att lyftas under intervjuerna. Samtliga intervjuer genomfördes i enskilda grupprum med en intervjuare och en elev, vilket gjordes för att skapa ett så gott intervjuklimat som möjligt. För att öka förutsättningarna att få med relevant data från intervjuerna valde vi att spela in dessa (Kvale & Brinkmann, 2009). Innan varje intervju ombads eleven att ge sitt medgivande till att intervjun spelades in. Under inledningen av respektive intervju betonades det att eleven hade rätt att avbryta sin medverkan när helst denne vill, och att det var elevens egna resonemang och tankebanor kring negativa tal som var av intresse, inte om eleven svarade rätt eller fel på uppgifterna. Eleverna delgavs även information om att deras namn inte skulle förekomma varken i bearbetningen av intervjuerna eller i någon del av studiens slutprodukt. Längden på intervjuerna varierade mellan 31 och 56 minuter.

Transkriberingen av respektive intervju påbörjades samma dag som de utförts och slutfördes senast dagen efter. Samtliga inspelningar lyssnades igenom flera gånger för att undvika eventuella feltolkningar och därtill även försäkra att utskrifterna var av en hög kvalité, så som Bryman (2011) rekommenderar. Intervjuerna transkriberades ordagrant, där även eventuella pauser och talspråk noterades. Kroppsspråk, gester och andra kommunikationssätt noterades i de fall de upplevdes påverka det berörda innehållet i utsagan, exempelvis när någon elev med pekar på ett specifikt tal eller uttryck som samtidigt inte uttalas. För att öka läsbarheten och förståelsen i studien har dock de pauser som inte upplevs påverka innehållet i det eleven säger tagits bort. Eventuella tveksamheter och pauser som kommer till en följd av att eleven påbörjat säga något, men sedan ångrar sig och fortsätter i ett annat spår, har dock tagits med i citaten. En längre paus kommer i resultatet att betecknas '[paus]', medan en kortare paus skrivs som '…'. Beteckningen '[…]' används för att indikera att ett segment av transkriptionen inte presenterats i citatblocket. Detta gjordes för att det berörda segmentet varken tillför eller förändrar innehållet av utsagorna. I de fall då matematiska symboler och siffror uttalas, skrivs dessa företrädelsevis ut med ord. I vissa fall skrivs matematiska uttryck också ut med siffror och symboler inom hakparentes, för att tydliggöra vilket uttryck som avses. Då det förekommer gester eller andra kommunikationssätt som inte kan tas upp via en ljudinspelning, kommer detta anges inom hakparentes i anslutning till den berörda utsagan. Under transkriberingen avpersonifierades all data och för att underlätta analysprocessen numrerades intervjuerna mellan 1 och 8. Denna numrering återges dock inte i transkriptionsutdragen i resultatet, eftersom det är uppfattningarna och inte eleverna som kategoriseras, varpå den kvantitativa aspekten är irrelevant.

4.4 Analys

Analys av intervjuer som gjorts med en fenomenografisk forskningsansats kan delas in i fyra faser (Alexandersson, 2006);

- skapa bekantskap med data och skapa ett helhetsintryck
- uppmärksamma likheter och skillnader i utsagorna
- kategorisera uppfattningar i beskrivningskategorier
- studera den underliggande strukturen i kategorisystemet

Den första fasen inleddes under transkriberingen av intervjuerna. Tillsammans läste vi igenom samtliga transkriptioner och lyssnade samtidigt på inspelningarna från respektive intervju för att skapa oss en tydligare bild av dess innehåll. Eventuella feltolkningar och alternativa tolkningar till det eleverna uppgav under intervjuerna diskuterades även. Fas två inleddes genom att likheter och skillnader i elevernas utsagor uppmärksammades och meningsbärande enheter, som vidrörde studiens dåvarande två forskningsfrågor, markerades. Respektive intervju sammanfattades genom att samtliga meningsbyggande utsagor extraherades till ett annat dokument. Här kom fas tre att påbörjas, då de uppfattningar som urskiljts kom att utmynna i fem beskrivningskategorier. Analysen präglades av *vad* de uttryckte att de tänkte och uppfattade, och *hur* de uppvisade detta genom ord, gester eller nedtecknade beskrivningar. Under arbetet med beskrivningskategorierna fördes ständigt diskussioner om huruvida varje enskild utsaga tillhörde endera kategori. Fas fyra påbörjades innan det att fas tre var färdigarbetad, då det under diskussionerna om huruvida en utsaga hör till en beskrivningskategori eller inte, även medförde diskussioner om *vad* det är som utgör respektive kategori.

4.5 Etiska ställningstaganden

Enligt vetenskapsrådet (2002) finns det fyra etiska ställningstaganden som man måste ta hänsyn till då man utför intervjuer. Dessa är; *informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet* och *nyttjandekravet.* All elevmedverkan i både förtest och intervju har skett på frivillig basis, där eleven även fått möjlighet att avbryta sin medverkan när helst denne vill. Inför varje intervju lämnade samtliga elever, efter förfrågan, sitt samtycke till att intervjun spelades in och tillåtelse att eventuella nedskrivna lösningar från intervjuerna och förtesten skulle kunna presenteras i uppsatsen. All data har behandlats med största möjliga konfidentialitet och har lagrats i avidentifierande dokument (Bryman, 2011).

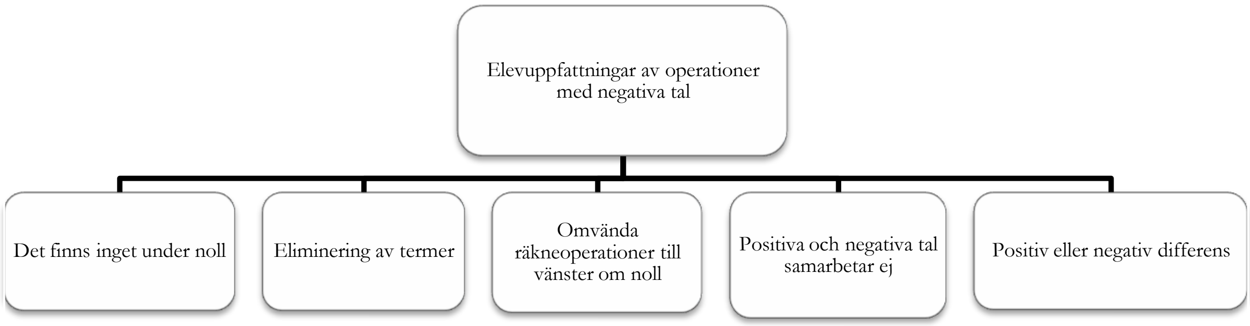
4.6 Reliabilitet och validitet

Inom kvalitativa studier handlar reliabilitet och validitet om att beskriva studiens kvalitet beträffande mätinstrument och resultat. Med validitet avses att forskare mäter det som är relevant för studien, medan reliabilitet berör att denna mätning utförs på ett tillförlitligt sätt med pålitliga instrument (Kihlström, 2007). Inom kvalitativ forskning behandlas dessa begrepp kontinuerligt under hela arbetsprocessen. För att stärka studiens validitet gjordes en kartläggning av den tidigare forskning som finns beträffande negativa tal. Kilhamn (2011) kom att utgöra en grund till konstruktionen av både förtestet och intervjuguiden då delar av de uppgifter och frågor som Kilhamn använt i sin studie kom att användas i denna studie. Dessa modifierades och anpassades dock på ett sådant sätt att de bättre kom att stämma överens med denna studies syfte. För att ytterligare stärka studiens validitet genomfördes ett pilottest, där frågorna på förtestet kontrollerades att de mätte vad som avsågs att mäta.

