HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Lärares ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper om division med bråk

Patrick Smedberg

Anton Uhlin

Examensarbete 15 hp
Inom Matematik med didaktisk inriktning 61-90 hp

Lärarutbildningen
Höstterminen 2012

Handledare
Wang Wei Sönnerhed

Examinator
Robert Gunnarsson

HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE OCH KOMMUNIKATION (HLK)
Högskolan i Jönköping

Examensarbete 15 hp
inom Matematik med didaktisk inriktning 61-90 hp

Höstterminen 2012

SAMMANFATTNING

Patrick Smedberg, Anton Uhlin

Lärares ämneskunskaper och pedagogiska kunskaper om division med bråk

Antal sidor: 23

Division med bråk är ett av de områden av skolans matematiska innehåll som både elever och lärare har svårigheter med. I flera internationella studier har man funnit att lärares svårigheter delvis grundas i ett procedurellt förhållningssätt till de lösningsmetoder som används vid division med bråk. Detta, i kombination med att lärare har svårt att konstruera realistiska förklaringsmodeller till sådana typer av uppgifter, påverkar även lärares undervisning.

Syftet med denna uppsats är att undersöka svenska högstadielärares ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper om division med bråk. De frågeställningar studien ämnar besvara är vilka vanliga ämneskunskaper och specialiserade ämneskunskaper lärare visar samt vilka pedagogiska ämneskunskaper om undervisning och pedagogiska ämneskunskaper om elever lärare visar om division med bråk.

Fem matematiklärare i årskurs 7-9 utvaldes för kvalitativ intervju, där de både fick beräkna uppgifter med division med bråk samt beskriva hur de själva resonerar kring sin undervisning, elevers svårigheter och introduktion av division med bråk. I intervjuerna framkom att lärarna generellt visade prov på både goda ämneskunskaper och goda pedagogiska ämneskunskaper.

Sökord: matematik, division, bråk, grundskollärare, vanlig ämneskunskap, specialiserad ämneskunskap, kunskap om ämne och elever, kunskap om ämne och undervisning

Postadress	Gatuadress	Telefon	Fax
Högskolan för lärande och kommunikation (HLK) Box 1026 551 11 JÖNKÖPING	Gjuterigatan 5	036–101000	036162585

Innehållsförteckning

1 Inledning

Enligt de senaste årens TIMSS[1] undersökningar har svenska elevers matematikkunskaper visat på en negativ trend. Sverige har efter den första undersökningen TIMSS 1995 haft ett nedåtgående resultat och är ett av fåtal länder som haft en kontinuerlig resultatförsämring under hela 2000-talet. I nuläget presterar svenska elever i årskurs åtta under EU/OECD-genomsnittet inom matematik (Skolverket, 2012). I ett försök att vända denna negativa trend har Skolverket startat ett nytt fortbildningsprogram, kallat Matematiklyftet. Denna satsning görs bland annat för att fortbilda matematiklärare i matematikdidaktik, för att på så vis öka elevers måluppfyllelse inom matematik samt stärka kvalitén i matematikundervisningen (Skolverket, 2013). Ett av många områden som Matematiklyftet ämnar lyfta berör lärares kunskaper om elevers uppfattningar av tal i bråkform. Tidigare studier som gjorts beträffande denna kunskap visar att räkneoperationer med bråk generellt är ett svårt moment, och att multiplikation och division är de två räkneoperationer som elever har störst svårigheter med (Petit, Laird & Marsden, 2010). Elever är dock inte ensamma om att uttrycka dessa svårigheter, utan forskning tyder på att även lärare har svårigheter med att både förstå och undervisa om bråk (Lamon, 2007). I en studie som gjorts vid Carnegie Mellon University i USA, har ett forskarlag kommit fram till att elevers grundläggande kunskaper om bråk och divisionsalgoritmen långdivision är två viktiga faktorer beträffande elevernas fortsatta utveckling av matematikkunskaper (Siegler et al., 2012). Enligt Litwiller och Bright (2002) är de flesta lärare överens om att bråk är en viktig del av skolans matematiska innehåll.

En viktig aspekt inom all undervisning är lärarens egna ämneskunskaper. Dessa måste enligt Shulman (1986) omfatta både en kunskap om *hur* man utför en viss beräkning, men även *varför* man utför den som man gör. Flera studier har valt att undersöka lärares ämneskunskaper beträffande räkneoperationer med bråk, och har där funnit att lärares kunskaper om *hur* man beräknar division med bråk är god, men att kunskapen om *varför* operationerna utförs som de gör är bristande. En svårighet som framförallt amerikanska lärare visar inom detta område är att konstruera fungerande förklaringsmodeller och verklighetsnära exempel till uppgifter med division med bråk (Ball, 1990; Ma, 1999).

Av våra egna erfarenheter är division med bråk ett område inom matematiken som både elever och lärare upplever som problematiskt. Till området hör flera olika lösningsmetoder som för elever kan tyckas vara svåra att hålla isär, då de kan bestå av både algoritmer och omvandlingar till decimaltal. Elever upplevs många gånger sakna en förståelse om *varför* en metod är att föredra framför en annan, men tycks även sakna en förmåga att med säkerhet tolka det resultat som divisionen resulterar i. Vi har som blivande lärare reflekterat över hur lärares ämneskunskaper ser ut beträffande detta område, då dessa kan tänkas påverka elevernas egna ämneskunskaper. Vi har därför intervjuat fem lärare undervisande i årskurs sju till nio om deras ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper om division med bråk.

[1] Trends in International Mathematics and Science Study

2 Bakgrund

Inledningsvis kommer en rad relevanta begrepp med anknytning till studien presenteras och definieras. Här presenteras även delar av den tidigare forskning som gjorts kring lärares ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper om division med bråk. Slutligen beskrivs de aspekter som rör ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper.

2.1 Relevanta begrepp och definitioner

Bråk

Bråk är ett matematiskt uttryck skrivet på formen $\frac{a}{b}$, där a kallas för *täljare* och b för *nämnare*, och där det streck som skiljer täljaren och nämnaren åt kallas för *bråkstreck*. I löpande text förekommer ofta sneda bråkstreck på formen a/b när man tecknar bråk. Täljaren är det tal som förtäljer, berättar, hur många bråkdelar det gäller av det nämnda bråket. Nämnaren är det tal som benämner bråket, och ger därmed respektive bråk sitt namn (Thompson, 1991).

Inom bråkbegreppet finns det dessutom flertalet andra begrepp som beskriver hur ett visst bråk är konstruerat. Ett sådant begrepp är exempelvis *stambråk*, vars täljare alltid består av talet 1 (Kiselman & Mouwitz, 2008). Både täljare och nämnare kan bestå av tal skrivna på bråkform, vilket medför att ett bråk i sin tur kan bestå av ett eller flera bråk, vilket ofta benämns som *dubbelbråk* (Kiselman & Mouwitz, 2008; Skott, Hansen, Jess & Schou, 2010). Ett sådant bråk kan skrivas på formen $\frac{a}{b}/\frac{c}{d}$, där det bråkstreck som skiljer de båda bråken åt kallas för *huvudbråkstreck* (Kiselman & Moutwitz, 2008). För att underlätta och förtydliga vilket typ av bråk som avses, kommer ytterligare en distinktion göras inom begreppet dubbelbråk. De bråk vars täljare består av ett bråk och vars nämnare består utav ett heltal, såsom $\frac{a/b}{c}$, kommer fortsättningsvis benämnas som *bråk med bråk i täljaren*. På motsvarande sätt kommer det omvända fallet av bråk, det vill säga ett bråk vars täljare består av ett heltal och vars nämnare består av ett bråk, benämnas som *bråk med bråk i nämnaren.*

Rationella tal

Rationella tal är de tal som kan skrivas på formen $\frac{a}{b}$, där a och b tillhör mängden heltal, $\mathbb{Z}$. Mängden av rationella tal betecknas vanligen $\mathbb{Q}$. Nämnaren kan dock aldrig anta värdet noll. Förhållandet mellan a och b sägs utgöra kvoten mellan a och b, och betecknas ofta k (Thompson, 1991). Ofta definieras de rationella talen utifrån dess återkommande sekvens av decimaler; en så kallad periodisk decimalutveckling (Kiselman & Moutwitz, 2008; Thompson, 1991). De tal som har oändligt många decimaler och saknar en sådan periodicitet, exempelvis π och $\sqrt{2}$, hör således inte till de rationella talen, utan hör istället till mängden *irrationella tal.* Trots att definitionerna av bråk och rationella tal är lika, går det finna särskilda drag som skiljer dem åt. Dessa skillnader kan illustreras med följande två exempel; $\frac{\sqrt{2}}{3}$ och $\frac{\pi}{2}$. Dessa två uttryck är mycket riktigt tal skrivna på bråkform, men då respektive täljare hör till mängden irrationella tal, så hör även dessa bråk till den irrationella talmängden, och därmed inte till mängden rationella tal (Bassarear, 2012). Bråk av sådan karaktär kommer dock inte att förekomma i denna studie. Utan i de fall då det refereras till bråk, hör dessa uteslutande till den rationella talmängden.

