HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

En studie om elevers förståelse för likhetstecknet

Ekvationsspelet i förskoleklass och årskurs 7

Rebecka Larsson

Sari Håkansson

Examensarbete 15 hp
Inom Lärande 3

Lärarutbildningen
Höstterminen 2010

Handledare
Anna-Lena Ekdahl

Examinator
Ann-Katrin Swärd

HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE OCH
KOMMUNIKATION (HLK)
Högskolan i Jönköping

Examensarbete 15 hp
inom Lärande
Lärarutbildningen

Höstterminen 2010

SAMMANFATTNING

Rebecka Larsson och Sari Håkansson

En studie om elevers förståelse för likhetstecknet

Ekvationsspelet i förskoleklass och årskurs 7

Antal sidor: 30

Studiens syfte är att göra en jämförelse av förståelsen för likhetstecknet mellan elever i förskoleklass och årskurs 7 före och efter att de har spelat ekvationsspelet.

Likhetstecknet som är ett missförstått tecken inom matematiken har två betydelser. Den ena innebörden är den operationella som syftar på att en operation ska utföras, det ”blir” svaret. Den andra innebörden är den relationella som syftar på att det finns en relation mellan vänster- och högerled.

I studien undersöktes elevernas förståelse för likhetstecknet före och efter spelomgången med ekvationsspelet genom intervjuer med förskoleklassen och för- och eftertest med eleverna i årskurs 7. Wiggo Kilborns ekvationsspel spelades för att undersöka hur spelet påverkar elevers förståelse för likhetstecknet. Undersökningen visar på att eleverna i förskoleklassen får en större förståelse för likhetstecknet medan eleverna i årskurs 7 inte ändrar sin förståelse för likhetstecknet efter ett speltillfälle. Däremot gav ekvationsspelet eleverna i årskurs 7 en strategi för att lösa ekvationer.

Sökord: Likhetstecknet, ekvivalens, ekvationsspelet, operationell förståelse, relationell förståelse

Postadress
Högskolan för lärande
och kommunikation (HLK)
Box 1026
551 11 JÖNKÖPING

Gatuadress
Gjuterigatan 5

Telefon
036–101000

Fax
036162585

Innehållsförteckning

1 Inledning

Vårt samhälle är fullt av symboler och du ser dem överallt runt omkring dig som till exempel på datorn, fjärrkontrollen eller i trafiken som trafikmärken. På miniräknaren finns symbolen för likhetstecknet som de flesta, som börjat eller gått i skolan, känner igen. Symbolerna har alltid en innebörd och det förväntas att du ska känna till vad de betyder och vilken innebörd de har. Vi som skriver den här uppsatsen upplever att symbolen för likhetstecknet tas för given i skolans undervisning idag och att det antas självklart att eleverna ska kunna förstå tecknets innebörd. Ingen av oss kommer ihåg någon speciell lektion från när vi gick i förskolan eller grundskolan som handlade speciellt om likhetstecknet eller dess egentliga innebörd. Reaktioner vi fått från andra när vi berättat att vi ska skriva om likhetstecknet är höjda ögonbryn och frågan "vad kan man skriva om det?" Någons reaktion var "det är de där två strecken va?" Kommentarer som dessa tyder på att likhetstecknet inte har så hög status bland folk i allmänhet. Men likhetstecknets status är på uppgång vilket märks bland annat i den nya läroplanen, Lgr 11. I den svenska litteraturen är det inte lätt att hitta forskning om likhetstecknet och det finns inte mycket skrivet om symbolen specifikt. Däremot finns det mer internationell forskning om likhetstecknet som vi kommer att presentera i den här uppsatsen.

Varför är likhetstecknet så viktigt att förstå och vilka är dess två betydelser? Svenska elevers prestationer i matematik försämras enligt de senaste undersökningarna i TIMSS och PISA. Kan detta bero på vilken förståelse elever har för likhetstecknet och för att de inte är medvetna om dess två betydelser? Med den här studien vill vi göra lärare på alla stadier uppmärksamma på att de mer medvetet bör undervisa om likhetstecknet för att elevernas prestationer i matematik ska öka igen.

Vi är två kvinnliga lärarstudenter som läser två olika inriktningar. Rebecka läser till lärare med inriktning mot förskola och förskoleklass och Sari läser till lärare med inriktning mot senare år med huvudämnet matematik. Då vi läser mot olika inriktningar tycker vi att det kommer att bli spännande att jämföra elevernas förståelse för likhetstecknet eftersom vi gör vår studie mot elever i olika åldrar. Vi väljer att göra vårt examensarbete inom ramen för forskningsplattformen för lärande och undervisning i matematik. Syftet med studien är att göra en jämförelse av förståelsen för likhetstecknet mellan elever i förskoleklass och årskurs 7 före och efter att de har spelat ekvationsspelet.

För att kunna förstå ekvationer är det viktigt att ha en djupare förståelse för likhetstecknet. Ekvationsspelet är ett spel utarbetat av Wiggo Kilborn på 1970-talet för att öka elevers förståelse av ekvationer (Löwing & Kilborn 2002). Detta spel kommer vi att använda oss av för att se hur det påverkar elevers förståelse av likhetstecknet. Vår avsikt är att spela ekvationsspelet med elever i förskoleklass och årskurs 7. Spelet kommer att anpassas utifrån de olika åldrarna och kommer därför att se ut på olika sätt för att undersökningen i respektive ålder ska fungera.

2 Bakgrund

I bakgrunden ges en definition av likhetstecknet och beskrivning hur olika författare benämner symbolens två betydelser. Exempel på tidigare forskning om likhetstecknet, både nationellt och internationellt presenteras. Vidare kommer det att redogöras för vad som står om tecknet i styrdokumenten och hur vårt arbete motiveras utifrån dessa. Avslutningsvis beskrivs hur ekvationsspelet går till.

2.1 Definition av likhetstecknet och olikhetstecken

Robert Recorde var den första person som använde likhetstecknet år 1557 i sin bok om algebra. Han använde två likadana parallella linjer för att visa att någonting var ekvivalent, likvärdigt. Detta tyckte han var det bästa sättet att visa att något var lika mycket. Mer än hundra år senare förkortade John Wallis dessa linjer så att de fick det utseendet som används än idag. I engelskan används termen "equal sign". Equal betyder jämlik, likbördig, likvärdig. När du vill visa att två uttryck är likvärdiga används likhetstecknet (Grinstein & Lipsey, 2001).

Likhet definieras av Kiselman och Mouwitz (2008) som en "logisk relation som innebär att två objekt är identiska". Författarna skriver vidare ”likhetstecknet används för att ange att två uttryck betecknar samma sak, eventuellt efter en uträkning (det kan vara missledande att säga " fem plus sju blir tolv" eftersom verbet *blir* anger en förändring, alltså att 5+7 skulle vara något för att sedan bli något annat)”(s. 16). Enligt författarna är bland annat följande symboler olikhetstecken ≠, < och >. Tecknet ≠ läses som "skilt från", tecknet < läses som ”mindre än” och tecknet > läses som ” större än". Det är inte bara matematiklärare som använder sig av likhetstecknet. Lärare i svenska använder tecknet för att visa synonymer och språklärare använder det för att visa att ord på olika språk betyder samma sak.

Likhetstecknet som alltså symboliseras med två parallella streck = har två betydelser. Skilda författare beskriver dessa två betydelser med olika termer. Likhetstecknets två betydelser beskrivs som dynamisk och statisk av Pettersson (Skolverket, 2010a). Med den dynamiska betydelsen har eleven en uppfattning av att likhetstecknet står för att det är något som ska göras, det "blir något". Eleven tolkar detta som att efter likhetstecknet ska det bara stå ett tal, det vill säga svaret. Den statiska tolkningen ger en djupare förståelse för likhetstecknet för då har eleven en förståelse av att det ska vara ekvivalens mellan vänster- och högerled. Om eleven inte uppfattar att både vänster- och högerled kan existera samtidigt får han eller hon problem med algebran och ekvationer. Den dynamiska betydelsen används alltså av Pettersson medan Kieran (1981) och McNeil et al. (2006) väljer att kalla denna betydelse för operationell. Bergsten, Häggström och Lindberg (1997) liksom Wernberg (2009) väljer att använda bägge termerna, det vill säga både dynamisk och operationell. Bergsten et al. benämner den andra betydelsen för likhetstecknet med två termer, statisk och strukturell. Det gör också Wernberg men hon använder även termen relationell som nyttjas av internationella forskare såsom McNeil et al. (2006) och Hattikudur och Alibali (2010). Kieran väljer att tala om ekvivalens-begreppet istället för att nämna termen relationell. Varken Ahlberg (2000) eller Falkner, Levi och Carpenter (1999) benämner de olika förståelserna för likhetstecknet såsom operationellt eller statiskt.

Ahlberg nämner dem som “ det blir” och “en djupare förståelse” och Falkner et al. diskuterar inte förståelsen i olika termer.

I denna studie väljer vi att benämna de olika förståelserna som operationell och relationell av orsaken att likhetstecknets två betydelser då blir tydlig för oss. Operationell syftar till att en operation ska göras, att det ”blir” något medan relationell syftar till att det finns en relation mellan vänster- och högerled. Om det är likhetstecknet som står mellan leden ska denna relation vara lika, ekvivalent, till skillnad från om det är tecknet för ”skilt från”. I det sistnämnda fallet är relationen inte lika det vill säga vänsterled är ”skilt från” högerled. Man kan även dra en parallell till tecknet för ”större än”, som betyder att relationen mellan de bägge leden är ojämn då vänsterledet är ”större än” högerledet.

2.2 Tidigare forskning

2.2.1 Kritiska aspekter av matematiska symboler

Barn lär sig tidigt att urskilja likheter, olikheter, förändringar och samband mellan fenomen som barnet senare i livet kan uttrycka och beskriva med hjälp av matematiska termer. Redan innan barnet börjar tala kan det uppfatta likheter och olikheter i antal. Denna grundläggande färdighet verkar finnas redan från början hos barnet men utvecklas olika beroende på vilken miljö och kultur som det möter (Björklund, 2009)

Hoines (2008) menar att det matematiska symbolspråket kan vara ett problem för en del elever. De kanske vet vad likhetstecknet innebär men vet exempelvis inte hur symbolen ska skrivas ut eller på vilket sätt det kan användas. När yngre elever ska lära sig om symboler och siffror är det viktigt att de förstår vad de gör när de skriver det formella matematiska språket. Det här gäller för elever i alla åldrar och för att kunna använda och tillämpa symbolerna inom matematiken behöver de ha kunskap om vad de olika begreppen betyder. När eleverna lär sig om symbolfunktionen får de en matematisk insikt. Hoines skriver vidare att ett sätt att få eleverna att lära sig mer om symbolerna är att lärare pratar tillsammans med elever om symboler inom matematiken. Ett exempel på detta är siffersymbolen för antalet fyra och hur eleverna skulle kunna skriva den på olika sätt. En del elever kanske svarar genom att rita fyra streck bredvid varandra och en del skriver siffersymbolen 4. Genom att tidigt i grundskolan ge eleverna möjlighet att uttrycka sig, både skriftligt och muntligt, med symboler får de en möjlighet att fördjupa och utveckla sitt begreppsinnehåll och begreppsuttryck**.** Att uttrycka sig är viktigt när det handlar om att utveckla sina begrepp.

Ahlberg (2000) skriver att likhetstecknet ofta är en missförstådd symbol bland 6-åringarna. Hon menar att eleverna behöver möta likhetstecknet långt innan de får möta uttryck som exempelvis 3+2= __ . Om eleverna endast möter uttryck där svaret ska skrivas på höger sida om likhetstecknet är risken stor att de uppfattar tecknet som ”det blir”, därför att svaret alltid skrivs efter tecknet i sådana uppgifter. När eleverna får möta likhetstecknet på ett konkret sätt, till exempel när de får laborera med en vågskål där de kan plocka bort och lägga till saker för att det ska bli lika mycket på båda sidor, anser Ahlberg att eleverna kan få en djupare förståelse för likhetstecknet. Ett annat sätt att träna likhetstecknets innebörd med eleverna är att de får göra räknehändelser där de får jämföra, dela upp, ta bort och lägga till.

Om eleverna endast får möta likhetstecknet i uppgifter som 5+8= __, ser de likhetstecknet som en signal till att något ska göras (Bergsten et al., 1997). Eleverna uppfattar detta som att först har vi 5+8 och sen "blir" det 13. Likheten finns bara från vänster till höger. De uppfattar inte det här som ett vänsterled som ska vara lika med högerledet. Likhetstecknet får endast en dynamisk, operationell betydelse. Om eleverna även får lära sig att vänsterledet existerar samtidigt som högerledet, det vill säga att tolka likhetstecknet som "lika med" får de lättare att lösa ekvationer. Likhetstecknet får då också en statisk, strukturell betydelse. Att bredda elevers uppfattning om likhetstecknets betydelse kan göras med uppgifter av typen 13= 5+__.

När likhetstecknet introduceras i de yngre åldrarna är det ofta i samband med att eleverna börjar med addition och subtraktion (Malmer, 1990). Då får likhetstecknet enbart den operationella betydelsen ”det blir”. Likhetstecknet bör istället presenteras först och ensamt för att ge den huvudrollen och för att betona dess viktiga betydelse. I en senare bok skriver Malmer tillsammans med Adler (1996) att likhetstecknet med fördel kan presenteras samtidigt med tecknet för ”skilt från”, ≠ . Då det visar på motsatsen kan det vara lättare att förstå likheten och likhetstecknet. Här kan eleverna få en möjlighet att inte enbart se likhetstecknet som ”det blir” utan även få se dess statiska betydelse, som är ”lika med”. Det blir också tydligare för eleverna när man presenterar en ”helhet” till exempel åtta och jämför den med delarna till exempel fyra och fyra eller tre och fem. Malmer och Adler (1996) menar att det behövs konkreta material att arbeta med för att lösa olika matematiska uppgifter. De förespråkar ett laborativt arbetssätt med till exempel spel av olika slag.