Studien har under hela arbetsprocessen präglats av samtal mellan oss och handledaren. Det har funnits en strävan efter att i samtliga steg återkoppla till och utgå från studiens syfte och frågeställning, för att kunna diskutera eventuella missuppfattningar och oenigheter mellan framförallt författarna. Detta är något Bryman (2011) anser vara av stor vikt för en studies tillförlitlighet. Även de urskiljda beskrivningskategorierna från intervjuerna diskuterades med handledaren för att stärka studiens reliabilitet.

5 Resultat

I detta kapitel kommer studiens resultat presenteras. Resultatkapitlet är uppdelat i fem delar där de fem beskrivningskategorier som urskilts presenteras. Nedan ges en sammanfattande representation av dessa beskrivningskategorier i form av ett träddiagram (se figur 1).



Figur 1. I figuren visas de fem beskrivningskategorier som urskilts i studien.

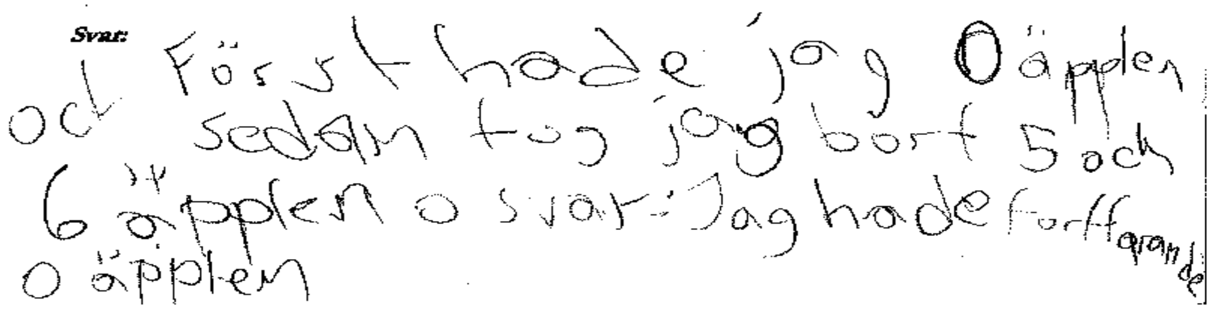
5.1 Det finns inget under noll

Beskrivningskategorin karakteriseras av en uppfattning om att det inte finns något tal mindre än noll. Under intervjuerna fick eleverna i uppgift att försöka urskilja vilka eventuella felberäkningar som andra elever gjort på de inledande frågorna av förtestet (se bilaga 2). Till elevsvaret $-14 + 4 = -18$ erhölls följande resonemang;

> *Elev: Det är ju fortfarande noll i början… och det kan ju… då blir det ingenting… för det är minus fjorton.*
> *Intervjuare: Hur menar du?*
> *Elev: Det är så här noll minus fjorton… och då är det fortfarande noll… och sen tar man fyra… och då är det fortfarande fyra… och sen när det är minus arton… då tar jag bort arton… och då är det fortfarande noll…*

Från resonemanget framgår det att eleven tolkar $-14 + 4$ som $0 - 14 + 4$. Uttrycket beräknas sedan från vänster till höger, där $0 - 14$ enligt eleven fortfarande är 0, då det inte finns något tal mindre än 0. Därefter adderas 0 med 4, vilket resulterar i att vänsterledet blir 4. Även minustecknet i -18 ses som operationellt, vilket medför att subtraktionen $4 - 18$ utförs och åter resulterar i svaret 0.

När eleverna ombads att motivera sina egna beräkningar till uppgift $-5 - 6$, nedtecknades det svar som finns att läsa i figur 2 av en elev;



Figur 2. Ett utdrag som visar ett av de elevsvar tillhörande uppgift 2c) som erhölls under förtestet.

Under intervjun ombads eleven att förklara sitt resonemang, varpå följande citat framkom;

Elev: Så här om jag… om jag har noll… så tar jag bort sex stycken av fem… nä… det går inte…
Intervjuare: Varför går inte det?
Elev: För om jag bara har noll äpplen, så kan jag inte ta bort några äpplen… för de finns ju inte…

Det som är unikt för denna kategori är att man anser att det inte existerar något tal mindre än 0. Minustecknet har endast en operationell funktion, eftersom dess funktion som beteckning för ett tals negativitet blir meningslös om negativa tal inte existerar.

5.2 Eliminering av termer

Typiska drag för denna kategori är att eleverna strävar efter att eliminera antingen en positiv eller en negativ term i räkneuppgifterna. Detta görs genom att via en addition eller subtraktion kombinera en term med dess invers, för att detta ska resultera i noll. Exempelvis är -3 invers till talet 3, då $3 + (-3) = 0$. Följande resonemang framkom då uppgift $3 - 4$ diskuterades;

Elev: För om du tar tre minus tre blir det noll, exakt… för du har tre så tar du bort tre… men om du har tre minus fyra, så tar du bort tre, men du har en över, och då blir det en under nollan, vilket blir minus ett.

Genom att utföra beräkningen i två steg, där en term blir noll, så undviks förflyttningar över noll på tallinjen. På detta sätt erhålls ett utryck som endast består av noll och antingen en positiv eller en negativ term, från vilket det är enkelt att utläsa resultatet. Ytterligare ett exempel på denna uppfattning framkom under en diskussion om uttrycket $2 - 3$;

Elev: För om man utgår från tvåan, och eftersom trean är ett tal högre än tvåan, så kan man dela trean på två, alltså inte, man ska inte skriva upp att man delar trean på två, men man får tänka i huvudet
Intervjuare: mm…
Elev: Då blir det två minus två är noll, sen fortsätter man har man ett kvar från trean, fortsätter man ett hack neråt, då blir det minus ett.
Intervjuare: Ja just det, dela upp trean på två bitar, alltså där en bit är…
Elev: Två och en bit ett.

Eleven beskriver att den trea som ska subtraheras kan ses som $2 + 1$, vilket innebär att man stegvis kan subtrahera en tvåa och därefter en etta från den första termen i det ursprungliga uttrycket $2 - 3$. Detta medför att den första termen elimineras då tvåan i uttrycket subtraheras med den tvåa som uppstod från omskrivningen av 3 till $2 + 1$. Efter denna eliminering återstår subtraktionen av den andra delen av den uppdelade trean, vilket medför att uttrycket nu betraktas som $0 - 1$, vars svar är -1. Matematiskt skulle detta resonemang kunna skrivas på följande vis; $2 - 3 = 2 - (2 + 1) = 2 - 2 - 1 = (2 - 2) - 1 = 0 - 1 = -1$.