Division

Division är en av de fyra grundläggande räkneoperationerna inom aritmetiken. Vid en division gäller det att finna ett tal k till talen a och b på ett sådant sätt att $a = b \cdot k$. Kvoten mellan dessa tal skrivs $k = \frac{a}{b}$ (Kiselman & Moutwitz, 2008). Kvoten mellan 10 och 5 är därmed 2, då $\frac{10}{5} = 2$. I detta fall har hela mängden i täljaren fördelats jämnt över hela mängden i nämnaren. I de fall där det inte är möjligt att jämnt fördela täljaren över nämnaren, som vid fallet $\frac{8}{5}$, talar man om att det kvarstår en *rest*. Resten betecknas oftast med bokstaven r (Kiselman & Moutwitz, 2008).

Delningsdivision och innehållsdivision

En speciell egenskap beträffande division är att det finns två olika tolkningsmöjligheter till en och samma division. Man kan antingen välja att betrakta en division som en *delningsdivision* eller en *innehållsdivision* (Löwing, 2008). Vid en delningsdivision vill man fördela en mängd lika över en annan mängd (Löwing, 2008). För att illustrera detta kan divisionen $\frac{15}{5}$ tolkas som en delningsdivision på följande vis; fem barn har köpt ett kakpaket innehållande femton kakor som de vill fördela jämnt mellan varandra. Det enklaste sättet att utföra denna fördelning är att barnen turas om att ta en kaka åt gången. På så vis subtraheras en kaka i taget ifrån kakpaketet, och när kakpaketet är tomt finner barnen att de har fått tre kakor var. Kvoten för divisionen är således tre.

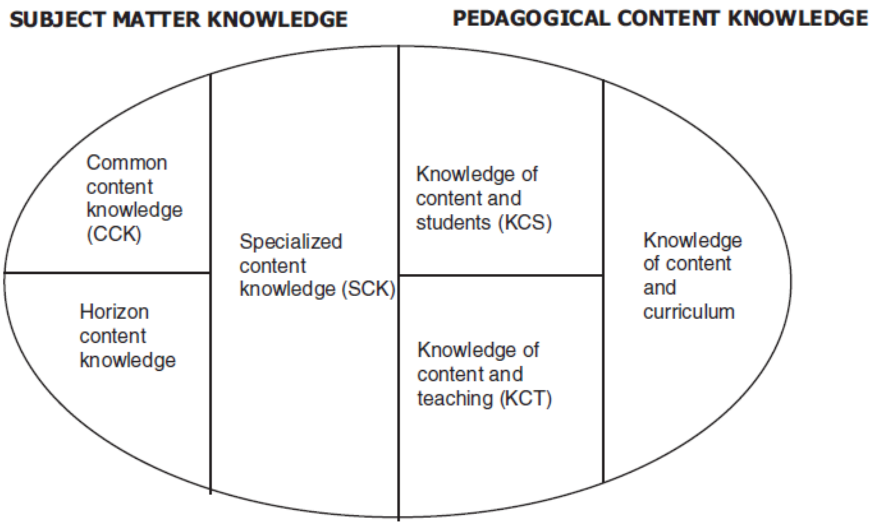
Den alternativa tolkningen till samma division är att istället betrakta divisionen som innehållsdivision, och tänker istället följande scenario; en elev som står i skolans kafeteria har femton kronor och ska köpa äpplen, som kostar fem kronor styck. Eleven ställer sig då frågan: *hur många äpplen kan jag köpa för mina pengar?* Då eleven inte vet vilket antal äpplen som pengarna räcker till, kan inte en upprepad subtraktion likt det tidigare exemplet göras. Genom att systematiskt dra bort kostnaden för ett äpple åt gången, så finner eleven att pengarna räcker till totalt tre äpplen.

I de två ovannämnda exemplen består både täljare och nämnare av heltal. I de fall då det förekommer bråk endast i antingen täljare eller nämnare, uppstår det en ny problematik. I de fall då divisionen i fråga består av ett bråk i täljaren, och ett heltal i nämnaren, så bör man enligt Ball (1990) och Löwing (2008) betrakta divisionen som en delningsdivision. För att lättare förstå anledningen till detta, krävs det en god inblick i de olika betydelser som täljaren och nämnaren har. Löwing menar att en sådan förståelse även underlättar förståelsen och tolkningen av divisionen. För att enklare illustrera vad det är som skiljer de olika betydelserna åt, kan följande division användas som exempel; $\frac{6/7}{2}$. Inledningsvis kan täljaren väljas att betraktas som $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$, eller uttryckt i ord som *sex sjundedelar*. Enligt den tidigare tolkningen av en delningsdivision, skulle täljaren i divisionen fördelas jämnt över det antal grupper som nämnaren i divisionen anger, vilket medför att de sex sjundedelarna fördelas på följande vis: $\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)$. Varje grupp innehåller således tre sjundedelar var, vilket även är kvoten av divisionen. Det är dock är inte lika enkelt att betrakta alla divisioner med bråk i täljaren på detta sätt. Ett problem uppstår i de fall där täljaren i bråket inte är jämnt delbar med nämnaren, som i fallet $\frac{1/4}{2}$. Denna problematik kan dock kringgås genom att utnyttja att ett bråktals värde inte förändras då man förlänger eller förkortar det. Då täljaren i detta fall går att uttrycka som $\frac{2}{8}$, medför det att täljaren i divisionen nu är jämt delbar med nämnaren. Värdet på divisionens kvot har på så vis inte påverkats, utan har bara skrivits på ett annat sätt; $\frac{2/8}{2}$. Detta medför således att divisionen återigen kan betraktas som en delningsdivision likt fallet ovan.

Om man istället väljer att betrakta en division vars nämnare består av ett bråk, lämpar det sig inte längre att tolka divisionen som en delningsdivision. Att betrakta $\frac{10}{1/2}$ som en delningsdivision skulle innebära att en mängd endast skulle fördelas över delar av en annan mängd, vilket förefaller vara ologiskt. I dessa fall rekommenderar Ball (1990) och Löwing (2008) att man istället använder innehållsdivision som tolkning. Man kan då ställa frågan; *hur många gånger ryms en halv i tio hela?*

2.2 Ämneskunskap

I *those who understand: knowledge growth in teaching* listar Shulman (1986) tre olika kategorier inom huvudbegreppet *ämneskunskaper* (content knowledge). Dessa tre kategorier är; *ämneskunskaper* (subject content knowledge, SCK), *pedagogiska ämneskunskaper* (pedagogical content knowledge, PCK) samt *kunskaper om läroplanen* (curricular content knowledge, CCK). Kategorierna ämnar alla belysa de ämneskunskaper som är unika inom läraryrket. Samlingsbegreppet *ämneskunskap* är dock inget ämnesspecifikt begrepp, utan är användbart inom alla skolämnen. I *content knowledge for teaching: what makes it special?* (Ball, Thames & Phelps, 2008) vidareutvecklas begreppet för anpassa det bättre till ämnet matematik. Ball et al. anser att det krävs mer beskrivande kategorier än de tre som Shulman konstruerat. Detta medförde att Ball et al. konstruerade totalt sex underkategorier, vilka grupperas under de två huvudkategorierna *ämneskunskaper* (subject matter knowledge, SMK) och *pedagogiska ämneskunskaper* (pedagogical content knowledge, PCK). I denna studie kommer definitionerna av Ball et al. användas. I figur 1 ges en överskådlig bild av de sex underkategorier tillhörande ämneskunskaper och pedagogiska kunskaper, och följs därefter av en utveckling av respektive underkategori.



