HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE
OCH KOMMUNIKATION
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Likhetstecknet – det är väl inte så svårt att lära sig?

En studie om hur elever tolkar likhetstecknet och en möjlig väg till förståelse genom en undervisande intervju om ett spel

Angelica Blomgren

Examensarbete 15 hp
Inom Lärande

Lärarutbildningen
Höstterminen 2010

Handledare
Pernilla Mårtensson

Examinator
Maj Arvidsson

HÖGSKOLAN FÖR LÄRANDE OCH KOMMUNIKATION (HLK)
Högskolan i Jönköping

Examensarbete 15 hp
inom Lärande
Lärarutbildningen

Höstterminen 2010

SAMMANFATTNING

Angelica Blomgren

Likhetstecknet – det är väl inte så svårt att lära sig?

En studie om hur elever tolkar likhetstecknet och en möjlig väg till förståelse genom en undervisande intervju om ett spel

Antal sidor: 31

Studien behandlar det specifika matematiska innehållet likhetstecknet. Syftet är att se om eleverna kan utveckla sin förståelse för likhetstecknets betydelse. Utifrån syftet kommer två frågeställningar där färdigheter, kritiska aspekter samt kunskaper om likhetstecknet efterfrågas.

I studien sammanfattas en del av den forskning som behandlar likhetstecknets kritiska aspekter. Variationsteorin har varit en hjälp för att analysera elevernas lärande och för att hitta möjliga kritiska aspekter. Några av de kritiska aspekterna är att likhetstecknet innebär ekvivalens och att det går att utföra operationer på båda sidor om tecknet.

Studien grundar sig på ett spel som har sina rötter i ekvationsspelet av Viggo Kilborn. Spelet är utformat med pärlor och likhetstecken och genom för- och eftertest utreds om eleverna inhämtar någon kunskap. Resultatet visade att intervjun med spelet var relativt framgångsrikt eftersom eleverna hade större lösningsprocent på eftertestet. En slutsats är dock att det inte är metoden som är viktig utan det som påverkar är att det skapas möjligheter till lärande där elever kan urskilja de kritiska aspekterna av likhetstecknet.

Sökord: likhetstecknet, kritiska aspekter, operationell, relationell, variationsteorin

Postadress	Gatuadress	Telefon	Fax
Högskolan för lärande och kommunikation (HLK) Box 1026 551 11 JÖNKÖPING	Gjuterigatan 5	036–101000	036162585

Innehållsförteckning

1 **Inledning** 1
2 **Bakgrund** 2
2.1 Begrepp 2
2.2 Tidigare forskning 2
2.2.1 Likhetstecknets betydelse 2
2.2.2 Likhetstecknets kritiska aspekter 3
2.3 Verktyg för läraren 6
2.4 Variationsteorin 7
2.5 Spelet 9
3 **Syfte** 10
4 **Frågeställningar och avgränsning** 10
5 **Metod** 11
5.1 Urval 12
5.2 Genomförande 12
5.3 Tillförlitlighet 13
5.4 Forskningsetiska aspekter 14
5.5 Analys av insamlat material 14
6 **Resultat** 16
6.1 Elevernas resultat på för- och eftertest 16
6.2 Elevernas resultat på spelet 18
6.2.1 Full förståelse 18
6.2.2 På god väg 19
6.2.3 Kritiska aspekter 21
6.3 Resultatsammanfattning 22
7 **Diskussion** 23
7.1 Metoddiskussion 23
7.2 Resultatdiskussion 25
7.3 Didaktiska implikationer 27
7.4 Slutord och förslag till vidare forskning 28
8 **Referenser** 30
Bilagor