Kieran (1981) har gått igenom tidigare forskning som gjorts om likhetstecknet och ekvivalens. Hon beskriver i sin artikel att om elever tillfrågas vad likhetstecknet betyder ger de exempel som tyder på en operationell förståelse för likhetstecknet. 13-åringar förstår en skriftlig uppgift men har svårt att teckna den matematiskt. Ett misstag som de gör är att använda likhetstecknet på ett felaktigt sätt, med andra ord missbruka likhetstecknet. Ett exempel på detta är när elever skriver 15+7=22−4=18. Ett korrekt sätt att skriva detta är 15+7=22, 22−4=18. Operationerna måste alltså skrivas i två led. En annan fråga som Kieran ställer sig är om eleverna har en brist i förståelsen för likhetstecknet eller om de bara förkortar processer som de utför med huvudräkning. Hon konstaterar att ekvivalens-begreppet, det vill säga att det är lika mycket på bägge sidor, är svårfångat för både yngre som äldre elever.

Många stater och distrikt i USA rekommenderar att algebra lärs ut redan i förskolan. Diskussioner pågår om på vilket sätt algebra ska läras till barnen. Förståelsen för likhetstecknet i detta sammanhang är viktig. Falkner et al. (1999) fann i sin undersökning att när elever i sjätte klass får en uppgift av typen: 8 + 4 = □ + 5, är det många som skriver 12 i rutan. Eleverna tror att svaret ska stå efter likhetstecknet och bortser helt från den sista femman. Knappt fem procent av de 752 eleverna i årskurs ett till sex som deltog i undersökningen svarade rätt på ovanstående uppgift. Redan i förskoleåldern har barnen en förståelse för likhet när de får visa det med konkret material, men de kan inte helt korrekt använda symbolen för likhetstecknet. En annan grupp barn fick en uppgift av sin förskollärare. som såg ut så här 4+5= □ +6. Barnen tror att det ska stå 9 i rutan. Med laborativt material (kuber), visar dock barnen att de kan se att 4+5 är ”mindre än” 9+6. Barnen kunde också med hjälp av materialet visa hur de skulle få bägge sidorna med kuber lika stora. Men när barnen ska visa uppgiften med symboler och siffersymboler skriver de trots detta 9 i rutan. Trots att barnen har liten erfarenhet av likhetstecknet har de redan format missförstånd angående tecknet. Dessa missförstånd kvarstår även efter en eller två exempel eller efter en enkel förklaring. Det här visade att barnen kan se likheter när de arbetar med konkret material men får problem med att relatera sin förståelse till symboler där likhetstecknet ingår. Falkner et al. kom fram till i sin undervisning av elever i årskurs 1-2 att det tar lång tid för eleverna att förstå likhetstecknets innebörd som ett tecken som beskriver ett förhållande, det vill säga att höger- och vänsterled ska vara lika mycket. Men när eleverna väl förstod innebörden kunde de förklara den med egna metaforer. En flicka uttryckte ekvivalensen med att det måste vara samma mängd på bägge sidor av likhetstecknet, “det är som en gungbräda”. Falkner et al. studie visar också på vikten av att ”utsätta” eleverna för olika varianter av uppgifter med likhetstecknet. Om eleverna alltid bara ser uppgifter av typen 6+2=__ och 5−3=__ är det lätt att förstå att likhetstecknet blir ett operativt tecken för eleverna (Falkner, Levi & Carpenter, 1999).

I en artikel beskriver Hattikudur och Alibali (2010) en studie där de har undersökt om en lektion med jämförelser med andra symboler är mer effektivt för att ge elever en relationell förståelse för likhetstecknet än en lektion som bara innehåller instruktioner om likhetstecknet. Elever i tredje och fjärde klass fick en lektion där de blev undervisade om tre relationella symboler; likhetstecknet (=), ”större än” (>) och ”mindre än”, (<). En annan grupp med elever fick enbart undervisning om likhetstecknet och en tredje elevgrupp var kontrollgrupp och fick en lektion utan symboler. Alla eleverna fick först göra ett förtest där de fick lösa uppgifter av typen “*operations on both sides”,* berätta om de kände igen likhetstecknet och vad tecknet betyder, sortera symboler (=, >, <, 4 och 9) och sortera uppgifter efter om de hade någon betydelse eller inte (7=5+2, 8−6=5). Efter lektionerna fick eleverna ett eftertest som var upplagt på samma sätt som förtestet. Eleverna som hade fått lektionen med jämförelse av de tre symbolerna visade en bättre begreppsmässig förståelse både för likhetstecknet och för olikheter jämfört med eleverna i de två andra grupperna. Författarna föreslår därför att lektioner där eleverna får möjlighet att jämföra olika matematiska begrepp bör tas med i undervisningen eftersom elevernas förståelse för begreppen ökar med sådana lektioner.

2.2.2 Matematiska operationer

McNeil et al. (2006) beskriver i sin studie elevers förståelse för likhetstecknet som en operationell symbol som talar om att någonting ska göras eller som en relationell symbol av matematisk ekvivalens. Vilken förståelse elever över elva år har för likhetstecknet är enligt författarna tidigare inte studerat. Därför utförde McNeil et al. en studie där de undersökte hur likhetstecknet används i olika matematikböcker för åldrarna elva till fjorton år och vilket namn eleverna i dessa åldrar ger likhetstecknet. I sin studie delade de in uppgifterna i fyra populära matematikböcker i olika kategorier. Dessa var uppgifter av typen "*operations equal answers"* (exempel 3+4=7) och "*nonstandards context"* (exempel 7=3+4). De senare delades även in i två olika underkategorier som var "*equations with operations on both sides of the equal sign"* (exempel 3+4=2+5) och "*other nonstandards contexts"* (exempel 7=3+4, 7=7). I studiens del av hur elever benämner likhetstecknet fick eleverna uppgifter av typen "*operations equals answer"*, "*operations on right side"* och *"reflexive contexts" (ex.7=7, 7=3+4).* På uppgifterna fanns en pil som pekade på likhetstecknet, där eleverna skulle förklara namnet på symbolen och vad tecknet betyder. McNeil et al. kategoriserade sedan svaren efter om eleverna hade en relationell uppfattning, en operationell uppfattning, en osäker ospecificerad uppfattning, exempelvis "symbolen betyder ekvivalens" eller en annan uppfattning exempelvis "jag vet inte" av likhetstecknet. I analysen av uppgifterna i matematikböckerna kom de fram till att alla matematikböckerna mer frekvent presenterar likhetstecknet i uppgifter av typen "*operations equals answers"* och mer sällan i typen av "*operations on both sides"*. Författarna menar att denna företeelse förstärker elevernas operationella uppfattning av likhetstecknet och att utformningen av uppgifter i matematikböckerna inte stärker elevernas relationella uppfattning av likhetstecknet. Även om matematikböckerna innehöll uppgifter av typen "*nonstandards contexts"* så är dessa uppgifter inte lika effektiva som uppgifter av typen "*operations on both sides"* för att eleverna ska få en relationell uppfattning av likhetstecknet. Endast 44 procent av eleverna i studien hade en relationell förståelse för likhetstecknet. Författarna menar att lärare behöver ändra sitt undervisningssätt om likhetstecknet och beskriva ekvivalens på olika sätt för att utveckla elevers uppfattning om likhetstecknet. De menar att det är viktigt att lärare är uppmärksamma på i vilka sammanhang de presenterar likhetstecknet. För små variationer i hur uppgifter presenteras kan ha betydelse för elevers uppfattning om begreppet.

2.2.3 TIMSS och PISA

Den senaste stora internationella studien TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) som undersöker elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap genomfördes 2007. Studien visar att elever i årskurs 4 och årskurs 8 presterar på en lägre nivå i matematik än genomsnittet för EU och OECD-länder som deltar i TIMSS-undersökningen. I studien ingår bland annat algebra som ett delmoment. Endast en knapp fjärdedel av de svenska eleverna svarade rätt på uppgiften 150=4x+30 (Skolverket, 2008a). I en djupanalys av de svenska elevernas matematikkunskaper från den senaste TIMSS-studien spekuleras det i att elevernas svårighet med att lösa en elementär ekvation med större tal kan bero på att likhetstecknet endast förstås dynamiskt. Om talen varit mindre hade eleverna kunnat gissa sig till en lösning. Även här, liksom i annan litteratur, diskuteras det att det är elevers uppfattning om att det i vänstra ledet är något som ska beräknas och svaret ges i högerledet som är orsaken till att de inte kan lösa uppgiften. Om elever istället har den statiska uppfattningen av likhetstecknet kan de se på problemet ur ett annat perspektiv och därigenom komma fram till en lösning (Skolverket, 2008b).

Även den senaste internationella undersökningen gjord av PISA (Programme for International Student Assessment) 2009 visar att svenska elever nu presterar på en genomsnittlig nivå i matematik. Detta är en försämring jämfört med tidigare undersökningar gjorda av PISA då svenska elever presterat på en högre nivå i matematik. En av orsakerna som diskuteras är att undervisningen i Sverige har individualiserats och mer ansvar läggs på eleven och hemmet (Skolverket, 2010d).

2.3 Vad säger styrdokumenten?

Enligt Skolverket (2010c) är det viktigt att eleverna får känna att matematik är roligt. I kursplanen för matematik finns följande:

> Utbildningen syftar till att utveckla elevens intresse för matematik och möjligheter att kommunicera med matematikens språk och uttrycksformer. Den skall också ge eleven möjlighet att upptäcka estetiska värden i matematiska mönster, former och samband samt att uppleva den tillfredsställelse och glädje som ligger i att kunna förstå och lösa problem (Skolverket, 2010c, s. 4).

I en rapport från Skolverket (2003) är slutsatsen att när eleven känner att denne förstår och känner tilltro till sitt eget lärande utvecklas intresset och glädjen för matematiken. I rapporten ges förslag i punktform om hur kvalitén på matematikutbildningen kan förbättras. En av dessa punkter är " varierat arbetssätt med inslag av laborativa metoder både individuellt och i olika gruppkonstellationer" (s. 56).

Vidare i kursplanen för matematik kan vi läsa om ämnets karaktär och uppbyggnad:

> All matematik innehåller någon form av abstraktion. Likheter mellan olika företeelser observeras och dessa beskrivs med matematiska objekt. Redan ett naturligt tal är en sådan abstraktion (Skolverket, 2010c, s. 5).
> För att framgångsrikt kunna utöva matematik krävs en balans mellan kreativa, problemlösande aktiviteter och kunskaper om matematikens begrepp, metoder och uttrycksformer (Skolverket, 2010c, s. 6).

Matematik är abstrakt och detta kan medföra att en del elever upplever matematiken som svår. Redan när eleverna kommer i kontakt med siffror som symboliserar olika antal är detta ett möte med abstraktioner precis som likhetstecknet är en abstraktion som eleverna möter tidigt i grundskolan. Eleverna ska i slutet av det tredje skolåret ha grundläggande matematiska begrepp och symboler och kunna hantera matematiska likheter inom heltalsområdet 0-20. Likhetstecknet är ett av dessa matematiska tecken som eleverna tidigt ska behärska men som inte benämns specifikt i styrdokumenten. Vi tolkar dock Skolverkets text som att likhetstecknet ingår i symbolerna.

Ett av målen att sträva mot är att eleven utvecklar sin tal- och rumsuppfattning och lär sig att använda grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler ekvationer och olikheter. Högre upp i skolåren kommer eleverna i kontakt med ekvationer. Ett av målen som eleverna ska ha uppnått i slutet av det nionde skolåret är att kunna lösa enklare ekvationer (Skolverket, 2010c). Om eleverna inte har förstått den relationella betydelsen av likhetstecknet kan de få svårigheter med att lösa ekvationer (Skolverket, 2010a). I kursplanen för matematik (Skolverket, 2010c) hade likhetstecknet en mer undanskymd plats eftersom det inte nämndes specifikt där. I nya kursplanen för matematik från läroplanen, Lgr 11 som börjar gälla från 1 juni 2011, (Skolverket, 2010d) ingår matematiska likheter och likhetstecknet i algebra under centralt innehåll för matematikämnet för årskurs 1-3. Här lyfts likhetstecknet fram på ett sätt som det tidigare inte har gjorts men det nämns fortfarande ingenting om hur viktigt det är för elever att förstå den relationella betydelsen av likhetstecknet. Däremot skriver både Pettersson (Skolverket, 2010a) och Bentley (Skolverket 2008b) på Skolverkets hemsida om hur viktigt det är att eleverna förstår den relationella förståelsen för likhetstecknet. Redan i årskurs 4-6 ska elever ges metoder för enkel ekvationslösning enligt den nya kursplanen för matematik, och i årskurs 7-9 ska eleverna ges metoder för ekvationslösning.

Skolverket lägger vikt vid att eleverna ska lära sig att använda och förstå symboler. Malmer och Adler (1999) menar att grunden för matematiken är begreppen bakom symbolerna och förmågan att bygga upp språk och tänkande. Det är viktigt att visa för eleverna att matematik är så mycket mer än siffersymboler.

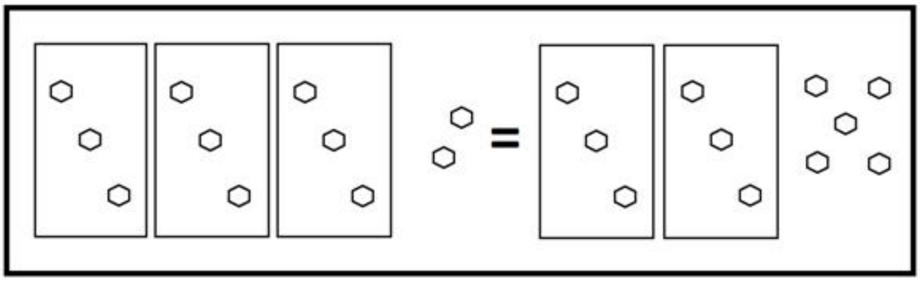
Eleven ska, enligt kursplanen i matematik, beträffande räkning med positiva heltal kunna förklara vad de olika räknesätten står för och deras samband med varandra med hjälp av till exempel konkret material eller bilder (Skolverket, 2010c). Ekvationsspelet kan användas för att konkretisera likhetstecknets innebörd för eleverna.