Figur 1.
En grafisk presentation av de underkategorier som konstruerats inom SMK
och PCK, hämtad från Ball, Thames och Phelps, (2008, s.403).

Ämneskunskaper

För att en lärare ska kunna undervisa elever inom matematik, så krävs det att läraren besitter goda matematiska ämneskunskaper. Dessa ämneskunskaper beskriver Ball et al. (2008) som en lärares kunskap om att organisera och strukturera upplägget av sitt ämne, och göra det på ett sådant sätt att ämnets innehåll är möjligt att undervisas. Enligt Shulman hör även en lärares förmåga att kunna motivera och förklara *varför* man som lärare väljer att undervisa ett visst specifikt moment, och därtill varför eleverna måste lära sig just detta moment. Shulman menar att en lärares kunskaper inte enbart kan sträcka sig till *hur* man exempelvis, rent procedurellt, använder en algoritm vid en viss beräkning, utan läraren bör även ha en förståelse för *varför* algoritmen fungerar rent matematiskt. Ball et al. (2008) vill göra ytterligare en distinktion inom detta kunskapsområde, och har därför valt att konstruera tre underkategorier ordnade under huvudgruppen ämneskunskaper. Dessa är; *gemensamma ämneskunskaper* (common content knowledge, CCK), *specialiserade ämneskunskaper* (specialized content knowledge, SCK) samt *kunskaper om innehållets horisonter* (horizon content knowledge). Nedan följer de definitioner som Ball et al. har till respektive underkategori.

- *Gemensamma ämneskunskaper* (CCK) – Denna underkategori omfattar den del av den matematiska ämneskunskap som inte enbart är unika inom läraryrket, utan även finns att finna hos personer inom andra yrkesgrupper. Trots att dessa ämneskunskaper benämns som *gemensamma* (common), bör det poängteras att de inte är gemensamma i den bemärkelsen att *alla* personer, oavsett yrkesgrupp, besitter dessa ämneskunskaper. Exempel på en sådan ämneskunskap kan vara att säga ett tal som ligger mellan de två decimaltalen 1,1 och 1,11.

- *Specialiserade ämneskunskaper* (SCK) – De specialiserade ämneskunskaperna är enligt Ball et al. de ämneskunskaper som endast är relevanta för yrkesgruppen lärare. Det är den ämneskunskap som saknar en praktisk nytta i de fall då matematiken endast används som ett verktyg för att exempelvis räkna ut något, men som är av värde då man ämnar lära ut något. Det är exempelvis praktiskt för de flesta att känna till att när man dividerar två bråk, $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, så är det samma sak som att utföra multiplikationen $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, vilket kan betraktas som en gemensam ämneskunskap. För de flesta är det dock ointressant *varför* det fungerar på det viset, men för en lärare är detta viktigt, då de även behöver kunna förklara och motivera sådana regler för elever. En sådan kunskap kan även röra sig om en förmåga att beräkna och lösa samma typ av problem på flera olika sätt, för att på så vis underlätta tolkningen av elevers olika val av lösningsmetoder till specifika uppgifter. En lärare bör kunna finna mönster i elevernas felberäkningar, och dessutom avgöra om en elevs alternativa lösningsmetod, som skiljer sig från en generell lösningsmetod, är generellt gångbar eller endast gångbar till vissa specifika uppgifter. En lärare bör även ha kunskap om hur man konstruerar kontextbaserade textuppgifter till specifika uppgifter som endast består av tal. Detta behöver nödvändigtvis inte vara en unik kunskap inom läraryrket, men är en viktig aspekt inom lärares ämneskunskaper.
- *Kunskap om innehållets horisonter* (Horizon content knowledge) – En lärare bör ha kunskap om hur det undervisade momentet kan placeras in i ett sammanhang av elevernas tidigare och kommande skolår. En lärare bör således ha kunskap *om*, eller *hur*, ett visst ämnesinnehåll tidigare förekommit och presenterats, som i sin tur kan ha implikationer på de kunskaper elever för med sig. Detta medför också att en lärare bör ha kunskap om vad eleverna kommer att möta för matematiskt innehåll i kommande årskurser.

Pedagogiska ämneskunskaper

Pedagogiska ämneskunskaper är den andra huvudkategori som Ball et al. valt att använda inom huvudbegreppet ämneskunskap. Dessa ämneskunskaper omfattar de kunskaper om ämnet som, sett ur ett didaktiskt- och ett pedagogiskt perspektiv, då de underlättar och främjar en förståelse av det område som läraren undervisar eleverna om. En lärare bör känna till de för- och nackdelar som finns i de modeller som läraren använder för att illustrera vissa problem och uppgifter med. Läraren bör också känna till vilka specifika modeller som är att föredra för att illustrera dessa problem och uppgifter, men även ha en förmåga att kunna använda flera olika typer av modeller, för att på ett rikare sätt främja elevers förståelse. Inom denna huvudkategori valde Ball et al. (2008) att skapa följande tre underkategorier.

- *Ämneskunskap och kunskap om elever* (KCS) – Inom denna underkategori finns de kunskaper som berör både ämneskunskaper och kunskaper om elever. Sådana kunskaper kan vara att känna till vilka vanliga missuppfattningar och svårigheter elever har inom ett specifikt ämnesområde, eller att läraren är bekant med vilka lösningsmetoder elever brukar använda till specifika uppgifter. Läraren bör även ha en god kännedom om vilka typer av uppgifter som väcker engagemang och lust hos eleverna, för att kunna utnyttja detta i sin undervisning.

- *Ämneskunskap och kunskap om undervisning* (KCT) – Denna underkategori omfattar den kunskap som berör både undervisning och ämneskunskaper. Här finner man de kunskaper som läraren bör ha om upplägg och planering av både lektioner och introduktioner av specifika moment inom ämnet. Läraren bör dessutom känna och ha en förmåga att kunna klassificera uppgifter, och där kunna avgöra vilka uppgifter som är av en mer fördjupande karaktär.
- *Kunskap om ämnet och läroplanen* (curricular content knowledge) – Kunskap om läroplanen omfattar två olika delar beträffande känndedom av de kursplaner som finns att finna inom läroplanen. Dels bör läraren ha en kunskap om det egna ämnets kursplan, men även kunskap om andra ämnens kursplaner, för att underlätta ett ämnesövergripande samarbete.

2.3 Tidigare forskning

Ma (1999) har som verksam lärare i både Kina och USA intresserat sig för de markanta skillnader som finns mellan de båda ländernas grundläggande matematikkunskaper bland elever. I ett försök att undersöka en tänkbar orsak till detta, skrev Ma *Knowing and teaching elementary mathematics* (1999), där hon väljer att inrikta sig på att undersöka de ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper som en lärargrupp från respektive land har inom särskilda matematiska områden. Ett av dessa områden berör amerikanska och kinesiska lärares ämneskunskaper om divisioner med bråk. Under sina intervjuer och diskussioner med de båda lärargrupperna ombads lärarna att beräkna uppgiften, $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$, och därefter även konstruera en rimlig matematisk berättelse till denna uppgift.