1 Inledning

Denna studie ingår i forskningsplattformen för Lärande och undervisning i matematik på Högskolan för lärande och kommunikation i Jönköping med Ulla Runesson i spetsen. Den ingår även i ett mindre forskarlag bestående av fem studenter som skriver tre skilda examensarbeten med utgångspunkt i en och samma grundfråga: vilken effekt ger ett arbete med likhetstecknet genom ekvationsspelet eller en variant av spelet vid en undervisande intervju. När jag spånade på idéer till denna studie arbetade jag efter utgångspunkten att jag ville skriva om något som elever har svårt med. Vidare ville jag skriva om något konkret som fokuserade på att skapa möjligheter till lärande eller relationen mellan undervisning och lärande. Jag kom i kontakt med matematikplattformen på högskolan och här diskuterade vi fram och tillbaka. Ulla Runesson föreslog det valda området eftersom ingen känd forskning har gjorts på ekvationsspelet i samband med det specifika inlärningsområdet likhetstecknet. Trots att jag senare frångick ursprungsidén om att använda mig av ekvationsspelet som det är och i stället förändrade det så trodde jag ändå att något intressant skulle kunna komma fram.

Mitt eget intresse för ämnet matematik har skiftat under mina år i skolan. Under de inledande åren med matematik var jag en stjärna och jag räknade snabbast, sida upp och sida ner med samma sorts tal av den traditionella sorten. Det sättet som läroböckerna traditionellt sett har visat tal på: 2+2=4 (McNeil et al., 2006). Sedan kom högstadiet, i sjuan eller kanske åttan började mina problem. Jag insåg att jag egentligen inte kunde matematik. Det var först på högskolan som jag förstod att jag aldrig hade lärt mig eller förstått de essentiella grunderna. Under min pågående lärarutbildning har ett begynnande intresse för matematik vuxit fram. Dels genom otroligt inspirerande handledare på den verksamhetsförlagda utbildningen och även efter intressanta kurser på skolan med bland andra Anna-Lena Ekdahl.

Alla kan väl känna igen sig i uttalanden som ”förklara” inte så mycket, säg bara hur jag ska göra! Det är ansträngande att lära sig göra något från början och det är precis det vi som lärare måste bemöda oss med att göra. Vi måste lära våra elever grunderna och ge dem verktygen för att de sedan ska kunna gå vidare både på egen hand och med hjälp av en lärare. Tyngdpunkten i detta arbete kommer att ligga på likhetstecknets betydelse och vad som kan vara kritiskt för eleverna att förstå. I studien kommer en variant av Viggo Kilborns ekvationsspel att användas främst för att belysa likhetstecknets innebörd och utreda om detta sätt att arbeta på är ett fungerande sätt att arbeta med likhetstecknet.

2 Bakgrund

Bakgrunden innehåller fakta som syftar till att ge förståelse för vilken studiens grund är och för att förstå lite om matematik i allmänhet och likhetstecknet i synnerhet. Först i kapitlet behandlas några centrala begrepp. Dessa följs av tidigare forskning som behandlar fakta om likhetstecknet, dess tvådelade betydelse och kritiska aspekter av tecknet. Forskningen kommer senare att kopplas till resultatet av den undervisande intervjun. Avslutningsvis redogörs för variationsteorin och ekvationsspelet som legat till grund för arbetet.

2.1 Begrepp

Genomgående i denna studie kommer ”traditionella” eller ”operationella” uppgifter att nämnas. Det som menas med dessa är de uppgifter som oftast förekommer i läroböcker och som är en av anledningarna till feltolkningar av likhetstecknet enligt forskare (Carpenter, Franke & Levi, 2003; McNeil et al., 2006). En utsaga kan vara sann eller falsk. När en öppen utsaga beskrivs är det uppgifter där ett eller flera tal är obekanta: 2=__+ 1.(S. Skolöverstyrelsen, 1979). Prealgebra i skolmatematiken innebär att en mängd olika aktiviteter används som förberedelse för algebraiskt tänkande, det som brukar beröras är arbete med öppna utsagor fast utan algebrans kännetecken som är bokstavsräknande (Bergsten, Häggström, & Lindberg, 1997).