Ett liknande resonemang förs i nedanstående citat kring hur uppgiften $3 - 10$ beräknas;

> *Intervjuare: Om du hade räknat den* [3-10] *istället då… hur hade du…?*
> *Elev: Då hade jag förmodligen gjort… tre minus tio… då börjar jag med tre minus tre, är lika med noll… och då så… tio minus tre är sju, så det är sju kvar, vilket blir minus sju*

Här beräknar eleven först tre minus tre vilket blir noll. Eleven undersöker sedan hur mycket av de tio som skulle subtraheras som återstår, och finner då att det finns sju kvar. Därefter konstateras att svaret måste bli minus sju. Med andra ord uppfattar eleven operationen som att man kombinerar den term i uttrycket som har minst storlek, med en lika stor del av den term vars storlek är störst, eftersom dessa delar tillsammans elimineras till noll. När detta är gjort återstår således endast den del av det ursprungliga uttryckets största term som inte eliminerats, vilket även utgör uttryckets resultat.

Det som är unikt för denna kategori är att eleverna uppmärksammar att ett positivt tal kan elimineras om det kombineras med dess negativa motsvarighet, och vice versa.

5.3 Omvända räkneoperationer till vänster om noll

Det karateristiska draget i denna kategori är uppfattningen om att operationers funktion bestäms av huruvida uttrycket utgår från ett positivt eller negativt tal. Räkneoperationerna blir i ett avseende omvända då operationen utgår från ett negativt tal än då de utgår från ett positivt tal. Eleverna relaterar operationer med negativa tal till sina tidigare kunskaper om operationer med positiva tal, där en addition resulterar i ett tal *längre från noll* och en subtraktion resulterar i ett tal *närmre noll*. Vid operationer med negativa tal blir dessa regler omvända, vilket innebär att en addition resulterar i ett tal *närmre noll* och en subtraktion i ett tal *längre från noll*. Kategorin präglas av resonemang om förflyttningar och placeringar utmed en imaginär tallinje. Talet 0 utgör gränsen mellan den positiva och den negativa sidan av tallinjen. En elev uttryckte följande om varför $-14 + 4 = -10$ är den korrekta uträkningen till uppgift $1b$) (se bilaga 3);

Elev: Eftersom man… man befinner ju sig minus… vilket betyder att plus blir tekniskt sett minus… när du befinner dig där…
Intervjuare: Hur menar du…?
Elev: Om det är minus fjorton… om man skriver ett plus… när det är minus här… i början…
då blir det plus… baklänges… eftersom du ska ju tillbaka till noll, för att komma upp över nollan… i plus… egentligen… […]… *vilket betyder att plus blir som ett minus…*[paus]… *vilket skulle säga att fjorton plus fyra* $[14 + 4]$ *skulle räknas som fjorton minus fyra* $[14 - 4]$… *vilket blir minus tio…*

Enligt elevens utsaga är det den inledande termen som avgör vilken sida av tallinjen man förhåller räkneoperationerna till. Då den inledande termen är negativ kommer detta att påverka operationerna i uttrycket så att addition blir som subtraktion, och subtraktion blir som addition. Efter detta behandlas talen i uttrycket, utan att ta hänsyn till talens tecken. Detta innebär att $14 + 4$ nu istället räknas som $14 - 4$, vilket blir 10. Första termen i det inledande uttrycket indikerade att operationen utförts på den negativa sidan om tallinjen, vilket påverkar det slutgiltiga resultatet av uttrycket, som även detta återfinns på den negativa sidan om tallinjen. Därför anser eleven att -10 är det korrekta svaret på uttrycket.

Till samma uppgift som ovanstående resonemang erhållits från, framkom följande resonemang under en annan intervju. Eleven inleder med att resonera om vad det är som gör att -18 inte är det korrekta svaret, och istället erhålls följande resonemang om att -10 rimligtvis måste vara det korrekta svaret;

Elev: Den kan ha tänkt att man tar… att man plussar på fyra på minus fjorton, vilket blir… för fjorton plus fyra är, utan minus, arton… men man… för jag tänker alltid att det är tvärt om, att när man plussar på något så blir det närmare nollan, än… om du har minus fjorton så plussar du på fyra, så blir det närmare noll än…
[…]
Elev: Tjugo till exempel, så blir det… eller minus tjugo, så blir det så…
Intervjuare: Skulle du kunna rita något, eller förklara hur du…

När eleven uppmanades att rita för att förklara sitt resonemang tecknades de tre talen -20, -14 och 0 ned så att de tillsammans utgör ett segment av en negativ del av en tallinje. Genom gester och fingervisningar, använder sedan eleven tallinjen för att fortsätta sitt resonemang om sin uppfattning av uttrycket;

Elev: Jag tänker så att om man har minus fjorton… och så har du noll här… och minus tjugo här… och så då blir det ju att… för att det ska bli minus arton så måste du ju… om du plussar på så blir det närmare nollan, för att… du har liksom, eeh, det… eller jag vet inte…
[…]
Elev: Det är liksom inte… det blir liksom samma sätt som när du har över nollan, att du plussar på… men ändå så blir det att du kommer närmare nollan i mindre tal… eller att fjorton till noll och allt där emellan… alltså tretton, tolv… Det blir som med noll, att du tar fjorton plus fyra, så blir det arton… men i det här fallet blir det bakåtvänt, och det blir fjorton plus fyra, och då kommer du närmre nollan istället.

Eleven urskiljer att plustecknet medför en viss problematik, då detta vanligtvis resulterar i att talen blir större och därmed kommer *längre från noll*. I detta fall uppger eleven istället att additionen blir *bakåtvänd*, då den resulterar i ett tal som ligger *närmre noll*.

Under uppgiften $-5 - 6$ erhölls ett liknande resonemang om hur operationerna uppfattades då den inledande termen är negativ;

> *Elev: Man befinner sig minus från början… och försöker du ta minus… om man säger att man är minus fem då… och så försöker du ta minus igen…* [paus]*… så skulle du egentligen gå… uppåt… då… i det här…*
> *Intervjuare: aa?*
> *Elev: … blir det ju… när du tar minus när du redan befinner dig i minus går du ju uppåt…*
> *Intervjuare: På själva siffran menar du då eller…?*
> *Elev: aah… då går man ju uppåt… i siffra… på minuset då… så här blir det ju… minus fem och minus sex…*
> *Intervjuare: Och det blir då…*
> *Elev: Elva… minus elva…*
> *Intervjuare: Okej… minus elva …*
> *Elev: mm…* […] *jag skulle säga att minus fem… minus sex… skulle bli ungefär samma sak som fem plus sex… på plussidan…*

Likt tidigare avgör den inledande termens tecken hur den nästkommande operationen uppfattas och beräknas. Då den inledande termen var negativ resulterar detta i att den kommande operationen, i detta fall en subtraktion, istället betraktas som en addition. Eleven uppfattar därmed att beräkningen kan utföras som en addition av fem och sex, som resulterar i summan elva. Eftersom den inledande termen i det givna uttrycket var negativt medför det att även resultatet blir negativt, alltså minus elva.