Beträffande de grundläggande ämneskunskaperna inom matematik, så finns det likt de båda ländernas elever även markanta skillnader mellan de båda ländernas lärare (Ma, 1999). En sådan skillnad går bland annat finna i att de amerikanska lärarna har ett större procedurellt förhållningssätt till beräkningen av den inledande uppgiften, och löste i stort sett uteslutande denna uppgift med algoritmer. De kinesiska lärarna påvisade ett mer konceptuellt förhållningssätt till uppgiften, då de utöver algoritmer även använde sig av alternativa lösningsmetoder. Endast 11 av de totalt 23 intervjuade amerikanska lärarna kunde beräkna uppgiften på ett korrekt sätt, och endast en av dessa elva lärare kunde därefter konstruera en rimlig representation till uppgiften. Bland de kinesiska lärarna kunde samtliga 72 intervjuade lärare beräkna uppgiften på ett eller flera sätt, och av dessa kunde därefter 65 lärare konstruera rimliga och verklighetsbaserade modeller. En tänkbar anledning till varför de amerikanska lärarna presterade sämre beträffande konstruktionen av en rimlig modell till uppgiften, tror Ma ligger i att de alla försökte konstruera modeller baserade på konkreta objekt. Även de kinesiska lärarna visade dock på svårigheter i att konstruera modeller som bygger på situationer som förekommer i elevernas vardag. Skillnaden var att de kinesiska lärarna i en högre utsträckning gav modeller som inte baseras på ett konkret objekt, såsom pizza eller chokladkaka, utan snarare baseras på mer abstrakta händelser och förlopp, såsom vattenflöden i floder och sträckor som personer färdas utefter.

Ball publicerade 1990 en studie där enbart amerikanska lärares ämneskunskaper undersöktes inom tre olika områden inom matematik. Dessa var; division med bråk, division med noll samt algebraiska ekvationer. Ma (1999) kunde senare i en separat studie verifiera det Ball funnit i sin studie 1990 om lärares ämneskunskaper om division med bråk. De amerikanska lärarnas ämneskunskap bestod framförallt av procedurella kunskaper om algoritmer, och hade även svårigheter att konstruera modeller till den berörda uppgiften. Tirosh (2000) fann även i sin studie resultat på lärares svårigheter att konstruera rimliga modeller till uppgifter med division med bråk. Här framkom att lärarna framförallt hade svårigheter med att se de båda tolkningsmöjligheterna som finns beträffande en division, det vill säga delningsdivision och innehållsdivision. Denna kunskap menar både Ball (1990) och Löwing (2008) är indirekta hörnstenar i konstruktionen av sådana modeller. De amerikanska lärarna försökte främst konstruera modeller med hjälp av delningsdivisioner, trots att nämnaren var mindre än ett. I en annan studie, genomförd av Li och Huang (2008) fann man indikationer på att det resultat som Ma fann i sin studie beträffande de kinesiska lärarnas ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper stämmer.

En svårighet som Ma (1999) fann bland de amerikanska lärarnas ämneskunskaper, och som hon uppger är en följd av lärarnas procedurella förhållningssätt till lösningsmetoden, var att de hade svårt att minnas exakt *hur* algoritmen fungerade. Då uppgiften bestod av två bråk, uppstod det en osäkerhet i vilket av de två bråken som skulle inverteras och multipliceras med det andra. En implikation av att endast ha en procedurell kunskap till sådana lösningsmetoder leder, enligt Löwing (2008), till problem för elever. Elever uttrycker många gånger svårigheter i val av lösningsalgoritm i de fall då det finns flera möjliga att välja mellan. Detta menar Löwing kommer som en följd av att eleverna ofta blandar ihop algoritmerna, som i sin tur är en följd av att eleverna saknar en förståelse för *varför* algoritmerna fungerar. Ett sådant exempel finns bland annat att finna i de algoritmer som eleverna undervisas om beträffande division med bråk. Här undervisas eleverna ofta om två olika versioner av standardalgoritmen *invertera och multiplicera* (Kiselman & Moutwitz, 2008), där var och en är beroende av hur den specifika uppgiften är konstruerad. I de fall då bråk endast förekommer i täljaren används följande algoritm; $\frac{a/b}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$, medan $\frac{a}{b/c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$ istället används i de fall då bråk förekommer i nämnaren. Elevers svårigheter finns i att de har svårt att avgöra i vilka fall bråket ska inverteras, och i vilka fall som heltalet bör skrivas om till bråkform (Löwing, 2008).

3 Syfte

Syftet med denna uppsats är att undersöka svenska högstadielärares ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper om division med bråk. Detta syfte ämnar vi att uppfylla genom att besvara följande frågeställningar:

- Vilka gemensamma ämneskunskaper (CCK) och specialiserade ämneskunskaper (SCK) visar lärare om division med bråk?
- Vilka pedagogiska ämneskunskaper om undervisning (KCT) och pedagogiska ämneskunskaper om elever (KCS) visar lärare om division med bråk?

4 Metod

I följande kapitel kommer det redogöras på vilket sätt studien har utförts. Inledningsvis beskrivs valet av respondenter, vilka avgränsningar som gjorts samt genomförandet av intervjuerna. Efter detta beskrivs de etiska ställningstaganden som är förknippade med en kvalitativ studie. Intervjuguidens frågor presenteras och motiveras, samt hur resultatet behandlats och analyserats. Slutligen förs en metoddiskussion, där också studiens validitet och reliabilitet behandlas.

4.1 Urval

Målgruppen för denna studie är lärare undervisande i årskurs sju till nio, då det är under dessa årskurser som räkneoperationer med bråk introduceras. Totalt intervjuades fem lärare på tre olika skolor. Av dessa fem lärare är tre lärare kända för författarna av denna uppsats, och de resterande två lärarna är kollegor till två av de tre tidigare nämnda lärarna. Eftersom fokus låg mot lärare verksamma inom högstadiet, har det gjorts ett målinriktat urval (Bryman, 2011). Ett randomiserat urval gjordes ur gruppen matematiklärare på högstadiet, då alla de olika handledare som författarna har haft under de verksamhetsförlagda utbildningsperioder som förlagts på olika högstadier. Urvalet kan därmed även betraktas som ett bekvämlighetsurval (Bryman, 2011), då det i första hand kontaktades lärare som var kända för författarna.

4.2 Avgränsningar

Denna studie har enbart ämnat undersöka fyra av de totalt sex underkategorier som Ball et al. (2008) definierat utifrån Shulmans begrepp om ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper. De två underkategorier som exkluderats är de ämneskunskaper som berör lärarnas *kunskaper om ämnet och läroplanen* samt *kunskap om innehållets horisonter*. Dessa två kategorier är utav en annorlunda karaktär än de fyra övriga (Ball et al., 2008), eftersom de inte direkt beskriver lärarnas kunskaper om *hur* undervisningen bedrivs, utan snarare *vad* undervisningen ska innehålla.

4.3 Genomförande

Inför intervjuerna konstruerades en intervjuguide bestående av fyra huvudfrågor (se bilaga 1). Intervjuerna var semistrukturerade i den mening att respektive huvudfråga möjliggjorde att eventuella följdfrågor kunde ställas till respondenterna för att på så vis få än mer utvecklade svar. En semistrukturerad intervju ger därmed respondenten friheten att kunna formulera sina svar på det sätt som denne själv önskar (Bryman, 2011).

Intervjuerna genomfördes i enskilda grupprum för att skapa en lugn miljö, där risken för störmoment minimerades. Samtliga intervjuer spelades in elektroniskt efter medgivande av respektive lärare. Den första intervjun som genomfördes klassades på förhand som en pilotintervju. Tanken med denna intervju var att kontrollera validiteten på de olika teman som ingick i intervjuguiden. Efter intervjun upplevdes inte några direkta brister i intervjuguiden och därför reviderades den inte inför kommande intervjuer, utan bibehöll sin form genom resterande intervjuer. Eftersom även pilotintervjun genomförts med samma intervjuguide som de övriga intervjuerna, så inkluderades även denna i analysmaterialet.

Båda författarna närvarade vid samtliga intervjuer, där den ena figurerade som intervjuare, medan den andre förde anteckningar under intervjun. Detta gjordes för att båda skulle ha en klar bild av varje intervjus innehåll, vilket även kom att underlätta och stärka efterarbetet av intervjuerna gällande transkribering och analys. Transkriberingen inleddes samma dag som intervjuerna genomförts och slutfördes samma vecka. Båda författarna har medverkat i alla transkriptioner, och inspelningarna har lyssnats igenom flera gånger, för att på det sättet försöka undvika att göra felaktiga tolkningar (Bryman, 2011). I samband med transkriberingen avpersonifierades samtliga intervjuer. För att kunna bearbeta materialet på ett praktiskt sätt, namngavs respektive intervju med en bokstav från A till E.