2.4 Ekvationsspelet

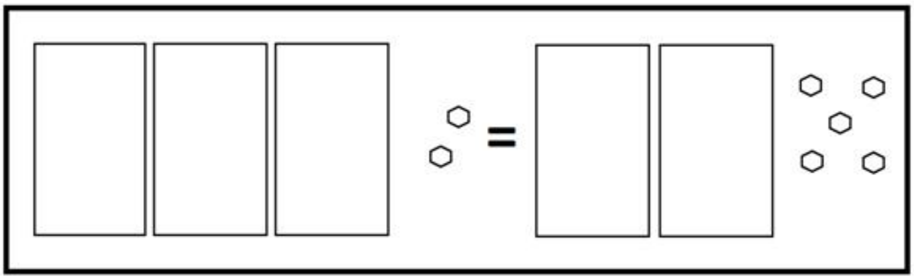
Ekvationsspelet uppfanns av Wiggo Kilborn redan 1973. I en senare bok av Löwing och Kilborn (2002) ges följande beskrivning av spelet. Spelet kan spelas av två deltagare och går ut på att deltagarna gömmer till exempel knappar i tändsticksaskar. Spelplanen består av ett papper med likhetstecknet i mitten. I spelet finns två regler:

1) Det måste ligga lika många knappar i varje ask.
2) Det måste finnas lika många knappar på varje sida om likhetstecknet. Dessa knappar kan vara gömda i en ask eller ligga bredvid en ask.

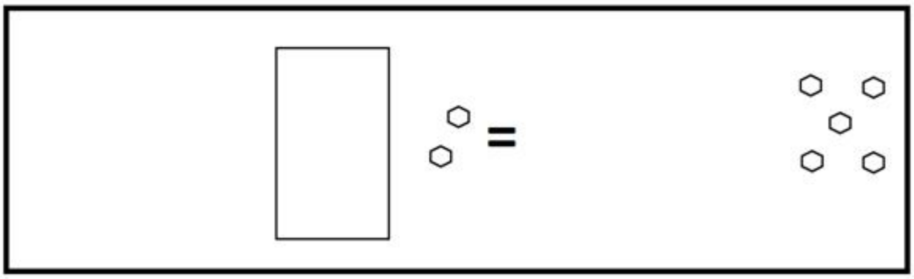
Spelet går ut på att den ena spelaren lägger upp knappar och askar på spelplanen. Den andra spelaren ska försöka lista ut hur många knappar som ligger gömda i askarna.
Elev 1 förbereder en spelomgång som kan se ut så här (askarna är öppna):



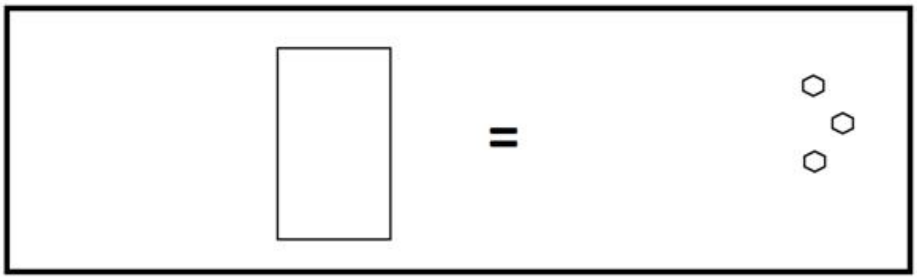
Här har Elev 1 lagt tre knappar i varje ask. Nu stänger han askarna och Elev 2 får titta och ser då de stängda askarna och knapparna utanför.



Elev 2 ska försöka lista ut hur många knappar som ligger gömda i askarna. För att göra det får han ta bort lika många askar eller knappar på bägge sidorna. Elev 2 tar då bort två askar på varje sida om likhetstecknet. Då ser spelplanen ut enligt nedan



Därefter får Elev 2 ta bort lika många knappar utanför askarna på bägge sidor om likhetstecknet. Då återstår en ask på den ena sidan och tre knappar på den andra sidan om likhetstecknet.

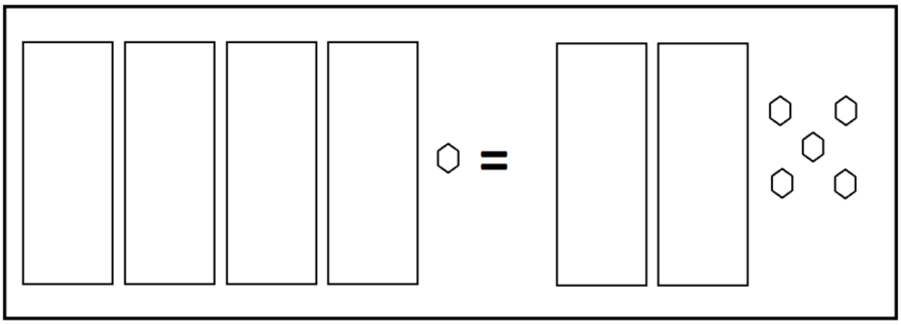


Eftersom en av spelets regler är att det finns lika många knappar på varje sida om likhetstecknet kan Elev 2 nu dra slutsatsen att det finnas tre knappar i den stängda asken. När Elev 2 har svarat får han öppna den sista asken och kontrollera sitt svar.

Om man i en omgång får till exempel tre askar kvar på ena sidan om likhetstecknet och tolv knappar på den andra sidan får man dela upp dessa tolv knappar på de tre askarna och då kommer slutsatsen förhoppningsvis vara att varje ask innehåller fyra knappar.

Syftet med spelet är att eleverna ska förstå de grundläggande reglerna för ekvationslösning. Genom att samtidigt som spelet spelas skriva upp de olika stegen formellt matematiskt kan eleverna översätta spelet till hur man löser ekvationer. När eleverna har förstått reglerna för ekvationslösning kan de ta genvägar och räkna enkla operationer i huvudet och på så vis få flyt i räknandet. Genom ekvationsspelet kan eleverna lära sig att ekvationslösning bygger på annulleringslagarna. Dessa lagar innebär att det är tillåtet att göra samma sak på bägge sidor om likhetstecknet. Du kan till exempel addera ett tal till vänster om likhetstecknet om du gör samma operation på höger sida. I föregående exempel tas först lika många askar bort på var sida och därefter lika många knappar på var sida som ligger utanför askarna. Det här kan eleverna bygga vidare på när de får behov av en mer formell metod när de kommer upp i högre åldrar och matematiken blir svårare.

Ett annat sätt att använda ekvationsspelet är att eleven kan rekonstruera hur en ekvation löses om eleven har glömt metoden. Om eleven till exempel ska lösa ekvationen 4x + 1= 2x+5 kan han eller hon avbilda ekvationen på spelplanen (Löwing och Kilborn 2002).



Genom att eleven samtidigt gör de olika stegen i spelet och skriver ner ekvationen som svarar mot askar och knappar får denne en lösning av ekvationen.

3 Syfte med frågeställningar

Syftet med studien är att göra en jämförelse av förståelsen för likhetstecknet mellan elever i förskoleklass och årskurs 7 före och efter att de har spelat ekvationsspelet.

Våra frågeställningar är:

- Vilken förståelse för likhetstecknet har elever i förskoleklass och årskurs 7 före och efter spelet?
- På vilket sätt kan ekvationsspelet påverka elevers förståelse för likhetstecknet?
- Vilka likheter och skillnader finns det mellan elevers förståelse för likhetstecknet i förskoleklass med årskurs 7?

4 Metod

Metoddelen inleds med vilka etiska överväganden som gjorts och valet av metod. Vidare redovisas urvalet för studien och hur genomförandet gjordes i respektive ålderskategori. Avslutningsvis redogörs för hur empirin analyserades och studiens reliabilitet och validitet.

4.1 Etiska överväganden

Inom all forskning finns det forskningsetiska riktlinjer från Vetenskapsrådet att följa som handlar om informationskravet, samtyckeskravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet (Vetenskapsrådet, 2005). Även Bryman (2009) skriver om dessa fyra områden. Informationskravet handlar om att personerna som deltar i undersökningen vet att deltagandet är frivilligt och att de är väl informerade om vad undersökningen handlar om. Samtyckeskravet innebär att deltagarna måste samtycka till att delta i studien, men även vårdnadshavarens samtycke krävs om eleven är minderårig. Konfidentialitetskravet avser att ingen obehörig ska komma åt personuppgifter om den deltagande och i nyttjandekravet får data som samlats in bara användas för forskningsändamålet. Dessa fyra områden inom etiken tog även vi hänsyn till i vår undersökning.

Vårdnadshavarna till eleverna i förskoleklassen fick ett brev hem under första veckan av vår verksamhetsförlagda utbildningsperiod (VFU), där det informerades om undersökningen. I brevet fick de även möjlighet att ge sitt skriftliga samtycke till om deras barn fick vara med i undersökningen och spelas in via digitalkamera (bilaga 1a). I årskurs 7 informerades eleverna om undersökningen i samband med förtestet och då delades informationsbrevet (bilaga 1b) till vårdnadshavarna ut.

Vi ville skapa goda relationer med eleverna som skulle vara med i vår undersökning för att de skulle känna sig trygga samt vilja och våga vara med i vår undersökning. Det poängterades att det var frivilligt att vara med och att deltagandet kunde avbrytas när som helst. Vårt ämne i undersökningen ansåg vi till en viss del inte vara ett känsligt område eftersom det inte handlade om personliga frågor. Men å andra sidan fanns en medvetenhet om att det kunde vara känsligt för eleverna då de kunde uppfatta det som att vi prövade deras kunskap. Allt medverkande skedde därför på frivillig basis, ingen elev skulle behöva känna sig tvingad att ställa upp. I årskurs 7 fanns det elever som vi skulle velat fortsätta att spela med eftersom vi av förtestet bedömde att dessa elever hade en operationell förståelse av likhetstecknet. Men eftersom de inte ville fortsätta så accepterade vi det med hänsyn till samtyckeskravet.

Vår data behandlades konfidentiellt, det vill säga eleverna som deltog kan inte identifieras i efterhand då namnen fingerades i uppsatsen och vår data lästes bara av oss och vår handledare på högskolan. Empirin kommer inte att lämnas ut till någon obehörig och används endast för denna uppsats. Tre månader efter att vår uppsats har blivit godkänd kommer empirin att förstöras. Vi anser att de elever som deltog i vår studie inte kommer att drabbas av några negativa konsekvenser. Däremot hoppas vi på positiva effekter där eleverna får en ökad förståelse för likhetstecknet.

Kvale och Brinkmann (2009) skriver att det är forskarens integritet som är avgörande för kvalitén på den vetenskapliga kunskapen. Integriteten handlar om den kunskap, erfarenhet, hederlighet och rättrådighet som forskaren besitter. Vi är medvetna om att vi inte är fullfjädrade forskare men vår avsikt var att behandla eleverna med respekt och vara medvetna om vår roll som forskare.

4.2 Metodval

Syftet med studien är att göra en jämförelse av förståelsen för likhetstecknet mellan elever i förskoleklass och årskurs 7 före och efter att de har spelat ekvationsspelet. Elevernas förståelse för likhetstecknet före ekvationsspelet jämfördes med hur den förståelsen såg ut efter att ekvationsspelet spelats med dem. Vi inspirerades av beskrivningar av learning studies när vi valde att göra för- och eftertest samt spela ekvationsspelet med eleverna. En learning study beskrivs av Wernberg (2009) som en serie lektioner (2-4 stycken) där lärare och forskare försöker hitta de kritiska aspekterna för ett lärandeobjekt genom att analysera den första lektionen och sedan förändra den för att skapa ännu bättre möjligheter för en ny grupp av elever att förstå lärandeobjektet i nästa lektion. Ett lärandeobjekt är det som eleverna ska lära in, till exempel formen på en triangel och de kritiska aspekterna är de aspekter i lärandeobjektet som eleven behöver upptäcka för att få en förståelse av lärandeobjektet. I fallet med triangeln kan de kritiska aspekterna för eleven vara att förstå att triangeln ska ha tre sidor eller att dessa sidor kan vara lika långa eller olika långa. I en learning study görs någon form av kartläggning av de kritiska aspekterna av lärandeobjektet genom studier av elevernas tidigare kunnande. Ett eftertest genomförs för att se att den utökade kunskapen, som eleverna tillgodogjort sig, verkligen grundats på en utvecklad förståelse som finns kvar en längre tid.

I vårt fall var lärandeobjektet likhetstecknet och en tänkbar kritisk aspekt var om eleverna skulle förstå att det ska vara ekvivalens, det vill säga lika mycket på båda sidor om tecknet. Elevernas tidigare kunnande kartlades genom ett förtest. Istället för en serie med lektioner med hela klasser valde vi att spela ekvationsspelet vid endast ett tillfälle med en elev i taget. Här skiljer sig delvis vårt utförande från en learning study eftersom vi endast har ett speltillfälle. Genom spelet försöktes likhetstecknets relationella innebörd för eleverna tydliggöras. Ekvationsspelet åtföljdes av ett eftertest för att se om elevens förståelse hade ändrats.