5.4 Positiva och negativa tal samarbetar ej

Inom denna kategori betraktas positiva tal och negativa tal som två olika typer av tal som inte är förenliga med varandra. Eftersom talen är av olika typ, är det inte möjligt att varken addera eller subtrahera ett negativt tal från ett positivt tal, eller ett positivt tal från ett negativt tal. Det går dock utföra additioner och subtraktioner om båda termerna är av samma slag.

> *Intervjuare: Om vi sen har såhär, ee, om det står två plus minus tre* $[2 + (-3)]$*, kan det stå så eller vad…*
> *Elev: Det… kan det inte göra, tror jag inte, för du måste ha, för om det skulle vart två plus tre* $[2 + 3]$ *skulle det gått, men du kan inte ta två med nånting som blir under noll.*
> […]
> *Elev: För dom, det talet som du ska plussa på där finns inte som ett tal över nollan*

Citatet ovan vittnar om uppfattningen att man inte kan lägga till ett negativt tal på ett positivt tal, i det här fallet $2 + (-3)$. Detta beror på att det negativa talet -3 inte är över noll, och därför inte kan adderas till det positiva talet 2. Enligt denna uppfattning är det inte heller möjligt att dra ifrån ett negativt tal ifrån ett positivt, vilket följande citat åskådliggör;

> *Intervjuare: Mm, skulle du kunna ta tre minus minus ett* $[3-(-1)]$*?*
> *Elev: Em… nej. För det går inte, ee för det, det är inget tal som du kan ta bort med, för den, den är inte över nollan*
> *Intervjuare: Ok*
> *Elev: Så den… Eem, den liksom det är liksom inget tal, skulle den va minus tre, minus ett så skulle det gå, för båda är i samma… på samma sida.*
> *Intervjuare: Ok, aa*
> *Elev: Så man kan inte göra en ekvation när man har en siffra som är på ena sidan, och en som är på andra*
> *Intervjuare: Mm*
> *Elev: Och, för det, de två är inte av samma värde, så det går inte o göra något tal mellan dem*

Eleven ser tydligt skillnaden mellan funktionen hos de båda minustecknen i uttrycken $3-(-1)$, där det första minustecknet ses som en operator, och det andra som en symbol för att ettan är negativ. Utsagan speglar uppfattningen av att de positiva och de negativa talen är av skilda arter. Detta syns exempelvis när eleven resonerar kring att det inte går att ta bort -1 ifrån 3, eftersom -1 inte är över nollan. Eleven talar också om att *de två talen inte är av samma värde*, varpå intervjuaren ställde följande fråga;

> *Intervjuare:* […] *har vi olika typer av tal då eller?*
> *Elev: aa, eller det är två olika, de som är under nollan och de som är över.*
> *Intervjuare: ja juste…*
> *Elev: Och de kan inte samarbeta med varandra, för de… för de är två olika typer utav tal*

Här framgår det att eleven uppfattar att det finns två olika typer av tal; de positiva talen och de negativa talen. Eftersom de är olika sorters tal, så kan ett tal av den ena sorten varken läggas till eller dras ifrån ett tal av den andra sorten.

5.5 Positiv eller negativ differens

Karakteristiskt för kategorin är att beräkningar genomförs på ett sådant sätt att hanterandet av negativa tal minimeras. Detta gör eleven genom att med en minnesregel avgöra resultatets tecken, snarare än att utföra beräkningarna med hjälp av en imaginär tallinje. Exempelvis vid beräkningar med subtraktion av två positiva tal, beräknas detta genom att först subtrahera det tal med minst storlek från det tal med störst storlek. Detta görs oberoende av termernas ordning. Därefter bestäms om resultatet är positivt eller negativt, vilket termernas ordning avgör. Om talet med störst storlek står först blir resultatet positivt, och om talet med minst storlek står först blir resultatet negativt. Följande citat är representativt för kategorin;

Intervjuare: Så om du skulle räkna ut det [pekar på 3-10]*, hur skulle du göra då?*
Elev: … då skulle jag ta bort tre från tio, och trean var ju före stora där då, så då blir det minus sju.

Från citatet kan man tolka att eleven inte använder någon verklig representation för beräkningen. Eleven ser snarare problemet procedurellt enligt en minnesregel. Enligt minnesregeln beräknas först differensen mellan de två talen. Därefter tas hänsyn till termernas ordning. Även följande citat visar på denna uppfattning;

Intervjuare: Om vi har två minus tre [$2-3$]
Elev: Ee, det blir… Miiinus ett eller?
Intervjuare: Mm, så vad är det för skillnad på de här två [pekar på 3-2 och 2-3]*, om vi jämför dom?*
Elev: De e att det större talet är framför det mindre talet [pekar på 3-2]*, och att svaret på det blir högre än noll, och på det* [pekar på 2-3] *blir under noll*

I diskussionen om vilken skillnad det är mellan de båda uttrycken, beskriver eleven att tecknet på de båda uttryckens resultat skiljer sig åt beroende på termernas ordning. Först bestämmer eleven således resultatets storlek, för att därefter avgöra resultatets tecken genom att inspektera vilken position den största respektive minsta termen har.

6 Diskussion

I detta kapitel kommer inledningsvis respektive beskrivningskategori diskuteras. Därefter kommer en metoddiskussion, följt av en diskussion om vilka didaktiska implikationer som studiens resultat kan tänkas ha.

6.1 Resultatdiskussion

Det finns inget under noll

Denna uppfattning om negativa tal är inte olik den som var utpräglad bland matematiker under Diofantos tid i antikens Grekland. Även om den tidens matematiker var medvetna om de negativa talens existens, betraktades de som meningslösa, då det faller sig ologiskt att tala om negativa sträckor och areor (Crowley & Dunn, 1985). På samma sätt leder denna uppfattning till att det blir meningslöst att tala om en skillnad mellan att ha 0 äpplen eller att ha -14 äpplen. Uppfattningen bygger på att tal endast representerar en samling konkreta objekt. Detta är enligt Skott, Hansen, Jess och Schou (2010) en vanlig, men bristande, uppfattning av den reella talmängden. I förlängningen leder detta till att minustecknet endast ses operationellt, och minustecknets funktion som symbol för negativitet inte uppfattas. Uppfattningen av minustecknets funktion medför även att de minustecken som inleder uttryck betraktas som operationella. Liknande uppfattningar har även framkommit i Kilhamn (2011) och Vlassis (2002) studier, där det bland annat urskiljdes att samtliga minustecken uppfattades som subtraktioner. Likt beskrivningskategorin *det finns inget under noll*, betraktades således de uttryck vars inledande term var negativ, som att hela uttrycket skulle subtraheras från talet 0.