4.4 Etiska ställningstaganden

Eftersom studien valdes att utföras genom kvalitativa intervjuer, finns det fyra etiska ställningstaganden som måste tas ställning till. Dessa är *informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet* och *nyttjandekravet* (Bryman, 2011). Lärarna har under hela studien medverkat på en frivillig basis, då möjligheten att medverka lades fram som ett erbjudande. Respondenterna informerades kortfattat redan vid den första kontakten vad studiens syfte var. En utförligare beskrivning av studiens syfte gjordes på plats innan respektive intervju. Samtliga lärare gav sitt medgivande till att intervjuerna spelades in. All data och material som samlats in i form av lärarnas egna anteckningar och lösningar, samt observatörens intervjuprotokoll, har behandlats med största möjliga konfidentialitet, och kommer bara att användas för detta forskningsändamål. All data har lagrats och skyddats i form av avpersonifierade dokument (Bryman, 2011).

4.5 Intervjuguide

En intervjuguide konstruerades med utgångspunkt i de underkategorier som Ball et al. (2008) valt att göra utifrån Shulmans (1986) begrepp om ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper. Intervjuguiden bestod därför av fyra huvudteman, där vart och ett av dessa teman berörde en underkategori. De underkategorier som ingick i intervjuguiden var de rörande lärarnas vanliga ämneskunskaper (CCK), specialiserade ämneskunskaper (SCK), deras pedagogiska kunskap om elever (KCS) samt pedagogiska kunskaper om undervisning (KCT). Nedan följer en mer utförlig beskrivning rörande respektive huvudtema. Intervjuguiden bifogas även i en bilaga (se bilaga 1).

1. Respondenten fick inledningsvis lösa fyra uppgifter med olika kombinationer av bråk i antingen täljare och/eller nämnare. Här uppmanades de att beräkna uppgifterna på det sätt som de själva föredrog att göra, och därmed inte nödvändigtvis den metod som de skulle använda sig av när de undervisade i ämnet. Lärarna uppmanades dessutom att visa om de kunde lösa uppgifterna med

hjälp av alternativa metoder. De uppgifter som lärarna ombedes att beräkna var: a) $\frac{5}{1/2}$, b) $\frac{4/5}{2}$, c) $\frac{3/4}{1/4}$ samt d) $\frac{3/4}{2/3}$. Denna fråga syftar till att få en inblick i lärarnas vanliga ämneskunskaper.

2. Efter att ha beräknat de inledande uppgifterna ombads respektive lärare att konstruera en verklighetsanknuten textuppgift, eller modell, till de fyra uppgifterna. Detta gjordes dels för att undersöka på vilket sätt lärarna uppfattar divisioner med bråk, men också för att se hur dessa kan placeras in i en, för elever, verklighetsnära kontext. Detta ämnas således undersöka lärarnas specialiserade ämneskunskaper.
3. Efter intervjuns två inledande teman ombads varje lärare att redogöra hur de uppfattar elevers svårigheter och missuppfattningar inom divisioner med bråk, och eventuella bakomliggande faktorer till dessa. Här var således målet att undersöka lärarnas pedagogiska kunskaper om elever.
4. I anslutning till det tidigare temat frågades lärarna om på vilket sätt de väljer att introducera division med bråk för eleverna. Detta gjordes för att lärarna själva skulle få möjlighet att redogöra för sina tankar kring vilka aspekter som är viktigt att lyfta fram i undervisningen om division med bråk. Här var därmed målet att undersöka lärarnas pedagogiska kunskaper om undervisning.

4.6 Analys

Efter transkriptionen slutförts, sammanställdes all data inom respektive huvudfråga var för sig, för att underlätta analysen av datamaterialet. Då dessa fyra underkategorier berör olika typer av ämneskunskaper, har även analysen av datamaterialet tillhörande dessa underkategorier skiljt sig något åt. Huvudsyftet med analysen har varit att urskilja de kunskaper som finns att finna utifrån de definitioner som Ball et al. (2008) gjort av de fyra tidigare nämnda underkategorierna av ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper. Analysen har således präglats av att finna, och urskilja, de eventuella likheter och olikheter som framkom under intervjuerna.

4.7 Metoddiskussion

Vid inledningen av denna studie fanns en ambition att undersöka flera olika aspekter inom lärares kunskaper om division med bråk, såsom instrumentella och relationella kunskaper. Senare gjordes det dock ett mer riktat intresse åt att undersöka lärarnas uppvisade kunskaper beträffande de fyra underkategorierna; vanliga ämneskunskaper, specialiserade ämneskunskaper, pedagogiska kunskaper om elever och pedagogiska kunskaper om undervisning. För att på bästa sätt undersöka detta valdes det att utgå ifrån kvalitativa intervjuer, för att på så sätt få lärarna att med egna ord beskriva sina kunskaper om division med bråk. En alternativ metod hade varit att använda sig av en mer kvantifierad studie, där fler lärare hade undersökts med hjälp av enkäter. Detta hade dock inte gett något utrymme för lärarna att vidareutveckla samt förtydliga sina svar.

Intervjuerna var uppbyggda kring särskilda teman, där alla tangerade minst en av de valda underkategorierna. Intervjuerna var av en semistrukturerad karaktär, vilket öppnade möjligheten att följa upp lärarnas svar med följdfrågor, för att öppna möjligheten att få en än mer nyanserad bild av lärarnas uttalade kunskaper, samt att kunna fortsätta utveckla de tankegångar och samtalsämnen som lärarna själva tog upp under intervjuerna. Användandet av semistrukturerade intervjuer minskar dessutom risken att göra misstolkningar av lärarnas ord, eftersom möjlighet att be om förtydligande finns, vilket stärker studiens reliabilitet (Bryman, 2011).

Vid konstruktionen av intervjuguiden togs aktning i att inte konstruera ledande frågor som riskerar att påverka lärarnas svar. Målet var att lärarna själva, med egna ord, skulle beskriva de olika metoder de valde att använda och de svar de kunde tänkas ge på de övriga frågorna (Bryman, 2011). Denna intervjuguide konstruerades med hjälp av den tidigare forskning som nämnts under det berörda delkapitlet, samt med syftet att beröra de fyra valda underkategorierna som Ball et al. (2008) definierat. För att studien ska kunna replikeras bifogas intervjuguiden i en bilaga (Backman, 2010).

Det sågs enbart som fördelaktigt att båda författarna deltog under samtliga intervjuer. På så vis fanns möjligheten att föra separata anteckningar i form av intervjuprotokoll, där observationer gjordes av de moment som inte är möjliga att göra enbart med hjälp av en inspelad ljudupptagning, exempelvis då det i samtalet refereras till en specifik uppgift. Respektive intervjuprotokoll användes sedan som komplement till transkriptionen av varje intervju. Eftersom båda författarna deltog under samtliga intervjuer så stärks undersökningens validitet (Bryman, 2011).

Det finns dock nackdelar i valet av metod som används inom denna studie. Eftersom studien bygger på kvalitativa intervjuer, där syftet är att undersöka lärarnas olika ämneskunskaper om division med bråk, är det inte möjligt att uttala sig om hur exempelvis lärarnas undervisning verkligen ser ut. Det enda man kan uttala sig om är de olika kunskaper som lärarna själva uttrycker att de har, och till viss del även uppvisar i form av lösningsmetoder till de berörda uppgifterna under intervjuerna. Därmed kan man inte uttala sig om hur denna kunskap ser ut i praktiken. Sett utifrån exempelvis lärarnas pedagogiska kunskaper om undervisning, hade det varit lämpligt att komplettera intervjuerna med observationer av hur lärarna väljer att introducera detta moment för sina elever. Men på grund av studiens begränsade tidsram var det inget realistiskt alternativ då man hade behövt finna lärare med möjligheten att genomföra en lektion rörande just division med bråk, under den tid då studien utfördes. En annan konsekvens av studiens tidsram är den mängd data som var möjlig att samla in. På grund av den begränsade mängden data, är det inte möjligt att dra några generella slutsatser utifrån studiens resultat, utan resultatet kan endast appliceras till de berörda lärarna som medverkat i denna studie. Dock kan man jämföra resultatet med den tidigare forskning som finns att tillgå, och utifrån denna ta ställning till om det uppvisade resultatet ändå verkar rimligt.