2.2 Tidigare forskning

I detta kapitel kommer problemområdet att belysas närmare genom tidigare forskning. Dels kommer en redogörelse för likhetstecknets betydelse och även en redovisning för vilka de kritiska aspekterna skulle kunna vara, dels hur det går att arbeta för att motverka svårigheter med de kritiska aspekterna.

2.2.1 Likhetstecknets betydelse

Likhetstecknet som symboliseras med två parallella streck = står för ekvivalens. Det betyder inte enbart ”här ska svaret komma” eller nu ska du räkna ut vad ”det blir” utan även att vänster och höger led är olika uttryck för samma tal. Likhetstecknet betyder alltså inte enbart att en beräkning ska utföras utan även att eleven ska försöka se ett samband mellan de olika leden (Bergsten et al, 1997; Hattikudur & Alibali, 2010; Knuth et al., 2006; Pettersson, 2010). Dessa två betydelser beskrivs av forskare med olika termer. Pettersson använder termerna dynamisk och statisk betydelse medan McNeil och Alibali (2005) och McNeil et al. (2006) använder operationell och relationell om likhetstecknet betydelse. Bergsten et al. benämner den första betydelsen som operationell och den andra som strukturell. I detta arbete kommer termerna operationell och relationell betydelse av likhetstecknet att användas.

Införandet av symbolspråket och därmed likhetstecknet är ett kritiskt skede för elevens framtida matematiska arbete enligt Høines (2000). För att inte tappa elevernas intresse och fokus får inte avståndet mellan krav och möjlighet att lyckas vara för stort. Malmer (1991) skriver att det är viktigt att börja med de språkformer som är välkända för eleven innan introducerandet av symbolspråket. När eleverna kommer till skolan har de redan förkunskaper om matematik och Malmer menar att det är viktigt att inte glömma bort detta. I stället för att förutsätta att eleven aldrig har räknat matematik ska deras informella matematikspråk användas som en ingång till det formella skrivna språket. Vid införandet av symbolen likhetstecknet kan med fördel laborationer med vågen användas (Ahlberg, 2000). Det är även viktigt att inte bara visa tal av den traditionella sorten, 5+2=7, då elever kan bilda sig felaktiga uppfattningar där de enbart tror att likhetstecknet betyder ”här kommer svaret” eller ”det blir” (McNeil, 2006). I stället måste det till en variation, av tal med öppna utsagor, 2+__=5, 5+2=2__ och __=2+5 (Bergsten et al., 1997).

2.2.2 Likhetstecknets kritiska aspekter

Likhetstecknet är en ofta missförstådd symbol enligt Ahlberg (2000) och det finns ett antal olika kritiska aspekter i innehållet likhetstecknet som beror på bristande förståelse av olika slag (Carpenter et al. 2003; Knuth et al. 2006; Pettersson; 2010). Pettersson beskriver den operationella tolkningen som boven till varför elever har svårigheter med de kritiska aspekterna i innehållet likhetstecknet. En kritisk aspekt innebär att eleverna enbart har uppfattningen att likhetstecknet betyder ”det blir” eller ”sätt svaret här”. Dessa elever har en operationell syn på likhetstecknet och i dessa elevers tolkningar upphör vänster led i en uppgift att existera när beräkningen är utförd och endast höger led som är resultatet finns kvar. De ser det som att det finns ett före och ett efter likhetstecknet. En annan vanlig uppfattning är även att en uppgift endast går att läsa från vänster till höger. Pettersson hävdar att om inte eleven ”ser” båda leden samtidigt som en helhet kan svårigheter med till exempel ekvationer uppstå eftersom eleven inte urskiljer att det totala värdet av vänster respektive höger led är lika mycket. Dessa elever klarar för det mesta av ekvationer av typen 2x+5=27 men får svårigheter när talet är omkastat, 27=2x+5. En annan kritisk aspekt är addition eller subtraktion ”över likhetstecknet”. I uppgifter av slaget 7=__+5 gör då dessa elever felet att de adderar 7 och 5 så att det blir 12. Carpenter et al. (2003) beskriver även de att elever ibland kommer fram till 17 i detta tal, 8+4=__+5, då de lägger ihop alla talen. Ännu en kritisk aspekt av liknande slag är när eleven i uppgiften 8=4+__+3 ger svaret 12 och bortser eller missar den sista termen i uppgiften. Två andra varianter av kritiska aspekter är när eleven sätter in 4 för att konstatera att 4+4=8 eller genom att addera 4 och 3 och få felsvaret 7 (Carpenter et al.; Pettersson).