Eliminering av termer

Denna uppfattning bygger på att man ser att det är möjligt att eliminera tal genom att kombinera ett positivt tal med dess negativa motsvarighet, vilket sedan kan utnyttjas i beräkningar. En uppgift som $3 - 10$ betraktas då i följande steg; $3 - 10 = 3 - 3 - 7 = (3 - 3) - 7 = 0 - 7 = -7$. Kilhamn (2011) fann liknande uppfattningar i sin studie där elever utgick från en metafor kallad *aritmetik som objektssamlande*. Både metaforen och den uppfattning som ligger till grund för denna kategori bygger till stor del på begreppet *elimination*. Då ett tal adderas med sin invers, elimineras båda talen och bildar tillsammans talet 0. Det som utmärker denna uppfattning, som även skiljer sig från *aritmetik som objektssamlande*, är att den term med störst storlek alltid används som utgångspunkt. Denna term delas alltid upp i två delar, där den ena delen har samma storlek, men motsatt tecken, som det ursprungliga uttryckets minsta term. Således kan de två termer vars storlek är densamma adderas och elimineras. Som en följd av detta återstår antingen en addition eller subtraktion med ett tal och noll, vilket leder till att uttryckets resultat direkt kan urskiljas. Vlassis (2004) menar att denna uppfattning bygger på en god förståelse för minustecknets olika betydelser och funktioner. I exemplet $3 - 10$ uppfattas minustecknet som en operator i samtliga steg utom i det sista, där det tydligt framgår att talet -7 är negativt.

Omvända räkneoperationer till vänster om noll

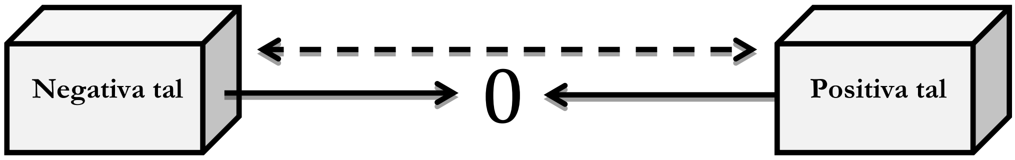
Denna uppfattning bygger delvis på att eleverna förvärvat delar av de olika aspekter om taluppfattning som McIntosh, Reys och Reys (1992) författat. Framförallt är det en kännedom om operationers innebörd och funktion som utgör en viktig del. Den uppfattning som faller inom denna kategori bygger till stor del på de erfarenheter och kunskaper elever har sedan tidigare beträffande hur additioner och subtraktioner fungerar då dessa utförs i den positiva talmängden. Det framgår tydligt under beskrivningarna att eleverna har en uppfattning om att en addition av två positiva tal alltid resulterar i ett tal som är beläget längre från noll, och att en subtraktion resulterar i ett tal närmre noll. På så vis är det snarare operationernas funktioner som står i centrum än de ingående termerna i sig.

Kategorin präglas av en uppfattning av att det även går att utföra operationer med negativa tal på samma sätt som de görs med positiva tal, om än att dessa operationers funktioner är omvända för respektive räkneoperation. Att undvika beräkningar med negativa tal är även vanligt förekommande i det vardagliga livet. De fall McIntosh (2008) talar om, *temperaturer* och *övertrasserade saldon på bankkonton*, är exempel på sådana tillfällen. I dessa fall kan man välja att betrakta minusgrader i form av *kallgrader* och eventuella övertrasserade bankkonton som *underskott*. Detta medför att det är möjligt att betrakta ett uttryck bestående av negativa tal som ett uttryck med positiva tal.

Positiva och negativa tal samarbetar ej

Denna uppfattning går likt *eliminering av termer* delvis koppla till den metafor Kilhamn (2011) valt att kalla *aritmetik som objektssamlande*. En av de avgörande aspekterna inom denna metafor, och tillika även i kategorin *eliminering av termer*, är uppfattningen av att när två motsatta typer av objekt, eller två tal med samma storlek men olika tecken adderas, resulterar detta i talet 0. Inom uppfattningen *positiva och negativa tal samarbetar ej* har dock denna aspekt inte urskilts. Det är i detta avseende som denna kategori i allmänhet skiljer sig ifrån de övriga, men i synnerhet från *eliminering av termer*. Inom uppfattningen ryms dock en förståelse för negativa tals existens, dessa uppfattas dock som oförenliga med positiva tal.

En applicerbar matematisk förklaringsmodell, som kan illustrera denna uppfattning, är att uppfattningen grundas i en tallinje bestående av två delar. De två delarna består således av de två olika typerna av tal; de positiva talen och de negativa talen. Mellan dessa delar finns talet 0. I figuren nedan representeras dessa delar av två lådor (se figur 3). Då operationerna endast går att utföra inom respektive del, förefaller det sig vara omöjligt att vandra från den ena delen till den andra, det vill säga från den negativa lådan till den positiva lådan. Talet 0 utgör därmed ingen brygga mellan de båda delarna, utan fungerar snarare som en återvändsgränd.



Figur 3. De två heldragna pilarna indikerar att det är möjligt att från endera mängd tal få 0 som resultat vid räkneoperationer. Den streckande linjen indikerar att det inte är möjligt att passera över 0, vilket medför att de båda mängderna är oförenliga med varandra, men förenliga med talet 0.

Beträffande minustecknets roll inom denna kategori uppfattas de två möjliga funktionerna, det vill säga minustecknet som beteckning för negativa tal och minustecknet som operator. Det framgår tydligt i elevbeskrivningarna att det är möjligt att *ta bort något* inom de båda delarna, vilket indikerar att minustecknet har en operationell funktion i dessa fall. Samtidigt talas det även om *de negativa talen* och *de positiva talen*, där minustecknet fungerar som en beteckning för negativa tal.

Positiv eller negativ differens

Till skillnad från *det finns inget under noll*, är negativa tal enligt denna uppfattning en existerande talmängd. Negativa tal har dock en abstrakt karaktär inom *positiv eller negativ differens,* eftersom en verklig representation med att ta bort exempelvis 10 från 3, som i fallet 3 – 10, inte urskiljs. Istället beräknas de uttryck som är konstruerade på detta sätt med hjälp av minnesregler. Uttrycket kan då beräknas genom att subtrahera det mindre talet från det större talet, men eftersom uttryckets största term kommer sist, säger minnesregeln att resultatet blir en negativ differens.

I kategorin *omvända räkneoperationer till vänster om noll*, urskiljs att beräkningar i regel utförs på ett sådant sätt att de inte nödvändigtvis omfattar negativa tal, utan utförs istället enbart med hjälp av positiva tal. Negativiteten kommer istället som en följd av att dessa beräkningar utförs på den negativa sidan av tallinjen. I ett avseende kan den negativa talmängden anses vara exkluderade när beräkningarna utförs, även om det tydligt finns en medvetenhet om deras existens. Inom denna kategori kan talet 0 anses vara exkluderad från beräkningarna. Detta åskådliggörs tydligast i en jämförelse mellan *positiv eller negativ differens* och *positiva och negativa tal samarbetar inte med varandra*. Inom den sistnämnda kategorin finns uppfattningen om att ett uttryck vars utgångspunkt är i den positiva talmängden inte kan resultera i ett tal som finns att finna i den negativa talmängden. Det är således inte möjligt att utföra beräkningar där talet 0 passeras. Inom *positiv eller negativ differens* är det dock möjligt att utföra sådana beräkningar. Det är aspekt som skiljer *positiv eller negativ differens* från de övriga. Enligt denna uppfattning är det möjligt att ett uttryck, vars samtliga termer är positiva, resulterar i ett tal i den negativa talmängden. Förflyttningen från den ena talmängden till den andra görs dock mer eller mindre direkt.