För- och eftertestet i förskoleklassen genomfördes i form av en semistrukturerad intervju. Bryman (2009) beskriver den semistrukturerade intervjun som relativt flexibel. Forskaren har då en intervjuguide med ett antal frågor om det specifika ämne hon vill komma in på. Den semistrukturerade intervjun valdes för att ge eleverna stor frihet att svara med egna ord och möjlighet att ge utförliga svar. Här fanns det också en möjlighet för oss att ställa följdfrågor till de svar som eleverna gav. För förskoleklassen utformades ett förtest med frågor och uppgifter kring likhetstecknet som användes som en intervjuguide (bilaga 2a). Uppgifterna skapades efter inspiration från en learning study i matematik där uppgifter av liknande slag finns utformade av Runesson (2006). Våra uppgifter bestod av både symboler och uppgifter av typen "*nonstandars context*". Andra symboler än likhetstecknet visades även för eleverna för att de skulle få se en motsats till likhetstecknet.

Ekvationsspelet med förskoleklassen modifierades med förenklade uppgifter för att passa de yngre eleverna och för att de skulle kunna få en möjlighet att ta till sig det. Spelet spelades efter ett, i förväg, uppgjort schema (bilaga 3a) för att alla spelomgångarna skulle bli så lika varandra som möjligt och därigenom underlätta analysen. Efter spelomgången ville vi se om elevernas förståelse hade förändrats, därför utformades ett eftertest (bilaga 4a) efter samma princip som förtestet.

Förtestet i årskurs 7 gavs som ett skriftligt test till eleverna (bilaga 2b). McNeil et al. (2006) har undersökt om uppgifter av olika slag kan hjälpa elever att få en relationell förståelse för likhetstecknet. De kom fram till att uppgifter med "*operations on both sides"*, (3+4=2+5) bäst främjar denna förståelse. Vi använde oss av sådana uppgifter tillsammans med uppgifter av typen "*operations equal answer"*, (3+4=7) i förtestet för att försöka identifiera om deras förståelse är operationell eller relationell. Vi försökte upptäcka missförstånd hos eleverna kring likhetstecknets användning genom att uppgifterna var utformade som "*operations on both sides"*. Kieran (1981) och Falkner et al. (1999) beskriver missförstånden av typen "*operations equal answer"* och om en uppgift är av typen 3+5= __−2 bortser eleven från den sista tvåan och svarar åtta.

Ekvationsspelet med eleverna följde också ett i förväg uppgjort schema (bilaga 3b) men spelades som det beskrivs av Löwing och Kilborn (2002). Det var meningen att även spelomgångarna med årskurs 7 skulle spelas in. Men på grund av att inga påskrifter från föräldrarna kom in med tillstånd att filma eleverna kunde inte videofilmandet genomföras. I stället löste vi det genom att en av oss förde anteckningar under spelets gång. Detta blev då en icke-deltagande ostrukturerad observation. Bryman (2009) förklarar detta som en situation där observatören iakttar men inte deltar i skeendet. Ostrukturerad innebär att ett i förväg uppgjort observationsschema inte används. Ett eftertest (bilaga 4b) skapades efter samma princip som förtestet. En av uppgifterna i eftertestet hade utformats på ett annat sätt än i förtestet för att se om en uppgift med "*operations on both sides"*, med subtraktion i högerledet i stället för addition var svårare för eleverna att lösa. Den svårare uppgiften var 12+5=__−8 mot tidigare 12+5=__+8 (se uppgift 2 i eftertestet bilaga 4b).

4.3 Urval

Elever i förskoleklass och årskurs 7, som vi mött under den senaste VFU-perioden, valdes ut då de motsvarade våra två olika inriktningar. När vi utgick från dessa elever gjordes ett bekvämlighetsurval. Det innebär att forskaren använder sig av sådana personer i sin undersökning som för tillfället råkar finnas tillgängliga för denne (Bryman, 2009). En anledning till att välja elever som vi mött under VFU-perioden var att när vi intervjuade och spelade med eleverna kände vi att det var viktigt att ha goda relationer med dem för att de skulle känna sig bekväma i situationen. Bryman menar att relationen till den som intervjuas bör vara tillitsfull men samtidigt får den inte bli för avslappnad. Då är det risk att respondenten ger de svar som denne tror att intervjuaren vill ha. Här är det viktigt att hitta en bra balans.

I förskoleklassen var det två elever som inte ville vara med och tre elever som inte lämnade in någon lapp. På så sätt blev det ett bortfall på fem personer av de från början 22 elever som vi hade att utgå från. Av dessa 22 elever valdes fem slumpmässigt ut som var intresserade av att delta. Fem elever ansågs vara ett lämpligt antal för att göra det möjligt att tolka intervjuerna mer ingående och för att empirin skulle bli hanterbar eftersom vår undersökning är kvalitativ. I en sådan undersökning är det inte antalet som är det viktiga utan innehållet som är väsentligt (Kvale & Brinkmann, 2009).

Förtestet i årskurs 7 gjordes av 22 elever i en klass bestående av 23 elever. En elev i klassen var sjuk vid detta tillfälle. Det höga antalet elever motiveras av att förtestet inte behöver transkriberas utan enbart analyseras för att upptäcka elevernas förståelse för likhetstecknet och för att få ett urval till spelomgången. Hälften av eleverna var inte intresserade att fortsätta spela spelet och av dem elva som vi kunde gå vidare med fanns två elever med operationell förståelse och sju elever med relationell förståelse och två elever som hade missförstått frågan om likhetstecknet. Till spelomgången med ekvationsspelet var vår önskan att få med elever som utefter förtestet tolkades ha en operationell förståelse av likhetstecknet. Vi fick möjlighet att göra våra speltillfällen under en dag och frågade då elever under lektionstid om de ville spela med oss. De som tidigare sagt att de var villiga att fortsätta ville det nu med. När spelomgången med den femte eleven skulle börja kom vi underfund med att vi bara hade valt pojkar att spela med. Därför valde vi att göra ytterligare en spelomgång för att få med en flicka i urvalet och därmed blev det sex elever från årskurs 7. Tanken från början var att även här ha fem elever med som spelade ekvationsspelet.

I bägge ålderskategorierna gjordes studien med både flickor och pojkar och även med elever med olika etnisk ursprung. Dock är detta ingenting som vi lägger vikt vid eller kommer att diskutera i diskussionen.

4.4 Genomförande

I detta avsnitt beskrivs först de förhållanden som var gemensamma för bägge ålderskategorierna. Därefter redogörs för varje ålderskategori för sig.

Datainsamling gjordes under vår VFU- period och i anslutning till den. Utförandet skedde i form av ett förtest, spel av ekvationsspelet och ett eftertest med var och en av eleverna som deltog i vår undersökning.

Förtesten var utformade efter samma grundprincip men de var anpassade efter eleverna i förskoleklass respektive eleverna i årskurs 7 eftersom det är så stort spann i åldrarna mellan dessa grupper. Grundprincipen i de båda testen var att ta reda på om och i så fall vilken förståelse eleverna hade för likhetstecknet. Längre ner kommer beskrivning om hur detta gick till i de olika åldersgrupperna.

När ekvationsspelet spelades i förskoleklassen genomfördes detta med en av oss och med en elev i taget. Det gjordes på samma sätt i årskurs 7. Vårt ekvationsspel bestod av tomma tändsticksaskar och plastpärlor i ärtstorlek.

4.4.1 Genomförande förskoleklass

Efter att informationsbreven (bilaga 1a) med påskrifterna mottagits och de fem eleverna som skulle delta valts ut påbörjades undersökningen. Det var några fler som ville vara med och spela, så de fick spela spelet men detta dokumenterades inte och användes heller inte till vår uppsats. Förtesten, eftertesten och spelomgångarna med eleverna i förskoleklassen skedde i ett litet grupprum där tanken var att vi kunde sitta ostört med en elev i taget. Förtestet med eleverna skedde under en dag, några dagar senare spelades ekvationsspelet och efter ytterligare några dagar utfördes eftertesten med de inblandade eleverna.

Förtestet genomfördes i intervjuform där en av oss satt enskilt med en elev i taget. Här ställdes några frågor till eleven om likhetstecknets betydelse och användning. Anteckningar togs skriftligen upp utifrån frågorna och uppgifterna på förtestet. Under samtalets gång lades ett kort fram med likhetstecknet (=) ritat på. Eleven visades även ett kort med tecknet för ”skilt från” (≠) och även ett kort med två prickar (:) på. Detta för att se om eleven kunde se skillnad på symbolerna och få en förståelse för att de tre korten har olika betydelser. Kortet med prickarna på visades som en kontrast till linjerna i likhetstecknet, och därför lades det ingen vikt på att det faktiskt är ett semikolon. Betydelsen av prickarna togs inte upp på grund av att den inte hade något att göra med studiens syfte. Där finns inte heller tecknet för ”skilt från” med, men det visades för eleverna eftersom det är en motsats till likhetstecknet. Förtestet med frågorna och uppgifterna finns beskrivet i särskild bilaga (bilaga 2 a).

Spelsituationerna i den anpassade/modifierade formen av ekvationsspelet med eleverna i förskoleklassen spelades in med ljud- och bildupptagning via en digitalkamera som hölls i ena handen medan spelet pågick. Spelplanen bestod av ett vitt papper med en mindre gul lapp ovanpå som likhetstecknet var ritat på. Spelplanen placerades rakt framför eleven och spelledaren satt på elevens vänstra sida och filmade samtidigt händerna och spelade in rösterna under spelets gång (bilaga 3a). På vardera sidan om likhetstecknet fanns tre öppna askar med lika antal pärlor i varje. Spelledaren nämnde att det heter ekvationsspelet, men tyngdpunkten låg på förklaringen att det “är ett spel som handlar om likhetstecknet ”. Det kändes viktigt att eleverna förstod och kunde få en möjlighet att ta till sig innehållet och vad det innebar. Därför var det innehållet och inte spelets namn som var det väsentliga i detta fall. Eftertestet i förskoleklassen var likadant som förtestet men med några tilläggsfrågor med huvudsakligen uppgifter med operationer på en sida (bilaga 4a). Dessa tilläggsuppgifter lades till för att vi upplevde förtestet som ganska lätt för många av eleverna och för att de inte skulle kunna svara likadant som på förtestet. Eleverna gavs en utmaning för att intresset skulle bibehållas. Precis som i förtestet togs anteckningar upp skriftligen under eftertestet och ingen filmning skedde heller här.

4.4.2 Genomförande årskurs 7

Förtestet (bilaga 2b) delades ut till klassen i början av en lektion. Innan utdelningen informerades eleverna om att det var ett förtest som behövdes som underlag för en studentuppsats på högskolan. Eleverna informerades även om att ett antal elever skulle väljas ut för att spela ekvationsspelet och att det var frivilligt att delta. När ekvationsspelet nämndes kom det frågor från eleverna vad en ekvation är. Klassens lärare visade ett exempel på en ekvation på tavlan. Under förtestet fick eleverna svar på de frågor de ställde exempelvis "är det här rätt" för att de inte skulle känna sig för osäkra på hur uppgifterna skulle lösas. I samband med att eleven var klar med förtestet fick han eller hon informationsbrevet (bilaga 1b) att ta med till vårdnadshavare för påskrift.

Spelomgångarna genomfördes i ett grupprum med genomgångsmöjlighet där endast en annan lärare passerade under speltillfällena vilket inte upplevdes som störande. Spelet följde ett i förväg uppgjort schema för vilka förklaringar som eleven skulle få om spelets regler och vilka ekvationer som skulle läggas upp (bilaga 3b). Spelet avslutades med en ekvation som inte har någon lösning för att möjlighet skulle ges att förklara tecknet för ”skilt från” för eleven. De sex eleverna som deltog i spelet fick direkt efter att spelomgången var slut ett eftertest (bilaga 4b) att fylla i under dagen. En del elever tog med sig testet tillbaka till klassrummet för att göra det senare medan en del elever valde att sitta kvar och göra det i direkt anslutning till spelomgången. Eftertesten från de elever som valt att göra det under dagen samlades in samma dag. Efter två spelomgångar gavs en möjlighet för oss att gå igenom anteckningarna från dessa spel. Direkt när alla sex spelomgångarna var färdiga gjordes en genomgång av noteringarna för att se om spelsituationerna uppfattats lika.

4.5 Analys

I analysen har elevernas förståelse för likhetstecknet varit i fokus. Har eleverna en operationell eller relationell förståelse för likhetstecknet? Detta bedömdes genom att vi analyserade hur eleverna svarade på frågorna om likhetstecknet och dess användning och hur de löste uppgifterna i förtestet. Efter spelomgången med ekvationsspelet bedömdes elevernas sätt att svara på frågor om likhetstecknet och hur de löste uppgifter i eftertestet för att se om deras förståelse hade förändrats. Sedan jämfördes elevernas förståelse för likhetstecknet före och efter ekvationsspelet i de olika åldrarna genom att vi tog del av varandras empiri.

Anteckningarna från för- och eftertesten i förskoleklassen renskrevs och elevernas namn fingerades för att eleverna inte skulle kunna identifieras. Filminspelningarna från spelomgångarna med förskoleklassen transkriberades. Med hjälp av förtesten analyserades vilken förståelse förskoleeleverna hade av likhetstecknet, det vill säga hur många som visste hur tecknet användes, hur många som kände igen tecknet verbalt och hur många som även kände igen symbolen skriftligt. Efter spelomgångarna och eftertesten analyserades eftertesten på samma sätt som förtesten för att se om elevernas förståelse för likhetstecknet hade ändrats. Två översikter med sammanfattningar av elevernas svar från de olika testen i förskoleklassen upprättades. Den ena översikten innehöll svaren från förtesten och den andra översikten innehöll svaren från eftertesten. De fem elever i förskoleklassen som var med i undersökningen fick varsin rubrik i översikten med en sammanfattning av deras svar. Detta gjordes för att det lättare skulle kunna ske en jämförelse i de olika svaren hos individerna. Sammanfattningen gjordes för att tydliggöra skillnader, likheter, eventuella svårigheter samt ökade kunskaper.

Elevernas svar från förtesten i årskurs 7 delades först upp i de som ville fortsätta och spela ekvationsspelet och de som redan under förtestet uttryckte att de inte ville fortsätta. Svaren från samtliga elever sammanställdes sedan i tabellform med hur varje elev svarat på frågan om likhetstecknet och vilken frekvens av rätta lösningar eleven hade på de olika uppgifterna. Detta för att få en klarare översikt av elevernas svar. Två tabeller gjordes, en för dem som ville fortsätta och en med dem som inte ville fortsätta.