De elever som har förstått likhetstecknets fulla betydelse har nått upp till den relationella förståelsen vilket betyder att de förstår att det ska vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet (ekvivalens) och kan relatera det till uppgifter av olika form (Bergsten et al, 1997; Hattikudur & Alibali, 2010; Pettersson, 2010).

Runesson (2006) redogör för en learning study genom variationsteorin där lärarna i studien poängterar att det är viktigt att eleverna förstår likhetstecknets tvåhövdade betydelse för att senare klara av svårare matematik som till exempel algebra. Lärarna i studien arbetar med att utveckla elevernas förståelse för likhet och att likhetstecknets kritiska aspekter är att det kan betyda både ”det blir” och ”är lika mycket”. För att förstå både helheten av en uppgift och de olika delarna, exempelvis del+del=del+del, så måste ett visst mått av variation av lärandeobjektet till. Studien gick till så att de började med att ta reda på elevernas förförståelse av lärandeobjektet likhetstecknet genom intervjuer där de bad eleverna att berätta om hur de såg på några uppgifter. Resultatet från intervjuerna användes sedan som en start till de lektioner som planerades. De genomförde tre lektioner som var identiskt lika rent organisatoriskt, men de var olika i hur lärandeobjektets kritiska aspekter behandlades. Analysen av lektionerna visade att i två av lektionerna varierades flera av de kritiska aspekterna av likhetstecknet samtidigt. I den andra lektionen varierades flera aspekter av likhet i sekvens. Resultatet blev olika lärande beroende på om flera aspekter varierade samtidigt eller åtskiljt.

Hattikudur och Alibali (2010) skriver om en studie där de undersökt om symboler som inte betyder likhet kan vara en hjälp för att få elever att förstå likhetstecknet och dess kritiska aspekter. De beskriver tre olika undersökningsgrupper där den första gruppen innehöll tredje- och fjärdeklass elever. Denna grupp fick tillfälle att urskilja skillnaden mellan större än, mindre än och likhetstecknet under en lektion. Den andra gruppens lektion gav endast tillfälle att urskilja och lära om likhetstecknet. Den sista gruppen var en kontrollgrupp som inte fick tillfälle att urskilja några symboler. Ett förtest och eftertest användes som ett verktyg för att kunna se om eleverna lärde sig något. Resultatet på eftertestet som genomfördes efter lektionerna visade att den grupp som fått tillfälle att urskilja skillnaden mellan större än, mindre än och likhetstecknet visade större förståelse för likhetstecknets betydelse.

McNeil och Alibali (2005) har gjort en studie om kontextens betydelse för förståelsen av likhetstecknet och dess kritiska aspekter. I studien visar de att elever i "middle-school" inte förstår likhetstecknet som en relationell symbol om de inte får se tecknet med nödvändigt kontextuellt stöd. De visar att elever som ingick i studien i hög grad förstår den relationella betydelsen om de får se likhetstecknet i uppgifter med operationer på båda sidor av tecknet. Generellt sett så ser dessa elever inte likhetstecknet som en relationell symbol men med hjälp av kontexten kan de däremot förstå dess hela innebörd. Det kan alltså vara så att många elever förstår den relationella betydelsen av likhetstecknet men de kan inte lösa en del ekvationer eftersom de inte visas som de vanligtvis ser dem i skolan och läroböckerna.