5 Resultat och diskussion

I detta kapitel beskrivs studiens resultat och diskuteras löpande i de två huvudkategorierna; *lärarnas ämneskunskaper* och *lärarnas pedagogiska ämneskunskaper*. Dessa två delar är i sin tur uppdelade i underkategorierna *vanliga ämneskunskaper* och *specialiserade ämneskunskaper* respektive *ämneskunskap och kunskap om elever* och *ämneskunskap och kunskap om undervisning.*

5.1 Lärarnas ämneskunskaper

Gemensamma ämneskunskaper (CCK)

I början av varje intervju fick samtliga lärare beräkna fyra uppgifter, på det sätt de själva föredrog att lösa dem på. I detta skede av intervjun observerades en rad samband och likheter kring de val av metoder som lärarna valde att använda sig av. Dessa samband visade sig bland annat inom de val av metoder som användes till specifika uppgifter, men även genom att samma metodval återkom i flera uppgifter.

Till den första uppgiften (se bilaga 1) uppgav fyra av fem lärare att de inte skulle använda sig av en konkret nedtecknad lösningsmetod, utan föredrog att utföra beräkningen med hjälp av inre resonemang. Dessa resonemang ombads lärarna att utveckla, vilket resulterade i att det framkom flera olika typer sådana resonemang. Totalt observerades tre olika typer av resonemang och lösningsmetoder till denna uppgift, vilket även till stor del förekom i den nästkommande uppgiften. Två lärare skiljer sig från de övriga tre beträffande val av föredragen lösningsmetod till den inledande uppgiften. En av dessa två väljer att omvandla bråket till decimalform, och därefter betrakta divisionen som en innehållsdivision. Den andra läraren väljer istället att placera in uppgiften i en verklighetsnära kontext, och ger en muntlig beskrivning om hur läraren själv vanligtvis löser uppgifter av sådan karaktär. Läraren gav här en utsaga där en fem meter lång tygbit skulle delas upp i halvmetersbitar. Båda lärarna väljer även att beräkna uppgiften med hjälp av standardalgoritmen invertera och multiplicera, vilket är den metod som de övriga lärarna använder som primärmetod till samma uppgift. Till den första uppgiften förekom ytterligare en lösningsalgoritm. Denna valde läraren att uttrycka på följande sätt: ”att dela något med en halv är det samma som att multiplicera med två”.

I den andra uppgiften (se bilaga 1) återanvändes de tre lösningsmetoder som tidigare observerats under den första uppgiften. Två lärare uppgav återigen att de resonerade sig fram till ett korrekt svar via en delningsdivision, då; ”hälften av fyra femtedelar är två femtedelar”. Likaså observerades återigen en omvandling av bråket i täljaren till decimalform. Därefter utfördes en delningsdivision, där läraren konstaterade att det korrekta svaret var 0,8. Av de fem lärarna var det två som föredrog att använda standardalgoritmen som lösningsmetod. Till de två sista uppgifterna (se bilaga 1) användes uteslutande standardalgoritmen som primär metod. Till den tredje uppgiften förekom dessutom en omvandling av de båda bråken till decimalform. Därefter användes en innehållsdivision för att beräkna det korrekta svaret.

De vanliga matematiska ämneskunskaperna kännetecknas främst av de kunskaper, och därmed de färdigheter, som krävs för att på ett korrekt sätt beräkna olika typer av matematiska problem och uppgifter. Det krävs alltså enbart vanliga ämneskunskaper för att lösa de uppgifter som förekommit i denna studie. Under intervjuerna visade samtliga lärare prov på denna typ av ämneskunskap, då de på ett korrekt sätt beräknat de fyra uppgifterna. Under intervjuerna observerades flera olika typer av lösningsförslag till uppgifterna. Av dessa kunde framförallt tre olika typer av lösningsmetoder urskiljas; användandet av algoritmer, omvandling från bråkform till decimalform samt direkta tolkningar av uppgifterna via innehållsdivision och delningsdivision. Av dessa tre lösningsmetoder var det framförallt användandet av algoritmer som användes, då samtliga lärare använde sig av dessa till flera uppgifter.

Att lärarna framförallt valde att använda algoritmer som lösningsmetod till de två sista uppgifterna är inget nytt fenomen. Detta resultat återspeglas i de tidigare studier som gjorts på lärare rörande deras ämneskunskaper om division med bråk. Både Ball (1990) och Ma (1999) fann att de amerikanska lärarna valde att lösa liknande uppgifter på detta sätt. Till de två första uppgifterna valdes dock standardalgoritmen att användas som en alternativ metod, då det till dessa uppgifter primärt fördes två typer av inre resonemang, vilka kopplades till de två olika tolkningarna innehållsdivision och delningsdivision, som finns att tillgå vid division. Detta resultat tyder därmed på att de vanliga ämneskunskaperna som observerats i denna studie beträffande division med bråk är goda.

Specialiserade ämneskunskaper (SCK)

Efter att ha beräknat de inledande uppgifterna ombads lärarna att konstruera textuppgifter eller förklaringsmodeller som skulle kunna generera den division som respektive uppgift angav. Till den första uppgiften konstruerades endast modeller som tolkas som innehållsdivisioner. Här var konkreta objekt vanligt förekommande. På följande sätt väljer en av lärarna att beskriva sin förklaringsmodell:

> Lärare: *Den första, när man ska dividera fem med en halv, så försöker jag alltid tänka det som innehållsdivision… "Hur många gånger ryms en halv i fem…" Och då skulle det ju kunna vara att… eeh… jag kommer inte på nåt bara för det… du har fem liter saft som ska hällas på halvliter flaskor... hur många flaskor går åt?*

Till den andra uppgiften användes uteslutande modeller kopplade till delningsdivisioner. Även här förekom modeller baserade på konkreta objekt, där exempelvis fyra femtedelar av en chokladkaka användes i en modell. Dessa fyra femtedelar skulle delas på två personer, vilket skulle resultera i att varje person fick två femtedelars chokladkaka var. En annan modell som förekom utgick istället från en annan form av objekt; nämligen en grupp bestående av fem personer. Läraren beskrev att en sådan textuppgift skulle kunna vara att fyra av dessa fem personer skulle delas upp i två grupper, där respektive grupp skulle gå iväg och handla.

Till de sista två uppgifterna observerades totalt tre modeller, där samtliga utgick från att tolka divisionerna som innehållsdivisioner. Till den tredje uppgiften konstruerades två av dessa tre modeller, där båda utgick ifrån att man vill undersöka hur många gånger en fjärdedel av något objekt ryms i tre fjärdedelar av samma objekt. Till den sista uppgiften förklarar en lärare att man även till denna uppgift kan föra ett liknande resonemang med en innehållsdivision. Läraren uttrycker att det först blir logiskt att göra så efter det att man har omvandlat bråken så att de består av en gemensam nämnare, då det enligt läraren kan te sig vara invecklat att undersöka hur många gånger två tredjedelar ryms i tre fjärdedelar.

Många gånger handlar matematik om att med hjälp av matematiska uttryck och symboler, beskriva en verklighet. I skolans värld är det dock vanligt att man från detta matematiska språk, även ska kunna beskriva en verklighet bakom uttrycken och symbolerna. Ball et al. (2008) menar att en sådan form av ämneskunskap hör till en lärares specialiserade ämneskunskaper. Detta behöver dock inte vara en kunskap unik inom läraryrket, men är en nödvändig kunskap sett utifrån undervisningsperspektiv, där dessa representationer och förklaringsmodeller kan vara aktuella att beskriva för eleverna. Flera tidigare studier (Ma, 1999; Ball, 1990; Tirosh, 2000) visar att det finns svårigheter bland lärare när det kommer till att konstruera sådana modeller till uppgifter med division med bråk. Sådana svårigheter går till viss del även att urskilja i denna studies resultat. Likt det resultat som observerades till de vanliga ämneskunskaperna, finns det även likheter och samband bland de utsagor som observerades till de två första uppgifterna och de två sista uppgifterna.