Ytterligare en tabell gjordes utifrån elevernas svar på förtestet. I denna tabell skrevs om eleven hade en operationell förståelse för likhetstecknet, en relationell förståelse eller om eleven hade missförstått första frågan och om eleven använde sig av lösningar av typen "*operations on both sides* " eller av "*operations equal answers* ". Uppgift tre på förtestet kan lösas både som en " *operations on both sides* " eller som en "*operations equal answers*" och gav oss en möjlighet att se vilket lösningssätt eleven föredrog. Elever som har en operationell förståelse har svårare att lösa uppgifter av typen "*operations on both sides*". Stämde vår bedömning av elevens förståelse överens med vilket lösningssätt eleven föredrog? Denna jämförelse gjordes för att verifiera bedömningen utifrån de första svaren.

Anteckningarna från spelomgången med de sex eleverna renskrevs samtidigt som dessa elevers namn fingerades. Eftersom det bland eleverna i årskurs 7 endast fanns en flicka med bland de sex eleverna som fortsatte att spela valdes könsneutrala namn för att hon inte skulle kunna identifieras. Elevernas svar från eftertesten sammanställdes efter samma princip som svaren i förtestet.

Den första bearbetningen av empirin gjorde var och en av oss enskilt genom att renskriva, transkribera och sammanställa i tabeller. Sedan lästes renskrivningarna från förtesten med eleverna i förskoleklass tillsammans för att se vilken förförståelse eleverna hade av likhetstecknet. En tabell gjordes över vilka elever som kände igen tecknet verbalt, vilka som kände igen den som tecknad symbol och vilka som inte hade någon tidigare erfarenhet av likhetstecknet. Transkriberingarna från ekvationsspelet lästes sedan igenom av oss båda för att få en klar bild av hur spelomgångarna hade gått till. Renskrivningarna från eftertesten med förskoleklassen analyserades tillsammans för att försöka fastställa om elevernas förståelse av likhetstecknet hade ändrats. Här sattes resultaten in i samma tabell som förtestet (fast med annan färg) för att lättare kunna jämföra elevernas förståelse före och efter ekvationsspelet.

Renskrivningarna från ekvationsspelet med årskurs 7 lästes igenom tillsammans för att se hur spelomgångarna hade gått till. De individuella svaren från för- och eftertestet jämfördes för att se om elevernas svar hade förändrats efter att de spelat ekvationsspelet eftersom syftet var att se om deras förståelse hade påverkats av spelet.

Efter att bägge fått del av all empiri kunde jämförelser göras mellan de olika åldersgrupperna för att leta efter likheter och skillnader mellan dessa. Detta gjordes genom att diskutera de olika förståelserna som eleverna hade bedömts att ha. Skillnader och likheter kunde bestå av både hur eleverna uttryckte sig om likhetstecknet men även hur de löste uppgifterna.

4.6 Reliabilitet och validitet

Reliabilitet handlar om undersökningens tillförlitlighet (Bryman, 2009). Undersökningen beskrivs så noggrant som möjligt i metoddelen för att en annan forskare ska kunna upprepa undersökningen och komma fram till liknande resultat. I naturvetenskapliga undersökningar är detta ett mycket rimligt krav men när det gäller undersökningar där människor deltar kan detta krav inte uppfyllas. Svaren från en respondent kan skilja sig från en gång till en annan beroende på vem som intervjuar och om respondenten mellan intervjutillfällena har kommit till nya insikter, kanske tack vare reflektion inspirerad från den första intervjun. Elevers förståelse för likhetstecknet har varit i fokus och reliabiliteten handlar om våra tolkningar av resultaten och om den förståelsen som eleverna bedömdes ha verkligen fanns. Liknande undersökningar har genomförts tidigare (Hattikudur & Alibali, 2010; Wernberg, 2009) där resultaten påminner om dem i denna studie.

Validiteten handlar om huruvida undersökningen mäter det som man avsett att mäta. I en kvalitativ undersökning som vår genomförs ingen mätning i egentlig mening. Därför är trovärdighet ett bättre mått på undersökningens kvalité (Bryman, 2009). Trovärdigheten i denna undersökning stärks genom citat från elevernas svar som har använts för att tolka deras förståelse av likhetstecknet i resultatdelen samt genom analys av varandras material.

5 Resultat

I resultatet beskrivs vilken förståelse för likhetstecknet eleverna i de olika ålderskategorierna hade före ekvationsspelet. Därefter skildras hur elevernas förståelse eventuellt har ändrats efter ekvationsspelet. Till sist görs en jämförelse av förståelsen för likhetstecknet mellan eleverna i förskoleklassen och eleverna i årskurs 7. Citaten utgör exempel från elevutsagor i syfte att stärka vår bedömning av om eleverna har en operationell eller relationell förståelse för likhetstecknet. Alla namnen är fingerade och eleverna i årskurs 7 har dessutom fått könsneutrala namn.

5.1 Förståelsen för likhetstecknet hos eleverna i förskoleklassen före spelet

Elevernas förståelse utifrån förtestet var varierande. De första tre frågorna handlade om likhetstecknets betydelse och användning. Sandra visade sin kunskap om symbolen när hon uttryckte sig på följande sätt: "lika med tecknet används för att säga att det är något". Hon visade kunskap om hur likhetstecknet benämns och hur det kan användas. Ett annat exempel var Anna som sa: ”Min pappa brukar fråga hur mycket 100+100 blir. Då säger jag att det blir 200”. Ytterligare ett exempel var Christoffer som uttryckte följande: ”Om man använder plus så använder man lika med, så att det blir något”. Dessa elever bedömdes ha en operationell förståelse utifrån deras utsagor. Ingen av eleverna nämnde något som kunde tolkas som att de hade en relationell förståelse för likhetstecknet. Det var två elever som inte visade någon förkunskap om likhetstecknet. Samuel svarade: ”Det ser ut som två streck eller en väg” och för Cecilia var symbolen helt främmande. Dessa två elever hade enligt vår bedömning av deras svar varken en relationell eller en operationell förståelse för likhetstecknet.

Ingen av eleverna kände igen tecknet för ”skilt från” (≠) eller två prickar (:)som visades i fråga fyra och som eleverna fick jämföra med likhetstecknet. En elev trodde att alla tre tecknen betydde "lika med" trots att eleven såg att symbolerna var olika.

I uppgifterna ett till tio med symboler och uppgifter av typen ”n*onstandard contexts”* behövde eleverna en stödfråga till vad som skulle göras. Stödfrågorna såg ut på olika sätt, till exempel "hur mycket är det på ena sidan om likhetstecknet" eller "ska du jämföra sidorna med varandra"? Eleverna jämförde sedan symbolerna och siffersymbolerna för att ta reda på om det var lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. För att klara detta använde en del av eleverna huvudräkning, andra räknade högt för sig själv och några använde fingrarna när de löste uppgifterna.

5.2 Förståelsen för likhetstecknet hos eleverna i förskoleklassen efter spelet

Ekvationsspelet i förskoleklassen var ett lärtillfälle mellan förtest och eftertest. Transkriberingarna från dessa filminspelningar visade exempel på hur eleverna löste uppgifterna kring ekvivalens utifrån konkret material, som i vårt fall bestod av pärlor och tändsticksaskar. Det som var intressant var att analysera hur elevernas förståelse hade ändrats. För att upptäcka denna förändring jämfördes elevernas svar från förtesten med svaren från eftertesten. Det kunde konstateras att det fanns vissa skillnader mellan elevernas svar på de bägge testen. Kunskapen hade ändrats för fyra av eleverna, medan en av eleverna visade samma kunskap på både förtestet som på eftertestet. Förändringar hos eleverna bestod främst i vad likhetstecknet heter. Exempelvis kallar de först symbolen för "lika med tecknet", senare kallar de symbolen för dess korrekta namn, likhetstecknet. Andra förändringar handlade om likhetstecknets användning och innebörd. Nu kunde eleverna även känna igen likhetstecknet när de såg den i tryck, till exempel på en kassaapparat i dockvrån.

På de första frågorna i eftertestet kunde nu även de två eleverna som tidigare inte hade någon kunskap om likhetstecknet benämna vad likhetstecknet hette och hur det kunde användas. Samuel som i förtestet benämnde symbolen som "två streck" kallade den i eftertestet för ”lika mycket". Samuel och Cecilia hade svårt att förstå att svaret kunde stå antingen före eller efter likhetstecknet. Det tolkades som att dessa elever nu hade fått en operationell förståelse för likhetstecknet men däremot inte en relationell förståelse.

Christoffer förändrade inte sina kunskaper om likhetstecknet i och med spelet men visade dock hela tiden sitt intresse för frågorna, uppgifterna och spelet. Han visade en operationell förståelse för likhetstecknet då han ger liknande svar samt behöver hjälp med samma slags frågor och uppgifter både vid för- och eftertest.

Endast en elev kunde förklara vad tecknet för ”skilt från" hette men kunde inte förklara dess användning.

Uppgifterna ett till tio som handlade om att eleverna skulle försöka upptäcka om det var lika mycket i höger- som vänsterled om likhetstecknet klarade samtliga med lite stöd. Tilläggsuppgifterna elva till tjugo var utformade som föregående uppgifter, men med operationer på ena sidan om likhetstecknet. Även dessa uppgifter klarade alla eleverna men med stöd. Uppgifterna med fler än två tal på ena sidan om likhetstecknet, exempelvis uppgift 20 i eftertestet: (3+2+1=6) var svårare för eleverna att lösa.

5.3 Förståelsen för likhetstecknet hos elevernas i årskurs 7 före spelet

Av de 22 eleverna som gjorde förtestet bedömdes sju ha en operationell förståelse, tolv bedömdes ha en relationell förståelse medan tre elever hade missförstått frågan. Huvuddelen av eleverna svarade att tecknet = betyder "lika med" eller "lika mycket på bägge sidor" på första frågan. I vår bedömning av om eleven har en operationell eller relationell förståelse för likhetstecknet har elevens svar av hur likhetstecknet används haft en avgörande betydelse. De elever som bedömdes ha en operationell förståelse för likhetstecknet har i sin förklaring av hur tecknet används svarat som till exempel Alex, “ för att räkna ihop allt visar svaret“ eller som Kim, “det står alltid innan svaret”. Några elever var svårbedömda, däribland Robin. De svårbedömda eleverna hade också svarat att symbolen betyder “lika med” men har i sin förklaring av hur det används svarat “ till exempel när man berättar vad 2+2 blir”(Robins svar) eller “man använder det till exempel om man skriver 8+5=13”. Då har vi tittat på hur de har löst uppgift två och tre i förtestet för att få mer underlag att bedöma efter.

De som bedömdes ha en relationell förståelse har även de svarat med att tecknet betyder lika med men har i sin förklaring inte förklarat med något som “svaret” eller “blir” utan istället svarat som till exempel Kaj ”det betyder att man har lika mycket på båda sidorna av tecknet”. Detta har då bedömts som att eleverna verkligen har en relationell förståelse av likhetstecknet eftersom de inte använder ord som att det ska **bli** något. De som missförstod uppgiften har trott att första frågan gällde vad frågetecknet betydde. Endast en av de 22 eleverna kände igen tecknet för ”skilt från” i förtestet.

Avsikten med uppgift två på förtestet var att se om eleverna klarade uppgifter av typen “*operations on both sides*”. De flesta eleverna har klarat sex till sju av sju deluppgifter. Två av eleverna hade gjort fel av den typen som Kieran (1981) och Falkner (1999) beskriver. Fyra av eleverna har löst uppgiften 13=9+__ genom att sätta in 22 på den tomma platsen. De har alltså tagit för givet att det är en uppgift av typen “*operations equal answer*” utan att titta ordentligt vilken ordning tecknen står i. Det var samma avsikt med uppgift tre som bestod av tre deluppgifter. En av dessa såg ut enligt följande: sätt tecken mellan siffrorna 2 3 6 1 så att det stämmer. Denna kan lösas genom exempelvis 2+3=6−1. Fem av eleverna som bedömts ha en operationell förståelse och en av de som missförstod frågan om vad tecknet = betyder har löst uppgift tre oftare genom “*operations equal answer*” eller inte klarat att lösa denna uppgift alls. Exemplet ovan kan lösas som en ”*operations equal answer*” om svaret görs till -1. En elev har löst den enligt följande 2x3=6 och strykt sista ettan för att kunna göra en lösning av typen “*operations equal answer*”. Detta stärker vår bedömning att eleven har en operationell förståelse av likhetstecknet.

Uppgift fyra bestod av sex ekvationer som till exempel 5x+1=2x+7. Avsikten med uppgiften var att se elevernas kunskaper i ekvationslösning eftersom ekvationsspelet skulle spelas med några av dem. De elever som redan hade strategier för att lösa ekvationer var inte intressanta för oss att spela med dels för att ekvationsspelet ger en grundläggande strategi för hur ekvationer kan lösas och dels för att de elever som klarar att lösa ekvationer troligare har en relationell förståelse för likhetstecknet.

Av de elever som spelade ekvationsspelet bedömdes Alex och Kim ha en operationell förståelse. Jean, Kaj och Robin bedömdes ha en relationell förståelse av likhetstecknet och Louis hade missförstått första frågan.