En förklaring till varför elever har svårt med likhetstecknet och varför de gör feltolkningar av de kritiska aspekterna kan enligt Baroody och Ginsburg (1983) och McNeil et al. (2006) vara att undervisningen i grundskolan ofta endast inriktar sig på att hitta ett svar på en operation. De skriver att läroböckerna nästan uteslutande visar uppgifter av den operationella sorten. TIMSS 2007 (Skolverket, 2008a) som är en internationell jämförande studie visar att undervisningen i Sverige är mycket läroboksbunden och om då dessa läroböcker har mycket av enbart tal där uträkningarna endast utförs till vänster om likhetstecknet lär sig eleverna följaktligen endast detta sätt att förstå likhetstecknet. McNeil et al. beskriver i sin studie hur likhetstecknet används i olika matematikböcker i USA. De använde sig av fyra matematikböcker som bland annat valdes utifrån kriteriet att de skulle vara i bruk i skolorna. Uppgifterna från böckerna delades in i olika kategorier och dessa var "operation på vänster sida är lika med svar" (exempel 3+4=7) och "icke standard kontext" (exempel 7=3+4). Den andra kategorin delades även in i två olika underkategorier som var "operationer på båda sidor av likhetstecknet" (exempel 5+2=3+4) och "annan icke standard kontext" (exempel 7=3+4, 7=7). Analysen av uppgifterna visade att alla matematikböckerna vanligen presenterade likhetstecknet i uppgifter av typen “operation på vänster sida är lika med svar” och mer sällan i typen av “operationer på båda sidor av likhetstecknet”. I en annan del av samma studie undersökte forskarna hur 110 sjätte klass elever, 119 sjunde klass elever och 93 åttonde klass elever hade för uppfattningar av likhetstecknet. Tre olika kontexter presenterades för eleverna: “operation på vänster sida är lika med svar” (3+4=7), “operationer på höger sida” (7=3+4) och “reflexiv kontext” (7=7). Frågor som ställdes utifrån dessa olika kontexter var: “Vad heter symbolerna?” och “Vad betyder symbolerna?” Utifrån detta kategoriserade de sedan elevernas uppfattningar av likhetstecknet som operationell eller relationell förståelse. 44 procent av eleverna i studien hade uppnått den relationella förståelsen av likhetstecknet.

Carpenter et al. (2003) menar dock att läroböckernas innehåll inte kan vara enda anledningen till problemen med likhetstecknet och dess kritiska aspekter. I sina undersökningar har de uppmärksammat att elever redan i de tidiga åldrarna har svårigheter. Både Carpenter et al. och Runesson (2006) nämner även miniräknaren, där enbart operationer utförs, som en anledning. Carpenter et al. poängterar dock att den inte kan var den enda anledningen eftersom svårigheterna fanns redan innan miniräknaren var tillgänglig för alla. De nämner vardagen som en anledning där utförandet av operationer är vanligare och lättare än att se relationer mellan saker, det innebär att det faller sig mer naturligt för barn att reda ut en linjär serie med tal än att reda ut relationerna mellan samma tal. Baroody och Ginsburg skriver om ytterligare en anledning till varför elever har svårigheter. De säger att det helt enkelt kan vara så att eleverna inte har nått upp till en tillräckligt hög kognitiv nivå. Carpenter et al. menar motsatsen, att elever i första och andra klass kan lära sig den relationella förståelsen av likhetstecknet i vanliga aritmetiska uppgifter.