De minnesregler som används inom denna kategori påminner mycket om de minnesregler som Brahmagupta formulerade år 628 om hur resultatets tecken kan bestämmas då uttryckens termers placering och storlek varierar (Mumford, 2010). I de fall en subtraktion utförs mellan ett mindre tal och ett större tal, som i fallet 3 – 10, säger regeln att differensens tecken blir det omvända mot vad det varit om termerna varit omvända, det vill säga att 3 – 10 resulterar i en negativ differens.

6.2 Metoddiskussion

En fördel med en kvalitativ studies tillvägagångssätt kontra en kvantitativ studie är att möjligheten finns att ställa följdfrågor och be om utvecklande och förtydligande av respondenternas resonemang. I en kvantitativ studie försvåras analys- och tolkningsprocessen, då den enda data som finns att tillgå är den respondenten själv uttrycker i skrift, vilket i sin tur kan vara en bidragande risk till eventuella feltolkningar, och därmed försämras studiens validitet.

Användandet av semistrukturerade intervjuer med förekommande följdfrågor anses enligt Kvale och Brinkmann (2009) stärka studiens reliabilitet. Nackdelen med att genomföra en kvalitativ studie i form av intervjuer är dock att antalet respondenter är långt färre än vad de kunnat vara i en kvantitativ studie, vilket skulle kunna medföra att någon uppfattning inte åskådliggörs. För att undvika detta, utfördes totalt 36 förtest på två olika skolor. Från dessa förtest var det sedan möjligt att välja ut 8 elever med tillsynes skilda beskrivningar, motiveringar och svar på uppgifterna. Enligt Trost (2010) kan dessutom ett större antal intervjuer medföra problematiska följder, då det kan bidra till att materialet blir för mäktigt och svårhanterligt. Det kan i sin tur medföra att det blir svårt att få en god överblick över all data, och därmed riskera att förbise viktiga detaljer. Trots det relativt begränsade antalet medverkande elever upplevdes resultatet som mättat, då det under flertalet intervjuer framkom stora likheter i elevernas uttalade uppfattningar av operationer med negativa tal.

Under konstruktionen av förtestet upplevde vi att det behövdes ett förtydligande av uppgift $2c$) (se bilaga 2). För att förtydliga vad en verklig situation skulle kunna innebära tillskrevs ett exempel beträffande en addition mellan två positiva tal på följande sätt; *till exempel kan beräkningen* $5 + 2$ *beskrivas som att man har fem äpplen och sedan får två äpplen till.* Under analysen av förtestet framgick det att flertalet elever även försökt tillämpa exempel innehållandes äpplen till den berörda uppgiften, vilket troligtvis kommer till följd av att äppelmetaforen använts i det givna exemplet. Vi ansåg dock att det var nödvändigt att presentera ett exempel, eftersom flertalet av de elever som medverkade på pilottestet uppfattat uppgiften som svårbegriplig och bad om ett förslag på vad en *verklig situation* kunde vara. Detta diskuterades efter pilottestets genomförande, och beslutet togs att ett exempel skulle infogas för att minimera risken att uppgiften skulle lämnas blank på förtestet. Användandet av konkreta föremål i uppgifter innehållande negativa tal medför dock en viss problematik då det praktiskt taget är omöjligt att betrakta exempelvis -5 som en konkret mängd. Uppgift $2c$) var en av de uppgifter som vi valde att återkomma till under intervjuerna, genom att respektive elev ombads att redogöra för sitt svar på förtestet, samt ge ytterligare någon representation. Att elevens svar på frågan diskuterades under intervjun kan därmed tänkas åtgärda den ledande inverkan exemplet kan ha haft på vissa elevsvar.

Initialt bestod studien av de två frågeställningarna; *på vilka kvalitativt skilda sätt uppfattar elever operationer med negativa tal?* samt *vilken roll uppfattar elever att minustecknet har i beräkningar med negativa tal?*. Under analysprocessen åskådliggjordes dock en problematik beträffande relationen mellan dessa frågeställningar. Då denna studie är en fenomenografisk studie, kom frågeställning två att vålla problem i urskiljandet av beskrivningskategorier. Efter att intervjuerna genomförts framgick det att de båda frågeställningarna tangerade varandra till en sådan grad att det inte var möjligt att särskilja dem, än mindre fenomenografiskt. Den andra frågeställningen kom att ha implikationer på resultatet tillhörande den första frågeställningen, eftersom elevers uppfattningar om minustecknets roll även påverkade deras uppfattningar om operationer med negativa tal. Detta medförde att kategoriseringen gjorts utifrån den första frågeställningen. För att inte skapa förvirringar och otydlighet i studiens syfte, togs den andra frågeställningen bort. Delar av de aspekter som finns beträffande minustecknets funktion kommer dock att diskuteras i resultatdiskussionen. Förtestet användes endast som ett verktyg i urvalsprocessen, och till viss del i konstruktionen av intervjuguiden, och detta resultat kommer därför inte presenteras i resultatet, med undantag för uppgift $2c$).

6.3 Didaktiska implikationer

Denna studie har resulterat i urskiljandet av fem beskrivningskategorier om elevers uppfattningar av operationer med negativa tal. Då denna studie valts att förläggas efter det att eleverna blivit undervisade om negativa tal, men innan de undervisats om hur operationer utförs med dessa, blir didaktiska implikationer relevant främst då operationer med negativa tal introduceras. För att förstå innebörden av olika operationer med negativa tal, finns det en rad aspekter inom taluppfattning som elever bör förvärvat innan operationer med negativa tal introduceras. En sådan aspekt är minustecknets olika funktioner, där minustecknet kan användas både som operator och som en beteckning för negativa tal. En avsaknad av denna förståelse kan leda till att samtliga minustecken endast betraktas som operationella, likt i beskrivningskategorin *det finns inget under noll*. I undervisningen är det därför viktigt att behandla minustecknets olika funktioner, och också tydligt tala om att det finns flera betydelser av ett och samma tecken. Ett sätt att framhålla detta, och även skilja de olika betydelserna åt, är att språkligt undvika att benämna talet -5 som *minus fem*. Om formuleringar som *fem negativa* eller *negativ femma* istället används, kommer man även språkligt kunna poängtera skillnad mellan olika minustecken. Exempelvis kan uträkningen (-5) - (-2) benämnas som *fem negativa minus två negativa*, vilket kan vara tydligare än *minus fem minus minus två*.