5.4 Förståelsen för likhetstecknet hos eleverna i årskurs 7 efter spelet

Vi ville se om ekvationsspelet kunde få eleverna att uppfatta likhetstecknet som en relationell symbol istället. Eleverna bedöms inte ha ändrat sin förståelse av likhetstecknet efter omgången med ekvationsspelet. De svarade på liknande sätt på första frågan om likhetstecknets betydelse och användning i eftertestet som i förtestet. På frågan om likhetstecknets betydelse svarade till exempel Alex att tecknet betyder ”att det är lika mycket på båda sidor”. Detta svar skulle kunna tolkas som att Alex har en relationell förståelse för likhetstecknet men han svarar ”när man ska räkna ut summan” på frågan om likhetstecknets användning. Louis som hade missförstått frågan om likhetstecknet löste uppgifter enligt “*operations on both sides*” på både för- och eftertestet och klarar även att lösa fler ekvationer än de flesta andra i klassen. I eftertestet förklarade Louis att likhetstecknet används “när det är lika mycket på båda sidor”. Även Louis bedömdes utefter eftertestet ha en relationell förståelse för likhetstecknet och hade med största sannolikhet haft den hela tiden.

I eftertestet hade en del av deluppgifterna i uppgift två gjorts svårare. Fyra elever hade alla rätt på uppgift två i förtestet medan endast två elever hade alla rätt på denna uppgift i eftertestet. Den svårare uppgiften i eftertestet klarare Jean, Kaj och Louis. Robin som var svårbedömd vad gällde förståelsen lyckades inte lösa den uppgiften korrekt.

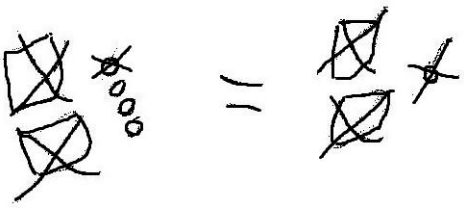
Fem av eleverna kunde efter spelomgången känna igen tecknet för ”skilt från”. Fyra av eleverna använde tecknet korrekt på den sista ekvationen som inte har någon lösning

5.5 Jämförelse av förståelsen för likhetstecknet mellan eleverna i förskoleklassen och årskurs 7

Förståelsen för likhetstecknet var djupare hos eleverna i årskurs 7 än hos eleverna i förskoleklassen före ekvationsspelet. För två av eleverna i förskoleklassen var likhetstecknet något helt nytt medan alla eleverna i årskurs 7 var bekanta med tecknet. De kände igen likhetstecknet och var vana att se det i matematiska uppgifter. Det fanns elever både i förskoleklassen och i årskurs 7 som hade en operationell förståelse för likhetstecknet. Däremot var det bara elever i årskurs 7 som hade en relationell förståelse för likhetstecknet. En skillnad mellan eleverna i de olika ålderskategorierna var att fyra av fem elever i förskoleklassen hade fått mer kunskaper om likhetstecknet genom intervjuerna och spelet medan eleverna i årskurs 7 inte hade ändrat sin förståelse för likhetstecknet genom spelet

Både eleverna i förskoleklassen och eleverna i årskurs 7 benämner likhetstecknet med ”lika med tecknet”. I eftertestet benämner dock två av eleverna i förskoleklassen likhetstecknet med “likhetstecknet” istället för “lika med tecknet”. Detta kan bero på att under ekvationsspelet använde spelledaren oftast ordet likhetstecknet när symbolen nämndes.

En likhet mellan eleverna i förskoleklass och eleverna i årskurs 7 var att eleverna använde sig av något slags hjälpmedel (fingrarna, räknade högt för sig hjälp eller askarna och pärlorna) när uppgiften blev svår för dem. I de fall som eleverna använde sig av askarna var det vi som frågade dem om de ville ta hjälp av askarna när det märktes att de hade svårt med uppgifterna på eftertestet. Kim i årskurs 7 hade inte tillgång till askarna under eftertestet och ritade då upp ett tänkt spelschema för att lösa ekvationen 2x+4=2x+1. I sin ritning stryker Kim askar och pärlor vilket motsvaras av att ta bort askar och pärlor i det konkreta spelet.



En annan likhet mellan dessa åldersgrupper är att ingen (utom en elev i årskurs 7) kände igen symbolen för ”skilt från” vid förtestet. Efter spelomgången blev det en skillnad mellan grupperna då alla eleverna i årskurs 7 kände igen tecknet för ”skilt från” vilket endast två av förskoleeleverna gjorde.

Ytterligare en skillnad var att eleverna i årskurs 7 utförde mer beräkningar tyst ”i huvudet” jämfört med eleverna i förskoleklassen. Ännu en skillnad var att medan en av eleverna i förskoleklassen hade svårt att förstå att pärlorna fanns kvar i asken när den stängdes, hade inga elever i årskurs 7 svårigheter med detta.

6 Diskussion

Detta kapitel inleds med en resultatdiskussion. Därefter följer en metoddiskussion och avslutningsvis ett avsnitt om didaktiska implikationer.

6.1 Resultatdiskussion

Syftet med studien är att se på vilket sätt ekvationsspelet kunde påverka elevers förståelse för likhetstecknet. Detta gjordes genom att först ta reda på elevernas förståelse för likhetstecknet med hjälp av intervjuer och förtest. Efter att ha spelat ekvationsspelet med eleverna undersöktes elevernas förståelse igen på samma sätt som innan. Ekvationsspelet användes som ett försök att konkretisera likhetstecknets innebörd för eleverna. Slutligen gjordes en jämförelse mellan elevernas förståelse för likhetstecknet i förskoleklass och årskurs 7.

Eftersom en relationell förståelse för likhetstecknet är viktig för att kunna lösa ekvationer (Skolverket, 2008b), hoppades vi att eleverna även skulle få en relationell förståelse för likhetstecknet istället för enbart en operationell genom att spela ekvationsspelet. En kritisk aspekt när det gäller likhetstecknet skulle kunna vara att få eleverna, både i förskoleklassen och i årskurs 7, att förstå att likhetstecknet inte bara är ett operationellt tecken utan att det betecknar en ekvivalens, att det finns en relation mellan de båda sidorna om likhetstecknet och den ska vara lika. Den kritiska aspekten kan alltså vara den relationella förståelsen för likhetstecknet.

Christoffer i förskoleklassen, som visade mest kunskaper om likhetstecknet i förtestet, hade inte förändrat sina kunskaper i och med ekvationsspelet. Övriga elever i förskoleklassen hade förändrat sina kunskaper om likhetstecknet jämfört med eleverna i årskurs 7. En orsak till detta kan bero på att de yngre eleverna inte hade lika mycket erfarenheter av likhetstecknet innan vår undersökning som eleverna i årskurs 7 hade. Av de sex elever i årskurs 7 som var med och spelade ekvationsspelet kan vi inte se att deras förståelse för likhetstecknet hade ändrats eftersom de svarar på liknande sätt både på för- och eftertestet på frågorna om likhetstecknets betydelse och användning. En annan orsak kan vara att fokus under spelets gång inte var densamma med eleverna i förskoleklassen som med eleverna i årskurs 7. När vi tillsammans läste igenom transkriberingarna av ekvationsspelet med eleverna i förskoleklassen tyckte vi oss se att syftet med ekvationsspelet inte kom fram ordentligt. Huvudsyftet i ekvationsspelet är att det ska vara lika mycket på bägge sidor om likhetstecknet och att eleverna kan dra nytta av detta för att lista ut hur många pärlor det är i askarna. Eleverna i förskoleklassen fick se och pröva att det ska vara lika mycket på bägge sidor men de gavs inte möjlighet att erfara hur de kunde dra slutsatser av detta. Fokus med eleverna i förskoleklassen låg på att det ska vara lika mycket på bägge sidor om likhetstecknet medan fokus med eleverna i årskurs 7 låg på att lista ut hur många pärlor det låg i asken. Visserligen gjordes detta genom att utnyttja att det skulle vara lika mycket på bägge sidor om likhetstecknet på spelplanen men tecknets relationella betydelse lyftes inte fram. Denna erfarenhet visade för oss att det är svårt att fokusera på lärandeobjektet och få fram dess kritiska aspekter. Lärarna som medverkade i Wernbergs learning studies (2009) lyckades inte heller hålla fokus på likhetstecknets relationella betydelse utan i deras fall kom fokus att ligga på räkneoperationer.

Det var svårt att se vilken förståelse eleverna i förskoleklassen hade för likhetstecknet eftersom det var komplicerat att utforma teoretiska uppgifter på elevernas kunskapsnivå som prövade detta. Likhetstecknet som symbol var också något nytt för de flesta av eleverna i förskoleklassen. Precis som Björklund (2007) skriver så kan barn tidigt se likheter och olikheter med konkret material. Däremot har de svårt att uttrycka detta matematiskt (Johnsen Hoines, 2008). Detta såg även Falkner et al. (1999) i sin studie då eleverna med kuber kunde visa att i uppgiften 4+5=__ + 6 fattas det tre kuber på högersida men när de ska lösa uppgiften med siffersymbolerna för antal hävdar eleverna att det ska stå nio efter likhetstecknet. Detta förbiseende gjorde även några av eleverna i årskurs 7 som spelade spelet. Vi visade för Alex efter undersökningens slut att i en del av deluppgifterna i uppgift 2, som till exempel 12+5=__− 8, fanns ett tal i högerled som han måste ta hänsyn till. Detta kunde Alex dock inte ta till sig utan ville bara få bekräftat att 12+5 blir 17. Falkner et al. (1999) visade att eleverna behöver undervisas lång tid för att ändra sina befästade kunskaper om likhetstecknet just när det gäller uppgifter som är utformade som ovan. Detta kan vara en anledning till att förståelsen hos eleverna i årskurs 7 inte ändrades efter endast en spelomgång.

Känslan var att de flesta av eleverna i förskoleklassen inte var redo att gå längre än dit vi kom med dem men vi kanske underskattade deras kapacitet. Med Christoffer tror vi dock att det hade varit möjligt att ha en ekvation som till exempel den som visas i stycket om hur ekvationsspelet (underrubrik 2.4) går till. Då hade han getts en möjlighet att först ta bort lika många askar och pärlor på bägge sidorna om likhetstecknet och dra slutsatsen att det måste vara tre pärlor i den stängda asken. Med eleverna i årskurs 7 hade likhetstecknets relationella betydelse behövts lyftas fram. Det hade eventuellt påverkat de elever som hade en operationell förståelse till att också få en relationell förståelse för likhetstecknet. En annan möjlig väg att påverka elevernas förståelse, både i förskoleklassen och i årskurs 7, hade kunnat vara att spela ekvationsspelet vid flera tillfällen under en längre period eftersom studier (Falkner et al., 1999) visar att befästade kunskaper tar lång tid att ändra. Den här studien med enbart ett speltillfälle med eleverna kunde inte visa att ekvationsspelet ändrar elevernas förståelse för likhetstecknet i årskurs 7. Resultaten efter endast en spelomgång tydde dock på att eleverna i årskurs 7 hade fått en metod att lösa ekvationer vilket inte alla hade innan. Genom att låta eleverna i årskurs 7 göra en ekvation till spelledaren kunde vi se om eleven förstått meningen med spelet. Eleverna fick tänka en stund för att lösa detta och för några blev det inte riktigt som de tänkt sig. Louis gjorde till exempel ekvationen 4x+2=x+6 och upptäckte att de pärlor som återstod inte gick att dela jämt på de kvarvarande askarna. Att låta eleverna få pröva att göra fler egna uppställningar kan också vara ett sätt att befästa kunskaper, både bland yngre och äldre elever.

Det var ett förväntat resultat att eleverna i förskoleklassen inte visste hur tecknet för ”skilt från” skulle användas varken på för- och eftertestet. Vi ville ändå ha med detta tecken för att visa hur motsatsen till likhetstecknet ser ut. Likhetstecknet kan med fördel presenteras med tecknet för ”skilt från” (≠) enligt

Malmer och Adler (1996) eftersom det visar på motsatsen. Hattikudur och Alibali (2010) kom i sin studie fram till att elevers förståelse av likhetstecknet gynnas om de presenteras olika tecken och på så sätt kan det vara lättare att förstå likheten och likhetstecknet. Under spelet diskuterades dock inte tecknet för ”skilt från” ytterligare. Det vill säga eleverna gavs inga förklaringar eller exempel på hur tecknet för ”skilt från” kunde användas och därmed syntes ingen förändring av deras kunskap vad gäller detta tecken i eftertestet. Vår fokus i undersökningen var förståelsen för likhetstecknet men tecknet för ”skilt från” fanns med för att förtydliga för eleverna motsatsen till likhetstecknet. För att eleverna ska få möjlighet att erfara vad något är behöver de veta vad det inte är, en motsats behöver visas för eleverna (Runesson, 1999). Även Hattikudur och Alibali (2010) såg i sin undersökning att elever som får jämföra olika symboler utvecklar en förståelse för likhetstecknets relationella betydelse. Tillfälle gavs att fråga eleven i årskurs 7 som kände igen symbolen för ”skilt från” var han hade stött på den. Han trodde att det var i någon fördjupningsuppgift i matematikboken. Merparten av eleverna i årskurs 7 som spelade spelet kunde svara på frågan om vad tecknet för ”skilt från” betyder i eftertestet. Några av dem använder tecknet även i den sista uppgiften som inte har en lösning och där man kan svara $3 \neq 0$. Även denna kunskap behöver befästas genom att eleverna får möta fler ekvationer som inte har en lösning.

Eleverna i årskurs 7 förstod väldigt snabbt vad spelet gick ut på trots att ingen av dem hade mött spelet innan. De två sista ekvationerna som lades var lite svårare eftersom lösningen i det ena fallet var $x=0$ och i det andra fallet fanns det inte någon lösning på ekvationen. Dessa ekvationer togs med i spelet för att visa eleverna olika variationer av lösningar och att det även finns ekvationer som saknar lösning. Vår känsla är att elever inte stöter på den senare varianten så ofta, speciellt inte i grundskolan. Här är det återigen variationen, som både Runesson (1999) och Hattikudur och Alibali (2010) påpekar är så viktig, som vi vill komma åt.