Samma forskare menar vidare att det finns fyra olika steg som elever kan gå igenom. Dessa kan läraren jämföra mot när de arbetar med elever på deras väg mot förståelse av likhetstecknet och dess kritiska aspekter. De understryker dock att inte alla elever går samma väg men att det kan vara en hjälp. Det första steget är att reda ut elevens förförståelse för vad den tror att likhetstecknet betyder. Här nämner de olika förståelser som kan vara felaktiga men genom att utreda hur eleven förstår likhetstecknet kan framsteg sedan ske. Det andra steget är uppnått när eleven accepterar en talmening som exempelvis 3+5=8, 8=5+3, 8=8 eller 3+5=5+3. Det tredje steget beskrivs som att eleven nu förstår att likhetstecknet är en relation mellan de båda sidorna av likhetstecknet. Nu kan eleven göra uträkningar på båda sidor av tecknet och förstår att det ska bli lika mycket. Det sista och fjärde steget betyder att eleven kan förstå att det blir lika mycket på båda sidor utan att egentligen utföra räkneoperationen utan i stället så jämför eleven talen och ser att det blir lika mycket. McNeil et al. (2006) framhåller att det är mycket bättre att visa tal med räkneoperationer på båda sidor om likhetstecknet för att uppnå den relationella förståelsen för tecknet. Även McNeil och Alibali (2005) påpekar betydelsen av att visa tecknet varierat, kontextuellt sett, för att kringgå att eleverna endast lär sig den operationella innebörden. Vilka olika kombinationer av kontext som är optimalt för att lära eleverna den relationella betydelsen är ett område som behöver mer forskning enligt författarna.

Sammanfattningsvis kan sägas att det lilla till synes obetydliga likhetstecknet verkar ge elever en del bekymmer och det verkar inte vara så lätt att lära sig. Eftersom tecknet finns överallt och är en av de viktigaste grundpelarna inom matematiken enligt McNeil & Alibali talar detta för att det är ett viktigt ämne att belysa och utreda vidare.

2.3 Verktyg för läraren

I den nuvarande Kursplanen för matematik står det om ämnets karaktär och uppbyggnad (Skolverket, 2000). Här beskrivs matematiken som att den alltid innehåller någon form av abstraktion. Likhetstecknet är en abstraktion och det står även i kursplanen att matematiken måste bemötas med både uppfinningsrika problemlösande aktiviteter och kunskaper om det matematiska begreppet. Detta för att elever inte ska uppfatta likhetstecknet som för abstrakt och långt ifrån sin egen nivå. I samband med detta och kopplat till forskning om elevers svårigheter med symboler så kan kursplanens uppmaning om att glädjen ska blandas med möjligheter att kommunicera matematikens språk och uttrycksformer vara till hjälp. Enligt kursplanen är det viktigt att eleverna får känna att matematik är roligt och även att eleverna får tillfälle att känna tillfredsställelse när de klarar av att lösa olika problem.

Den nuvarande kursplanen är inte tydlig när det gäller likhetstecknet eftersom det inte nämns specifikt. Den nya läroplanen för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet **(**Lgr 11) som gäller från hösten 2011 är väldigt tydlig när det gäller likhetstecknet (Skolverket 2010a). Det står i Kursplan i matematik i grundskolan under centralt innehåll i årskurs 1-3 om algebra att matematiska likheter och likhetstecknet betydelse är viktiga. Under syfte står det att: eleverna ska ges förutsättningar genom undervisningen att lära sig grundläggande matematiska begrepp vilket kan tolkas som att likhetstecknet innefattas i dessa begrepp.

I analysschemat (Skolverket, 2009) som gäller för elever upp till årskurs 6 finns en direkt koppling till läroplanen eftersom analysschemat är en hjälp för att analysera om eleven förstår likhetstecknets innebörd och har begreppsförståelse. Det står under rubriken symboler och obekanta tal om analysens fokus på barnets förståelse för symboler, likhetstecknet och om barnet kan ta reda på obekanta tal i enkla uppgifter. I samband med dessa obekanta tal ska eleven förstå att det handlar om ett eller flera utelämnade tal i en likhet. Sammantaget leder analysen fram till om eleven har de kunskaper som behövs för att senare klara av algebra.