I beskrivningskategorin *positiva och negativa tal samarbetar ej* finns uppfattningen att positiva och negativa tal är två olika typer av tal. Detta är en missuppfattning då både positiva och negativa tal är en del av den reella talmängden. Talen kan samarbeta med varandra i den bemärkelsen att det är möjligt att addera och subtrahera negativa tal med positiva tal. Detta är en aspekt som inte urskilts i *positiva och negativa tal samarbetar ej*, men som däremot har urskilts i *eliminering av termer*. *Eliminering av termer* bygger i stor utsträckning på aspekten att då två tal med samma storlek, men med motsatt tecken, adderas resulterar det i att summan blir noll. Denna aspekt har inte urskilts i *positiva och negativa tal samarbetar ej*, vilket exempelvis medför problem i de fall en addition eller en subtraktion ska genomföras mellan de två talmängderna, då det i praktiken skulle kunna jämföras med att kombinera äpplen och päron. Det behövs således andra sätt att tolka addition och subtraktion på än konkreta mängder. Istället för att betrakta en subtraktion som att en mängd ska tas ifrån en annan mängd, kan det hjälpa att betrakta operationen som ett uttryck för att beräkna skillnaden mellan två tal. För att ytterligare åskådliggöra denna tolkning kan undervisningen utgå från att beräkna skillnaden mellan två positiva tal, och därefter illustrera detta genom mätningar på en tallinje. Man behöver då uppmärksamma eleverna på att skillnaden kan vara både positiv och negativ, beroende på ordningen av termerna. Eftersom skillnaden uttrycker hur mycket större värde den första termen har jämfört med den andra, blir tecknet för differensen omvänd om de två termerna byter ordning. Exempelvis är $3-(-5)=8$, eftersom talet 3 är 8 *större än* -5. Om termerna byter ordning, blir uträkningen istället $(-5)-3=(-8)$. Eftersom -5 är 8 *mindre än* 3, blir svaret -8. Detta åskådliggör samtidigt att en skillnad både kan vara positiv och negativ. Även om det inte uttryckligen talas om en positiv eller negativ skillnad i kategorin *positiv eller negativ differens*, har man där urskilt aspekten att ordningen på termerna har en inverkan på differensens tecken.

Den uppfattning som beskrivs i *omvända räkneoperationer till vänster om noll* är till stora delar välfungerande i de flesta fall där ett eller flera tal adderas eller subtraheras med varandra. I förlängningen kan det dock vara önskvärt att ha en uppfattning som inte nödvändigtvis måste relatera till den tidigare uppfattning om hur operationer med enbart positiva termer fungerar. Därför kommer de didaktiska implikationerna i detta fall i en större utsträckning vara av en problematiserande karaktär, för att öka den generella taluppfattningen i allmänhet, och om negativa tal i synnerhet.

7 Referenser

Alexandersson, M. (2006). Den fenomenografiska forskningsansatsens fokus. Starrin, B. & Svensson, P. (Red.). *Kvalitativ metod och vetenskapsteori*. Lund: Studentlitteratur AB.

Bennet, A. B. & Musser, G. L. (1976). *A concrete approach to integer addition and subtraction*. The arithmetic teacher, 23(5), 332-336.

Beswick, K. (2011). *Positive experience with negative numbers: Building on students in and out of school experiences.* 67(2), 31-40.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (uppl. 2:3). Malmö: Liber.

Crowley, M. L. & Dunn, K. A. (1985). *On Multiplying Negative Numbers*. The Mathematics Teacher, 78(4), 252-256.

Kihlström, S. (2007). Fenomenografi som forskningsansats. I J. Dimenäs (Red.), *Lära till lärare: Att utveckla läraryrket - vetenskapligt förhållningssätt och vetenskaplig metodik*. 157-173. Stockholm: Liber.

Kilhamn, C. (2011). *Making sense of negative numbers*. Doktorsavhandling, Göteborgs universitet, Institutionen för didaktik och pedagogisk profession.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Red.). (2011). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington DC: National academy press.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* (uppl. 1:2). Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*, Lund: Studentlitteratur.

Larsson, S. (1986). *Kvalitativ analys – exemplet fenomenografi*. Lund: Studentlitteratur.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. Göteborg: Livréna AB.

McIntosh, A., Reys, B. & Reys, J. (1992). *A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense*. For the Learning of Mathematics. 3, 2.

Mumford, D. (2010). What's so baffling about negative numbers? A cross-cultural comparison. I C. S. Seshadri (Red.) *Studies in the history of Indian mathematichs.* New delhi, India: Hindustan Book Agency.

Persson, I. O. (2007). *Om negativa tal*. Nämnaren. 2, 25-27.

Reys, B., Reys, R. mfl. (1995) *Vad är god taluppfattning?* Nämnaren. 1, 23-25.

Skolverket. (2010). *TIMSS 2007* Hämtad 2013-02-23 http://www.skolverket.se/publikationer?id=2306

Skolverket (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.

Skott, J., Hansen, H. C., Jess, K. & Schou, J. (2010). *Matematik för lärare: Y Grundbok band 2*. Malmö: Gleerups

Otten, S. (2009). *Grounding negative numbers: A third grade student plays two mathematical games.* East Lansing: Michigan state university. Hämtad den 4 mars, 2013,

Trost, J. (2010). Kvalitativa intervjuer. (3:e uppl.) Stockholm: Liber AB.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Hämtad 6 juni från: http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf

Vlassis, J. (2002). *The balance model: Hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown.* Educational Studies in Mathematics. 49, 341–359.

Vlassis, J. (2004). *Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'.* Learning and Instruction. 14, 469-484.

Vlassis, J. (2008). *The Role of Mathematical Symbols in the Development of Number Conceptualization: The Case of the Minus Sign.* Philosophical Psychology. 21(4), 555-570.

Widjaja, W., Stacey, K, & Seinle, V. (2011). *Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of pre-service primary teacher.* Journal of mathematical behavior. 30, 80-91.

Bilaga 1 Brev till vårdnadshavare

Hej!

Vi heter *Patrick Smedberg* och *Anton Uhlin* och läser till matematiklärare på Högskolan för Lärande och Kommunikation i Jönköping. Vi håller på att skriva ett examensarbete inom matematik, där vi valt att undersöka elevers uppfattningar om negativa tal. Undersökningen kommer att göras i två steg; ett *förtest* där hela klassen deltar, samt *intervjuer* där 8-10 elever från totalt två klasser kommer att delta.

Att delta i studien är självklart frivilligt, och eleven har rätt att när som helst avbryta sin medverkan under både förtestet och intervjun. Intervjuerna kommer att spelas in och därefter transkriberas (skrivas i textform). Vid transkriptionen kommer allt material att avpersonifieras, vilket medför att elevernas namn inte kommer förekomma i studien. Materialet kommer endast att behandlas av oss, samt av vår handledare på högskolan. Den insamlade data kommer endast att användas till denna undersökning.

Elevernas betyg i matematik kommer inte att påverkas av dess medverkan i studien.