Till de två inledande uppgifterna konstruerades det både konkreta och mer generella modeller, där det inte uttrycktes något konkret objekt. Till den första uppgiften användes endast modeller bestående av delningsdivision medan det till den andra uppgiften endast användes modeller bestående av innehållsdivision. Detta stämmer bra överens med de rekommendationer som Löwing (2008) och Ball (1990) gav till dessa typer av uppgifter. Oavsett modell, så förekom det uteslutande konkreta objekt inom dessa modeller. Dessa representerades av både pizzor, chokladkakor, tygbitar samt en grupp med personer. Att lärarna väljer att utgå från konkreta objekt när de konstruerar dessa modeller liknar till stor del det resultat som Ma (1999), Ball (1990) och Tirosh (2000) fann i sina studier. I dessa studier var det framförallt de amerikanska lärarna som valde att försöka att konstruera modeller bestående av konkreta geometriska objekt, dock oftast med ett relativt negativt resultat. Ball (1990) berättar att denna strävan att använda konkreta objekt i sådana modeller går att knyta an till den undervisning om bråk som de amerikanska lärarna generellt sett gör. Att använda sig av sådana konkreta objekt kan i ett avseende upplevas som en god koppling till elevernas verklighet, då dessa objekt många gånger går att finna i elevernas närhet. Ett problem kan dock uppstå när man väljer att använda konkreta objekt på detta sätt, då kontexten, och den fråga som ställs till uppgiften, kan vara avgörande för hur uppgiften uppfattas av eleverna. Johansson (2011) menar på att lärare, och framförallt läromedel, många gånger konstruerar modeller eller textuppgifter med utgångspunkt i rena hypotetiska situationer, som kan skapa en illusion av att uppgiften i fråga är verklighetsnära för eleven. Följande uppgift är ett exempel på en sådan textuppgift: ”Stefan fick en ny bok i julklapp. Han läste $\frac{3}{4}$ av boken på juldagen. Hur många procent hade han sedan kvar?" (Johansson, 2011, s.173). Ett sådant scenario kan för eleven uppfattas som verklighetsnära, då det handlar om att Stefan läser ur en bok. Att eleven skulle välja att betrakta den återstådda delen av boken i form av procent kan dock vara direkt orimligt, då detta troligen aldrig händer i elevens vardag. Liknande tendenser går att finna i de modeller som observerades till framförallt den andra uppgiften i denna studie. En liknelse kan göras mellan den nyss beskrivna textuppgiften, och de modeller där fyra femtedelar av en pizza/chokladkaka skulle delas på två personer. Modellen är konstruerad på ett sådant sätt att man väljer att betrakta de fyra femtedelarna av en pizza i relation till en hel pizza. Detta görs även med de två nya bitarna som framkommit efter det att pizzabiten delats. Att en elev skulle välja att betrakta hur denna pizza bit förhåller sig till en hel pizza kan upplevas som orimligt. Johansson (2011) anser ändå att det kan finnas en poäng med att använda sådana representationsmodeller för eleverna, då dessa är bra i det avseende då eleverna förväntas träna sina matematiska kunskaper och färdigheter.

De svårigheter som Ball (1990), Ma (1999) och Tirosh (2000) funnit i sina studier var dock än mer utmärkande i de två sista uppgifterna i denna studie. De modeller som observerades var alla av en mer generell karaktär, då inget konkret exempel förklarades. Lärarna uttryckte däremot en medvetenhet om att man företrädelsevis till sådana uppgifter bör använda den andra tolkningsmöjligheten av divisioner till sådana uppgifter, vilket även Löwing (2008) och Ball (1990) rekommenderar att man bör göra.

Sammanfattningsvis är resultatet beträffande de specialiserade ämneskunskaperna tvådelat. Till de första två uppgifterna visar lärarna prov på goda specialiserade ämneskunskaper, och även en relativt god förtrogenhet med de olika tolkningsmöjligheter som finns att tillgå för divisioner. Lärarna uttrycker vid flera tillfällen under intervjuerna att de sista två uppgifterna är av en mer fördjupande karaktär, och därmed något som de själva sällan tar upp i sin undervisning och inte heller något som eleverna möter så ofta, och därmed inte förklaras mer än med hjälp av standardalgoritmen. Dessa två uppgifter vållar därmed större svårigheter för lärarna då det kommer till att konstruera rimliga och realistiska förklaringsmodeller.

5.2 Lärarnas pedagogiska ämneskunskaper

Ämneskunskap och kunskap om elever (KCS)

Här redogörs lärarnas svar på hur de tror att elever upplever division med bråk, och vilka upplevda svårigheter elever har. Eftersom det är en kunskap som berör både ämneskunskaper och kunskap om hur elever uppfattar ämnet, så faller dessa uttalanden under kunskap om ämnet och elever.

Fyra av de fem lärarna är överens om att division med bråk är ett svårt moment för eleverna. Den främsta anledningen till att det är ett svårt moment sägs vara att elever upplever momentet som abstrakt, och att de därför inte förstår vad det är de gör. Att eleverna inte med säkerhet vet varför man beräknar en division med bråk på det sätt man gör, leder till att eleverna i en allt större utsträckning förlitar sig på algoritmer. Att eleverna gör detta kan enligt lärarna framförallt leda till två problem; att eleverna har svårt att minnas hur algoritmen fungerar eller att eleverna riskerar att minnas fel algoritm. Båda dessa svårigheter är enligt Löwing (2008) vanliga eftersom elevernas lösningsmetoder till stor del består av algoritmer. Liknande resultat fann även Tirosh (2000) och Isiksal och Cakiroglu (2011) i sina studier. En av lärarna menar att problemet främst ligger i att eleverna lär sig beräkna division med bråk på rutin och får därmed ingen djupare förtrogenhet för algoritmerna. Under den period eleverna arbetar med momentet lär de sig *hur* man löser uppgifter med division med bråk genom standardalgoritmen, vilken fungerar så länge som den är direkt tillämpbar på uppgiften. Problematik uppstår dock då elever möter uppgifter innehållande främmande element såsom tal skrivna i blandad form, alternativt att de inte mött uppgifter med division med bråk på länge och glömt vilken lösningsalgoritm de ska använda. En lärare berättar att elevers svårigheter med uppgifter med division med bråk ofta kan undgås genom att sätta in dem i ett sammanhang.

> Intervjuare: *Uppfattar du att eleverna har svårt med den här typen av uppgifterna?*
>
> Respondent: *Om man bara håller på, och gör som jag har gjort här… och inverterar… så tycker de nog att det är lite hokuspokus… Men om jag berättar för dem, att jag har fem stycken, och ska dela det i halva… så är det inget problem alls att räkna på det!*

En tolkning av lärarens utlåtande kan vara att svårigheterna med lösningsalgoritmen är att den blir för abstrakt och därav inte bidrar till en förståelse för det framräknade svaret. Om eleven istället får uppgiften placerad i en kontext, är chansen större att eleven förstår uppgiften, och kan därmed lösa uppgiften utan användandet av någon algoritm.

Lärarna pekade även på att elever kan ha missuppfattningen om att en division alltid resulterar i att kvoten blir mindre än täljaren, vilket inte gäller då nämnaren i en division har ett värde mellan noll och ett, då kvoten istället blir större än täljaren. Denna missuppfattning är dock inget nytt fenomen utan förekommer även bland de upplevda missuppfattningar som lärarna i Tirosh (2000) studie pekar på.