6.2 Metoddiskussion

Endast spelomgången med förskoleklassen spelades in med bild och ljud. Vår erfarenhet är att det hade varit bättre att spela in allt med till exempel en videokamera för att lättare i efterhand kunna analysera vad som sagts, det vill säga spela in både för- och eftertest och samtliga spelomgångar. Filmningarna som gjordes under spelomgångarna lyckades väl, men under ett av speltillfällena var det några elever som knackade på och då avbröts den inspelningen. Den kunde sedan påbörjas igen när de andra eleverna gått och inget mer avbrott skedde. Efter avbrottet sattes en lapp upp på dörren för att säkra att ingen mer skulle komma in och avbryta. En nackdel med att videofilma är att eleverna kan känna sig obekväma och att situationen inte blir naturlig.

I vår analys av förskoleklassen kände vi att det hade varit bättre att planera in fler men kortare speltillfällen så att eleverna kunde ha fått möjligheten att ta till sig kunskapen ytterligare. På grund av att det innan räknats med ett visst antal minuter till varje elev för att kamerans filmningstid skulle räcka till så var tiden begränsad. En annan orsak till att speltillfället ibland upplevdes som lite långt var att några elevers koncentrationsförmåga tröt i slutet och ingen skulle tvingas fortsätta medverka så därför avslutades spelomgången. I efterhand inser vi att spelet hade kunnat fortgå med de elever som hade koncentrationen kvar, men vår inställning var att alla eleverna skulle få lika mycket tid och samma instruktioner därför avslutades det som planerat med alla fem eleverna. Det hade varit intressant att fortsätta med spelen och eftertesten en tid efter för att se hur elevernas förståelse utvecklades.

Några koncentrationssvårigheter märktes inte på eleverna i årskurs 7. Däremot var det stressande som spelledare att veta att elevens lektion snart var slut men det verkade inte bekymra eleverna. Det hade kanske varit bra att ha fler askar och möjlighet att förbereda antal pärlor i askarna i förväg. Men å andra sidan hade spelomgången då gått ännu fortare och eleverna inte hunnit reflektera alls. Nu hann de sitta och fundera lite medan en ny spelomgång förbereddes.

Eftersom flera av eleverna som bedömdes ha en operationell förståelse för likhetstecknet i årskurs 7 inte ville vara med och spela fick vi ett urval med i vårt tycke för många elever med relationell förståelse för likhetstecknet. Det är möjligt att om spelet genomförts under en eller flera lektionstimmar i matematik under VFU-perioden hade vi fått fler elever med operationell förståelse att spela ekvationsspelet. Då hade i och för sig inte videoupptagning varit genomförbart men det hade varit möjligt att undersöka om elevernas förståelse hade ändrats

Vi har reflekterat över om våra uppgifter i för- och eftertesten utformades på ett sätt så att förändringar i elevernas förståelse för likhetstecknet kunde upptäckas. I förtesten användes låga tal i uppgifterna för att eleverna inte skulle få svårigheter med att lösa uppgifterna på grund av det. Uppgifterna i eftertesten ändrades både för förskoleklassen och för årskurs 7. Kan svårigheterna i tilläggsuppgifter i eftertestet för förskoleeleverna bero på att de nya uppgifterna där innehöll högre tal?

I uppgift tre skulle eleverna i årskurs 7 sätta in rätt tecken mellan siffrorna. Ett förklarande exempel på detta gavs till eleverna (bilaga 4b). Styrdes eleverna till att göra "*operations on both sides*" genom att exemplet var av den typen? Hade elevernas lösningar sett annorlunda ut om exemplet hade varit av typen "*operations equal answer*" eller om det funnits två exempel, en av vardera typen?

Bland de elever i årskurs 7 som inte var intresserade av att fortsätta att spela hade fler enligt vår bedömning en operationell förståelse för likhetstecknet och det hade varit mer intressant att få spela med dem. Vi tror att dessa elever kände att de inte var så starka i matematik och detta var orsaken till att de inte ville fortsätta att spela. När ekvationsspelet nämndes tror vi att detta skrämde en del elever.

Louis som hade missförstått första frågan och trodde att det gällde frågetecknet hade troligtvis en relationell förståelse för likhetstecknet. I så fall hade fyra av de sex eleverna som spelade ekvationsspelet en relationell förståelse. Ett sådant missförstånd hade eventuellt kunnat undvikas genom ett pilottest i årskurs 7. Men det förutsätter att någon som gjorde pilottestet skulle missförstå på samma sätt. Om pilottester hade genomförts i förskoleklassen hade det varit möjligt att upptäcka att vi kunnat gå längre i ekvationsspelet med dessa elever.

6.3 Didaktiska implikationer och vidare forskning

Genom detta arbete har vi kommit till nya insikter som vi tror kommer att vara till nytta för oss som blivande lärare. En av dessa insikter är att lärare alltid måste utgå från elevens förståelse av ett lärandeobjekt. Vad eleven förstår och hur han eller hon tänker om ett lärandeobjekt bör tas reda på för att därifrån arbeta vidare med elevens förståelse och fördjupa den. Att ta reda på förståelsen och de kritiska aspekterna kan göras genom till exempel samtal med eleverna kring ett lärandeobjekt eller ett förtest som gjordes i den här studien. Denna studie har gett idéer till hur lärare kan undersöka vilken förståelse elever har för likhetstecknet och hur de kan arbeta för att gynna den relationella förståelsen. Ett sätt är att arbeta med olika symboler som ”mindre än”, ”större än” och tecknet för ”skilt från” och att låta eleverna lösa uppgifter av olika slag såsom “*operations on both sides*” och ” *nonstandards contexts*” (7=3+4). Ett annat sätt är att ge eleverna uppgifter av typen som fanns i eftertestet för årskurs 7 och som bestod av uppdraget att sätta tecken mellan siffrorna 6 1 2 3 så att det stämmer (uppgift 3, bilaga 4b). Denna kan lösas genom exempelvis 6=1+2+3 eller 6−1=2+3. Denna typ av uppgifter skulle kunna lösas både individuellt eller som gruppuppgift av eleverna. Eftersom det finns många lösningar på uppgiften skulle eleverna kunna få komma på fler lösningar än bara en såsom vi lät dem göra i våra test. Detta skulle kunna gynna deras relationella förståelse för likhetstecknet.

Likhetstecknet ofta tas för givet, mycket fokus läggs på de fyra räknesätten +, −, / , x, vilket gör att likhetstecknet helt enkelt “glöms bort” eller inte skrivs ut. Men för att kunna använda de fyra olika räknesätten måste likhetstecknet vara med och förståelsen för dess relationella betydelse är viktig för att kunna lösa uppgifter som 6=4+__. Det är viktigt att redan när likhetstecknet introduceras ge det en särställning och som lärare vara medveten om att undervisa tidigt om den relationella betydelsen av likhetstecknet och inte bara den operationella. Skolverket har lyft upp likhetstecknets status vilket märks i den nya läroplanen, Lgr 11 men bör även göra lärare medvetna om hur viktigt det är att ge eleverna en variation av uppgifter för att vidga elevernas förståelse till att bli relationell. Den medvetenheten är på väg att nå ut till lärarna. Under uppsatsskrivandet träffade vi en lärare som undervisar elever i de tidigare åren. Hon berättade att de sedan en kort tid tillbaka har börjat lyfta fram likhetstecknets relationella betydelse i sin undervisning. Detta kräver dock att lärare har en hög matematikdidaktisk kompetensen för att de ska förstå vilken viktig symbol likhetstecknet är. En hög didaktisk kompetens krävs även för att lärare ska upptäcka vad elevernas svårigheter beror på. Nästa steg i forskningen om likhetstecknet skulle kunna vara att undersöka vilken förståelse blivande lärare har för likhetstecknet. Om inte högskolestudenterna har den relationella förståelsen för likhetstecknet hur ska de då kunna lära ut om detta?

7 Referenser

Ahlberg, Ann. (2000). *Matematik från början. Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande.* Nämnaren Tema. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Bergsten, Christer., Häggström, Johan., & Lindberg, Lisbeth. (1997). *Algebra för alla.* Nämnaren Tema. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning.

Björklund, Camilla. (2009). *Hållpunkter för lärande. Småbarns möten med matematik* . Åbo: Åbo Akademis förlag.

Bryman, Alan. (2009). *Samhällsvetenskapliga metoder.* Malmö: Liber AB.

Falkner, Karen P., Levi, Linda., & Carpenter, Thomas P. (1999). Children´s understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6(*4), 19-23.

Grinstein, Louise S., & Lipsey, Sally I. (2001). *Encyclopedia of mathematics education.* New York : Routledge Falmer.

Hattikudur, Shanta., & Alibali, Martha W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequality symbols help? *Journal of Experimental Child Psychology. 107,* 15-30.

Johnsen Hoines, Marit. (2008). *Matematik som språk-verksamhetsteoretiska perspektiv.* Malmö: Liber AB.

Kieran, Carolyn. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics. 12,* 317-326.

Kiselman, Christer., & Mouwitz, Lars. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Livre´na AB.

Kvale, Steinar., & Brinkmann, Svend. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, Madeleine., & Kilborn, Wiggo. (2002). *Baskunskaper i matematik - för skola hem och samhälle.* Lund: Studentlitteratur.

Malmer, Gudrun. (1990). *Kreativ matematik.* Solna: Ekelund Förlag AB.

Malmer, Gudrun., & Adler, Björn. (1996). *Matematiksvårigheter och dyslexi.* Lund: Studentlitteratur.

McNeil, Nicole M., Grandau, Laura., Knuth, Eric J., Alibali, Martha W., Stephens, Ana C., Hattikudur, Shanta., & Krill, Daniel E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. *Cognition and Instruction*, *24* (3) 367-385.

Runesson, Ulla. (1999). *Variationens pedagogik. Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll (the pedagogy of variation). Different ways of handling mathematical topic).* Göteborg: Göteborgs Universitet.

Runesson, Ulla. (2006). Vad är möjligt att lära sig? I Holmqvist, Mona. red. (2006) *Lärande i skolan – lear ning study som skolutvecklingsmodell.* Lund: Studentlitteratur

Skolverket. (2003). *Lusten att lära - med fokus på matematik. Nationella kvalitetsgranskningar 2001-2008.*(Rap port 221). Stockholm: Skolverket. Hämtad från: http://skolverket.se/sb/d/193/url Datum: 2010-12-06

Skolverket. (2008a). *TIMSS 2007. Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* (Rapport 323). Stockholm: Skolverket. Hämtat från: http://www.skolverket.se/publikationer?id=2127 Datum: 2010-11-15

Skolverket. (2008b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007. En djupanalys av hur eleverna förstår centrala begrepp och tillämpar beräkningsprocedurer* (Analysrapport till 323). Stockholm: Skolverket. Hämtad från:http://www.skolverket.se/publikationer?id=2126 Datum: 2010-11-23

Skolverket. (2010a). *Kursplan med kommentarer.* Hämtad från: Http://www.skolverket.se/publikationer?id=2974 Datum: 2010-12-06

Skolverket. (2010b). *Bedömning av kunskap för lärande och undervisning i matematik.* Pettersson Astrid . Hämtad från: Http://www.skolverket.se/sb/d/150/url Datum: 2010-12-06

Skolverket. (2010c). *Del ur Lgr 11-kursplan i matematik i grundskolan.* Hämtad från: http://www.skolverket.se/content/1/c6/02/21/84/Matematik.pdf Datum: 2010- 12-06

Skolverket. (2010d). *PISA 2009. Rustad att möta framtiden?* (Analysrapport 352). Stockholm: Skolverket Hämtad från: http://www.skolverket.se/publikationer?id=2473 Datum: 2010-12-17

Vetenskapsrådet. (2005). *Vad är god forskningssed? Synpunkter, riktlinjer och exempel.* Gustafsson, Bengt., Hermeren & Göran. Petersson, Bo. Hämtad från: http://www.vr.se/etik/publikationerochriktlinjer Datum: 2010-12-17

Wernberg, Anna. (2009). *Lärandets objekt- vad elever förväntas lära, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna. (*Avhandling för doktorsexamen. Umeå universitet, Institutionen för matematik, teknik och naturvetenskap, 2009). Hämtad från http://www.skolporten.com/art.aspx?id=9aJMk Datum: 2010-12-07

Bilaga 1a

Informationsbrev till vårdnadshavare i förskoleklass

Jag heter Rebecka Larsson och går på Lärarprogrammet på Högskolan för lärande och kommunikation i Jönköping och studerar till förskollärare. Jag kommer att göra min VFU(verksamhetsförlagd utbildning) i ditt barns förskoleklass och ha Angelica som handledare.

Under min VFU kommer jag att spela ett spel som heter ekvationsspelet med vissa av barnen som ett led i min studentuppsats. Spelet fokuserar på likhetstecknet. Spelet går ut på att man gömmer ex. pärlor i tändsticksaskar. Spelplanen består av ett papper med likhetstecknet i mitten. Spelet spelas av två deltagare i taget, i detta fall jag och ditt barn. I spelet finns två regler: 1) Det måste ligga lika många pärlor i varje ask. 2) Det måste finnas lika många pärlor på varje sida om likhetstecknet.

Dessa pärlor kan vara gömda i en ask eller ”öppna”. Den andra spelaren (ditt barn) ska försöka lista ut hur många bönor som ligger gömda i askarna. Detta speltillfälle kommer jag att spela in med kamera där enbart våra händer kommer att synas och våra röster kommer att höras. Inspelningen gör jag för att senare kunna analysera vad barnen har sagt och gjort under spelets gång. Barnen kommer att kunna delta frivilligt och endast med er tillåtelse!

All data som jag samlar in kommer att behandlas konfidentiellt, dvs. namnen på deltagarna och inspelningarna kommer inte att lämnas ut till någon Annan. Däremot kommer min medskribent och handledaren på högskolan att få tillgång till att lyssna på och titta på inspelningarna. Tre månader efter att vår uppsats har blivit godkänd kommer banden att raderas.

Är det något ni undrar över fråga gärna!