För att få intervjua elever under 18 år krävs ett godkännande från vårdnadshavare. Vi ber er därför att visa detta brev för er vårdnadshavare. Om ni godkänner att ni medverkar i studien, ber vi er att ta med er den nedre delen av lappen tillbaka till matematikläraren.

Vid eventuella frågor, kontakta gärna oss via mail:

Patrick Smedberg: xxxxxxxx@student.hj.se
Anton Uhlin: xxxxxxxx@student.hj.se

Hälsningar

Patrick & Anton

- -

Jag godkänner att ______________________________ får bli intervjuad och medverka i studien.

______________________________ ______________________________

Ord och datum Målsmans underskrift

Bilaga 2 Förtest

Namn:_______________ Klass:_______ Skola:__________

1. **Räkna ut:**

   a) 5 + 2 = ____________ **b)** 7 – 3 = ______________

   c) 3 – 10 = ____________ **d)** -14 + 4 = ____________

   e) -5 – 6 = ____________ **f)** -8 + (-2) = ____________

   g) -3 – (-2) = ____________ **h)** 7 – (-2) = ____________

2. **a) Din kompis har glömt hur man beräknar uppgift h) 7 − (−) i förra uppgiften.**

   Hur skulle Du förklara för din kompis hur man gör?

   b) En annan av dina kompisar har glömt hur man räknar ut uppgift e) −5 − 6;

   Hur skulle du förklara hur man gör?

   c) Ge ett eget exempel på en verklig situation där man använder −5 − 6 som en beräkning. ***(Till exempel kan beräkningen 5+2 beskrivas som att man har fem äpplen och sedan får två äpplen till.)***

   Svar:

3. **Stämmer det att man kan skriva:** $\mathbf{4 - (-7) = 4 + 7}$

SVAR: ☐ **JA** ☐ **NEJ**

Motivera ditt svar med ord:

4. **Storleksordna följande tal. Börja med det <u>minsta</u> talet.**

Tal: **2** **-5** **0** **8** **-16**

Storleksordning: _____ _____ _____ _____ _____

(Minst) **(Störst)**

5. **Tidigt en morgon visade termometern att temperaturen var 9 grader under noll.**

Under dagen så steg temperaturen med 13 grader. Vad var temperaturen efter

denna ökning? ***Ringa in ett svar:***

$\mathbf{-9 - (-13) = 4}$ $\mathbf{-9 - 13 = -22}$

$\mathbf{-9 + 13 = 4}$ $\mathbf{9 - (-13) = 22}$

6. **Sätt antingen + eller − i rutorna, så att det här uttrycket blir så stort som möjligt.**

$$-5 \ \square \ -6 \ \square \ 3 \ \square \ -9$$

Bilaga 3 Intervjuguide

Intervjuguide

- Tacka för att de ställer upp!
- Inte rätt eller fel som är intressant – utan *hur* de *gör/tänker*.
- Uppmana att tänka högt.
- Inspelning – Endast till hjälp för att kunna minnas intervjuerna.
- Avidentifiering:

  Kommer inte synas några namn i uppsatsen.

  Får avbryta intervjun när som helst.
- Upplägg av intervjun: Fem huvudteman. Till flera av dem kommer vi att be dig att skriva ned hur du tänker eller räknar.

Intervjuguide

Fråga 1. Tänker inledningsvis titta på ett par uppgifter från förtestet, och kommer framförallt att fokusera på några uppgifter som inte riktigt stämmer…
Och jag tänkte se om du kan hjälpa mig att försökahitta vad det är för fel som eleven har gjort, och även om du kan hjälpa mig att försöka rätta till felen.

En annan elev skrev…

a) $3 - 10 = 7$
- Hur tror du eleven har tänkt här?
- Hur skulle du ha gjort istället?

b) $-14 + 4 = -18$
- Hur tror du eleven har tänkt här?
- Hur skulle du ha gjort istället?

c) $7 - (-2) = 5$
- Hur tror du eleven har tänkt här?
- Hur skulle du ha gjort istället?

Fråga 2. Jag tänkte nu ta fram ytterligare en uppgift som gjordes på förtestet.
Uppgift 2c); där uppgiften var att konstruera en textuppgift till $-5 - 6$.
Du svarade så här på den uppgiften då… |Visa elevens svar|

- Hur tänkte du på den här uppgiften?
- Skulle man kunna tänka på något annat sätt?

<u>Fråga 3.</u> Jag skulle nu gärna vilja diskutera ett par kort med dig!
På korten kommer det finnas ett par matematiska uttryck eller symboler…
Jag skulle vilja att du berättade lite om dem;

- **Kort [-]**;
  - Vad är det här för tecken?
  - Vad används det till?

- **Kort: [2]**, **[-2], [2-]**
  - Vad representerar de här två korten?
  - Kan man skriva på det sättet som korten visar?
  - Vad används till exempel **[-2]** till?
  - Jämför **[-2]** och **[2-]**; Är det någon skillnad på de här korten?
  - Kan man skriva på det sättet som **[2-]** visar?

- **Kort: [0-2]**, **[-2]**, **[2-]**
  - Betyder de här korten samma sak? *Hur vet du det?*
  - Är det någon skillnad på minustecknen?

- **Kort: [3-2]**, **[3 - (-2)]**
  - Kan du räkna ut de här talen till mig?
  - Hur vet du att det blir så?
  - Vad betyder parentesen i det här fallet?
  - Vad betyder de olika minustecknen?

- **Kort: [3 + (-2)]**, **[3 - (-2)]**
  - Kan du räkna ut dem också?
  - Hur tänkte du då? Förklara hur du räknade…

<u>Fråga 4.</u> Kommer nu att presentera ett mönster för dig med ett par matematiska uttryck!

- Om vi skulle vilja fortsätta mönstret… Hur skulle nästa rad se ut?
  - Hur tänkte du då?
- Om vi skulle vilja fortsätta mönstret åt andra hållet… Hur skulle den översta raden se ut då?
  - Hur tänkte du då?

Fråga 5. Kommer presentera två händelser/situationer nu.
Vi skulle gärna försöka skriva dem här med siffror och symboler så att det beskriver de olika situationerna:

- På en fin vinterdag visade termometern -3°C.
  Senare på kvällen hade temperaturen sjunkit med 15 °C.
  - Vad visade termometern på kvällen?
  - Går det skriva ned den uträkningen? Skulle du kunna skriva den?
  - Det finns ett par minustecken med i din beräkning… vad betyder dem?

- Jag har lånat 100 kronor av en kompis som jag använde till BIO.
  Jag hjälper sedan honom med att städa hans rum, och som tack tar vi därför bort 30 kronor av det jag lånat från honom.

  - Skulle jag kunna uttrycka hur mycket pengar jag har med siffror och symboler? Hur skulle man kunna göra det?
  - Hur tänkte du då?

Fråga 6. Vad är en tallinje? Hur ser en sådan ut?

- Kan du rita upp en tallinje?
- Kan du med hjälp av tallinjen visa hur du räknar ut följande fyra uppgifter:
  a) 2+3 b) 4-2 c) 3-5 d) -3 +5