Ämneskunskap och kunskap om undervisning (KCT)

Tre av lärarna uttrycker att de vid sin introduktion av division med bråk främst utgår från uppgifter som är av en mer konkret karaktär med geometriska figurer, alternativt verklighetsbaserade exempel. Lärarna motiverar dessa strategier med att sådana uppgifter fångar elevernas uppmärksamhet och engagemang under genomgångarna, då det är situationer som eleverna själva ofta kan relatera till. Vid sina introduktioner uppger lärarna att de främst använder uppgifter där bråk endast förekommer i täljaren eller nämnaren, då det är enklare att placera in dessa i ett verklighetsnära sammanhang. En av lärarna valde att uttrycka detta på följande sätt:

Respondent: *Då skulle jag börja med den här typen av uppgifter* [uppgift a) och b) i bilaga 1]*[…] för de tycker jag är tydliga att se att det faktiskt går koppla konkreta uppgifter till… och framförallt den första, där man delar i en halv… att man faktiskt kan se att det finns en verklighet bakom det då, och att man, precis som jag sa där, med innehållsdivision… tycker jag är ett jättebra sätt att introducera det på, för att få med alla.*

Att introducera division med bråk med verklighetsnära exempel är något som Castro (2008) rekommenderar, då sådana uppgifter gagnar eleverna att enklare kunna förstå uppgifterna samt tolka sina resultat. Flera av lärarna uppger att de börjar med enkla uppgifter, för att sedan stegvis öka svårighetsgraden i dem, vilket är ett resultat som överensstämmer väl med det resultat som Flores, Turner och Bachmans (2005) fann i sin studie. Studien ämnade undersöka på vilka sätt två lärare tillhandahåller matematiska problem till sina elever, för att öka elevernas förståelse för division med bråk. Dessa två lärare tar inledningsvis upp uppgifter med enkla och bekanta bråk, likt de uppgifter som denna studie inleds med. Detta medför enligt Flores et al. att eleverna i en allt större utsträckning förstår de beräkningar som görs och även kan tolka sina resultat på ett mer tillfredställande sätt. Efter det att eleverna upplevs behärska sådana uppgifter, ökas svårigheten gradvis, vilket så småningom leder till att eleverna själva väljer att använda algoritmer för att på ett så effektivt sätt som möjligt lösa uppgifterna.

En lärare berättar att dennes introduktion inleds med en repetition av bråkbegreppet, för att eleverna ska ha dessa begrepp klara för sig innan man för in själva räkneoperationen. På så vis tydliggörs att det är vanliga tal, skrivna på bråkform, man dividerar med varandra. Därefter introduceras division med bråk genom enklare uppgifter bestående av bråk i antingen täljare eller nämnare.

5.3 Sammanfattning

På grund av studiens utformning är det inte möjligt att dra några generella slutsatser endast baserat på studiens resultat. Resultatet kan dock jämföras med det resultat som framkommit i tidigare forskning som gjorts beträffade lärares kunskap om division med bråk. Vid en sådan jämförelse uppdagas flera likheter inom både lärares ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper med det resultat som presenterats i bland annat Ball (1990) och Ma (1999). Det kan därför vara rimligt att anta att den här studiens resultat också är representativt för en större grupp lärare. Beträffande lärarnas gemensamma ämneskunskaper (CCK) visade samtliga lärare att de har goda kunskaper gällande beräkning av division med bråk. De resultat som framkom rörande lärarnas specialiserade ämneskunskaper (SCK) är dock tudelad. När det gäller att konstruera modeller till division med bråk i antingen täljare eller nämnare, visar lärarna en god förmåga att ge verklighetsanknutna modeller som finns att finna i elevernas vardag. Lärarna visade dock att de hade svårigheter med att konstruera modeller till de två sista uppgifterna, bestående av bråk både i täljare och nämnare. Gällande lärarnas pedagogiska kunskaper visar de alla prov på en medvetenhet om hur elever kan tänkas uppfatta division med bråk samt vilka eventuella svårigheter som kan förekomma. Enligt lärarna tar de hänsyn till dessa svårigheter vid introduktion av division med bråk. Detta resultat tyder på att lärarna besitter både god ämneskunskap och kunskap om elever (KCS) samt ämneskunskap och kunskap om undervisning (KCT).

5.4 Förslag på fortsatt forskning

Eftersom den här studien har fokuserat på lärarnas egna beskrivningar av både ämneskunskaper och pedagogiska ämneskunskaper, vore det för fortsatt forskning intressant att utföra observationer av lärarnas undervisning, vilket skulle kunna göras genom en teaching-study. Ett annat förslag på fortsatt forskning inom division med bråk skulle kunna vara att via en learning-study försöka finna de kritiska aspekter som finns beträffande division med bråk, för att på så vis kunna utveckla den undervisning som bedrivs idag.

6 Referenser

Backman, J. (2010). *Rapporter och uppsatser.* Lund: Studentlitteratur AB.

Ball, D. L. (1990). *Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division.* Journal for Research in Mathematics Education, 21, 132–144.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). *Content knowledge for teaching, what makes it special?.* Journal of Teacher Education, 59(5), 389-407.

Bassarear, T. (2012). *Mathematics for Elementary School Teachers.* International Edition, 5th Edition. Cengage Learning.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder.* (uppl. 2:3). Malmö: Liber.

Castro, B. V. (2008). *Cognitive Models: The Missing Link to Learning Fraction Multiplication and Division.* Education Research Institute. 9(2), 101-112.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2010). *Tio sätt att göra bråk levande.* Nämnaren, 2, 37-44.

Flores, A., Turner, E. E. & Bachman, R. C. (2005). *Posing Problems to Develop Conceptual Understanding: "Two Teachers Make Sense of Division of Fractions".* Teaching children mathematics. 12(3), 117-121.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). *Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students.* Journal for Research in Mathematics Education, 39(4), 372-400.

Isiksal, M. & Cakiroglu, E. (2011). *The Nature of Prospective Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge: The Case of Multiplication of Fractions.* Journal for Research in Mathematics Education, 14(3), 213-230.

Johansson, M. (2011) *Matematikundervisning: vetenskapliga perspektiv.* Brandell, G. & Pettersson, A. (Red.). Stockholm: Stockholms universitets förlag, sid. 149-186.

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Hämtad den 29 november, 2012, från http://www2.math.uu.se/~kiselman/termer12.pdf

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. I F. K. Lester Jr (red), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* Reston, VA: NCTM

Litwiller, B. & Bright, G. (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions, 2002.* Reston, VA: NCTM.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik.* Lund: Studentlitteratur AB

Ma, Liping. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. Mahaw, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Petit, M., Laird, R., & Marsden, E. (2010). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom*. New York: Routledge

Shulman, L. (1986). *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*. Educational Researcher, 15(2), 4-14.

Siegler, R., Duncan, G., Davis-Kean, P., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., … Chen, M. (2012). *Early Predictors of High School Mathematics Achievement*. Association for psychological science, 1-7. doi: 10.1177/0956797612440101

Skolverket. (2013). *Matematiklyftet*. Hämtad den 21 februari, 2013 från: http://www.skolverket.se/fortbildning-och-bidrag/matematiklyftet

Skolverket. (2012). *TIMSS 2011 Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett inte nationellt perspektiv*. Stockholm: Skolverket

Skott, J., Hansen, H. C., Jess, K. & Schou, J. (2010). *Matematik för lärare*: *Y Grundbok band 2*. Malmö: Gleerups

Thompson, J. (1991). *Wahlström & Widstrands matematiklexikon*. Stockholm: Wahlström & Widstrand.

Tirosh, D. (2000). *Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions.* Journal for Research in Mathematics Education, 31, 5-25.

Bilaga 1

Division med bråk i täljare och/eller nämnare

1) Hur skulle Du gå tillväga för att beräkna följande fyra uppgifter:

a) $\frac{5}{1/2}$ **b)** $\frac{4/5}{2}$ **c)** $\frac{3/4}{1/4}$ **d)** $\frac{3/4}{2/3}$

2) Skulle Du kunna ge förslag på konkreta, realistiska textuppgifter för var och en av uppgifterna ovan som skulle resultera i dessa beräkningar?

3) Upplever du att elever har några generella missuppfattningar eller svårigheter när det kommer till uppgifter som innehåller division med bråk?

Följdfrågor:
a) Om ja; Vad kan det vara för typer av missuppfattningar?

4) Hur gör du när du introducerar division med bråk, av de typerna här ovan, för eleverna?