Antingen när ni träffar mig på skolan eller via min e-post Lu07lare@hlk.hj.se

Jag godkänner att mitt barn _______________ (namn) får spela ekvationsspelet med Rebecka och att samtalet under spelets gång kommer att filmas och spelas in.

_________________ ____

Datum Målsmans underskrift

Bilaga 1 b

Informationsbrev till vårdnadshavare

Hej!

Jag heter Sari Håkansson och går på Lärarprogrammet på Högskolan för lärande och kommunikation i Jönköping och studerar till lärare i matematik och NO-ämnen. Jag har gjort VFU(verksamhetsförlagd utbildning) på Attarpsskolan och har haft Malin Carlsson som handledare.

Nu kommer jag att återvända till skolan för att spela ett spel som heter ekvationsspelet med vissa av eleverna som ett led i min studentuppsats. Detta speltillfälle kommer jag att spela in med ljudupptagning för att senare kunna analysera vad eleverna har sagt under spelets gång. Eleverna kommer att delta frivilligt och endast med er tillåtelse.

All data som jag samlar in kommer att behandlas konfidentiellt, dvs. namnen på deltagarna kommer inte att lämnas ut till någon Annan. Däremot kommer min medskribent och handledaren på högskolan att lyssna på ljudupptagningarna. Tre månader efter att vår uppsats har blivit godkänd kommer banden att raderas.

Är det något ni undrar över fråga gärna!

Lu06hsar@hlk.hj.se

Jag godkänner att mitt barn _______________ (namn) får spela ekvationsspelet med Sari och att samtalet under spelets gång spelas in.

________________ ____

Datum Målsmans underskrift

Bilaga 2 a

Förtest i förskoleklass om likhetstecknet

Fråga 1: Känner du igen detta tecken (=)? (Jag visar ett papper med likhetstecknet på. Om barnet inte vet vad det är så pratar vi om detta, jag tänker här att intervjun kan bli ett lärotillfälle där barnet kan få tillägna sig förkunskaper som de inte hade innan).

Fråga 2: Har du sett tecknet innan? Var har du sett det? (Här diskuterar jag barnens erfarenheter om tecknet)

Fråga 3: Vet du när du använder likhetstecknet?(Här diskuterar jag tillsammans med barnet om svaren)

Fråga 4: Vet du vad dessa tecken betyder? (Jag visar först ett kort med två prickar på :
och samtalar om detta och jämför med kortet med likhetstecknet som ligger bredvid ,vi samtalar om dess olikheter och ev. likheter. Sedan visar jag ett kort för barnet där motsatsen för likhetstecknet finns nämligen tecknet för vad likhet inte är $\neq$).

Fråga 5:

Har du sett dessa tecken förut?(Här fortsätter diskussionerna kring tecknen. OM barnet inte har någon aning vad de betyder förklarar jag vad de betyder. Jag poängterar och betonar att detta är ett lärtillfälle det gör absolut inget om de inte kan, detta är mycket viktigt så barnen kan känna tilltro till sin egen förmåga).

Uppgifter som barnen får:

1. ■ ■ = ■ ■
2. ● ● ● = ●●●
3. 1=1
4. ●● = ●
5. 1=2
6. 2=2
7. 4=3
8. 4 = 4
9. 5 = 3
10. 7= 3+4

Bilaga 2b

Förtest för årskurs 7

1) Vad betyder detta tecken = ?

Hur används det?

Vet du vad detta tecken betyder $\neq$?

Hur används det?

2) Vilket tal fattas för att uppgiften ska stämma?

12 + ___ = 23

13 = 9 + ____

16 – 3 = 17 - ____

12 + 5 = ___ +8

3 +2 + 4 = 15 - 4 - ____

21 =3

15÷3=____ **(** ÷ är tecknet för division)

3) Sätt in rätt tecken mellan talen så att uppgiften blir rätt

Välj mellan + , - , =

Exempel:

1 5 7 1

1 + 5 = 7 - 1

4 1 3 2 2 3 6 1 4 2 2 4 7 2 5

4)Lös följande ekvationer:

x + 5 = 12 **3x + 4 = x + 6**

5x + 1 = 2x + 7 **3x + 4 = 3x + 1**

5x+1=11 **4x+ 4 = 2x + 4**

Bilaga 3a

Spelschema för förskoleklassen

Detta är en förenklad variant av Kilborns ekvationsspel (Löwing och Kilborn 2002).

Allra först ställs förberedande frågor till eleven om likhetstecknet och förklaring ges att spelet kommer att handla om likhetstecknet. Ett förslag på de förberedande frågorna som spelledaren ställer kan vara exempelvis: ”Känner du igen den här symbolen?” Frågor kring likhetstecknet ställs. Spelledaren nämner att spelet som kommer att spelas heter ekvationsspelet, men lägger inte tyngdpunkten på spelets namn då de inte har börjat med ekvationer i förskoleklassen än. För att eleven ska kunna ta till sig innehållet ges förklaring på hur spelet går till och att det handlar om att se om det är lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. Deltagare är en spelledare och en elev.

Spelregel 1: I varje tändsticksask ska det ligga exakt lika många pärlor.

Spelregel 2: På varje sida om likhetstecknet ska det ligga lika många pärlor.

Eleven får instruktioner från spelledaren i olika steg och spelet är hela tiden ett samtal mellan eleven och spelledaren.

Eleven sitter vid ett bord där spelledaren lägger fram sex stycken tändsticksaskar på bordet. Tre öppna askar med samma antal pärlor i varje ask ligger på var sida om en gul lapp med likhetstecknet ritat på. Spelledaren förklarar för eleven att detta är spelplanen till vårt spel. Först får eleven räkna hur många pärlor det är i varje tändsticksask.

Sedan får eleven räkna hur många pärlor det är tillsammans på ena sidan av likhetstecknet sedan får eleven jämföra och räkna hur många pärlor det är på andra sidan om likhetstecknet. Det går ut på att eleven ska lista ut hur många pärlor som behöver läggas till eller tas bort för att det ska bli lika mycket på båda sidorna. Eleven får prova sig fram. Spelledaren ställer under tiden frågor till eleven kring det som händer. Spelledaren lägger exempelvis tre pärlor i varje ask så det nu ligger nio pärlor på varje sida om likhetstecknet(sammanlagt 18 stycken). Sedan ber spelledaren eleven att blunda och en ask stängs samtidigt som spelledaren påminner om att en regel är att det måste vara lika många pärlor i varje ask. Eleven får sedan titta och nu frågar spelledaren hur många pärlor det är i den stängda asken. Har eleven förstått rätt vet denne att det är tre pärlor i den stängda asken. Här kan antalet ökas så det blir mer utmaning för eleven. Ett Annat steg i spelet är att se om eleven kan lista ut hur många pärlor det är på varje sida om en del pärlor läggs utanför askarna. Här kan exempelvis spelledaren lägga till fyra pärlor utanför askarna på ena sidan om likhetstecknet och be eleven göra så att det blir lika många pärlor på den andra sidan. Detta för att se om eleven förstått att det är pärlorna och inte askarna som skulle räknas.

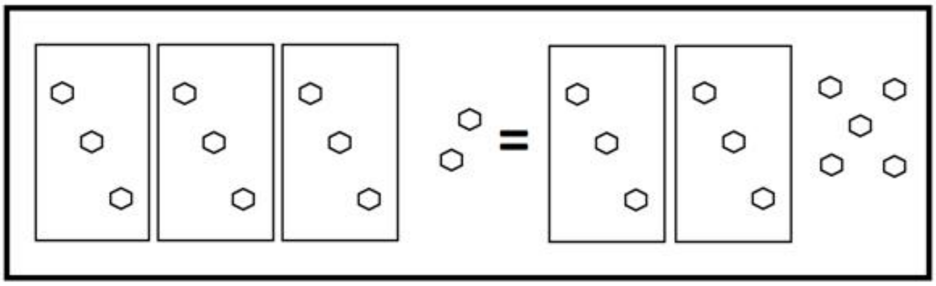
Bilaga 3b

Spelschema för årskurs 7

Spelplanen består av ett papper med likhetstecknet i mitten. Spelledaren frågar eleven om han vet vad det är för tecken. Om eleven inte ser det säger spelledaren att det är likhetstecknet. Spelledaren förklarar reglerna i spelet för eleven vilka består av att det alltid ska vara lika många pärlor på varje sida om likhetstecknet och att det alltid är lika många pärlor i askarna. Dessa pärlor kan vara gömda i en ask eller ligga bredvid en ask.

Först lägger spelledaren en stängd ask med tre pärlor på ena sidan om likhetstecknet och sedan tre pärlor på den andra sidan. Eleven får nu säga hur många pärlor han tror att det är i asken. Spelledaren frågar hur eleven kommit fram till det.

Spelledaren förbereder en övnings-ekvationen (3x+2=2x+5) som ser ut så här: (den följer beskrivningen i texten).



Spelledaren har lagt tre knappar i varje ask. Nu stänger han askarna och eleven får titta och ser då de stängda askarna och knapparna utanför. Spelledaren förklarar att genom att ta bort lika många askar och pärlor på bägge sidorna kan man lista ut hur många pärlor det ligger i askarna. Detta görs sen tillsammans. Varje gång eleven har svarat får han titta i asken och kontrollera sitt svar.

Nu läggs de sex ekvationerna enligt nedan och eleven får ta bort askar och pärlor för att komma fram till hur många pärlor det är i askarna.

Ekvation 1) $x + 5 = 12$ $x=7$

Ekvation2) $5 \cdot x + 1 = 11$ $x=2$

Ekvation 3) $5x+1=2x+7$ $x=2$

Ekvation 4) $3x+4=x+6$ $x=1$

Ekvation 5) $4x+4=2x+4$ $x=0$

Ekvation 6) $3 \cdot x + 4 = 3 \cdot x + 1$ $x \neq 3$ Ekvationen saknar lösning

Efter att ekvationen tre har lösts visar spelledaren hur man kan teckna den ekvationen matematiskt och ekvationen läggs en gång till med askarna och pärlorna samtidigt som de olika stegen tecknas. Detta görs sedan med resterande ekvationer samtidigt som eleven löser dem första gången.

När eleverna gjort ekvation 6 visar spelledaren symbolen för inte lika med som finns på eftertestet och förklarar hur den kan användas. Därefter får eleven göra eftertestet.

Bilaga 4 a

Eftertestet i förskoleklass

Eftertestet bygger på förtestet med några extra tilläggsfrågor. Detta för att sedan kunna se skillnader när jag analyserar och jämför förtesten och eftertesten med varandra. Jag vill ta reda på om eleverna kunnat ta till sig något om likhetstecknet genom den anpassade version till barnens ålder jag skapat av ekvationsspelet och även spelat med dem. Skillnaden på förtestet och eftertestet är att jag lade till några tilläggsuppgifter på eftertestet för att testa deras kunskaper ytterligare då många av barnen på förtesten klarade uppgifterna väldigt bra .

Fråga 1: Känner du igen detta tecken (=)? (Jag visar ett papper med likhetstecknet på. Om barnet inte vet vad det är så pratar vi om detta, jag tänker här att intervjun kan bli ett lärotillfälle där barnet kan få tillägna sig förkunskaper som de inte hade innan).

Fråga 2: Har du sett tecknet innan? Var har du sett det? (Här diskuterar jag barnens erfarenheter om tecknet)

Fråga 3: Vet du när du använder likhetstecknet?(Här diskuterar jag tillsammans med barnet om svaren)

Fråga 4: Vet du vad dessa tecken betyder? Jag visar först ett kort med två prickar på : och samtalar om detta och jämför med kortet med likhetstecknet som ligger bredvid ,vi samtalar om dess olikheter och ev. likheter. Sedan visar jag ett kort för barnet där motsatsen för likhetstecknet finns nämligen tecknet för vad likhet inte är (≠). Jag anser att vi människor behöver veta vad något inte är för att veta vad det sedan innebär. Detta för att göra det tydligt för barnet om skillnaden och för att kunna ta reda på hur de ser på de olika tecknen. Det blir intressant att höra deras tankar och åsikter.

Fråga 5:

Har du sett dessa tecken förut? (Här fortsätter diskussionerna kring tecknen. OM barnet inte har någon aning vad de betyder förklarar jag vad de betyder. Jag poängterar och betonar att detta är ett lärtillfälle det gör absolut inget om de inte kan, detta är mycket viktigt så barnen kan känna tilltro till sin egen förmåga).

Uppgifter som barnen får:

1. ■ ■ = ■ ■

2. ● ● ● = ●●●

3. 1=1

4. ●● = ●

5. 1=2

6. 2=2

7. 4=3

8.4 = 4

9. 5 = 3

10. 7= 3+4

Tilläggsuppgifter

11. 10=5+5
12. 3+ 8= 5+6
13. 7+3=10
14. 11=7+5
15. 15=10+3+2
16. 8 = 7+3
17. 8=4+4
18. 4+5=9
19. 9=5+4
20. 3+2+1=6

Eftertest åk 7 Namn____________Klass:______

1) Vad betyder detta tecken =

Hur används det?

Vet du vad detta tecken betyder ≠

Hur används det?

2) Vilket tal fattas för att uppgiften ska stämma?

14 + ___ = 26

15 = 9 + ____

16 – 3 = 18 - ____

12 + 5 = ___ - 8

3 +2 + 4 = 17 - 4 - ____

3 · 8 =___ · 6

4 · __ + 3 = 9 + 2 · ___

3) Sätt in rätt tecken mellan talen så att uppgiften blir rätt

Välj mellan + − · =

Exempel: 1 5 7 1

1 + 5 = 7 - 1

5 1 4 2 6 1 2 3 4 2 2 4 8 3 5

4) Lös följande ekvationer:

$$x + 7 = 12$$

$$4 \cdot x + 3 = 11$$

$$6 \cdot x + 1 = 2 \cdot x + 9$$

$$2 \cdot x + 5 = x + 6$$

$$4 \cdot x + 3 = 2 \cdot x + 3$$

$$2 \cdot x + 4 = 2 \cdot x + 1$$