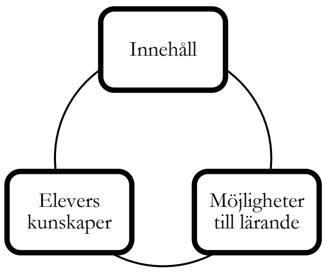
Ämnesprovet 2009 i matematik för år 3, tar upp huvudräkning med uppgifter nästan helt utan text av slaget 17 = 14 + __ där ca 15 % av alla testade elever har svarat 31. Dessa elever har lagt ihop 14 och 17 i stället för att klura ut vad som tillsammans med 14 ska bli 17 (Skolverket, 2010c). I en rapport från Skolverket (2008a) står det om att Sverige är med i den internationella studien Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) som genomförs av International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). TIMSS är en jämförande studie i matematik och naturorienterade ämnen som genomförs vart fjärde år och den startade år 1995. Den visar hur Sverige ligger till över tid i förhållande till andra länder som deltar. I TIMSS 2007 (Skolverket, 2008b) för årskurs 4, fanns en uppgift som är intressant för denna studie av sorten, sätt in ett tal i rutan: 12/3 = __ /2. Resultatet av den uppgiften visade att ungefär 45 % svarade att det blev 4, i stället för rätt svar som är 8 vilket endast 19 % hade svarat.

Slutsatsen som Skolverket (2008a) redogör för genom resultaten från TIMSS och ämnesproven är att svenska elever verkar ha problem med tal där likhetstecknet inte är placerat på traditionellt sätt som en operator.

2.4 Variationsteorin

Variationsteorin valdes som ett verktyg för att kunna analysera det specifika lärandeobjektet likhetstecknet och för att kunna utreda frågeställningarna.

Inom variationsteorin är en viktig aspekt lärandeobjektet, den förmåga eller kunskap läraren vill att eleverna ska utveckla (Marton & Booth, 2000). Enligt Runesson (2005) ska variationsteorin ses som ett komplement till andra teorier eftersom den kan avslöja villkoret till vad som är möjligt att lära i en speciell klassrumssituation. Marton, Runesson och Tsui (2004) beskriver variationsteorin som ett verktyg för att hitta de delar som måste finnas med för att en elev ska kunna lära sig något. Den är ett verktyg för att planera och analysera undervisning och lärande och den kan användas till att hitta de olika villkor som behövs för att ett lärande ska ske. Författarna skriver vidare att våra tidigare erfarenheter färgar oss så att vi uppfattar situationer på skilda sätt. De skriver sedan vidare att det är utifrån dessa skilda sätt att se på till exempel ett lärandeobjekt som vi försöker uppnå målet, att ett lärande inträffar. Ett lärande kan definieras som att det sker då vi upptäcker nya aspekter av lärandeobjektet, en förändring sker i hur saker och ting förstås och uppfattas. Ett lärandeobjekt har flera aspekter och vi förstår det olika beroende på vilka aspekter vi urskiljer och om vi urskiljer flera aspekter samtidigt. Eftersom människor ser, förstår eller uppfattar samma sak på olika sätt så är förutsättningen för att man skall kunna urskilja till exempel lärandeobjektet att man har upplevt en variation av de kritiska aspekterna av objektet som ska läras in. I Figur 1 tydliggörs hur det går att analysera och planera undervisningen efter ett variationsteoretiskt tänkande. Det som är i fokus är de kritiska aspekterna hos lärandeobjektet vilket i detta fall är innehållet likhetstecknet. Beroende på elevgruppen och vad som är kritiskt i innehållet för eleverna planeras undervisningen utifrån de kritiska aspekterna. Det är många delar av ett innehåll som eleverna ska förstå och det väsentliga är hur läraren skapar möjligheter till lärande utifrån varje kritisk aspekt av innehållet. Detta arbetssätt kan ses som en cykel där hela tiden en analys av innehållet och elevernas kunskaper måste ske för att skapa möjligheter till lärande.



Figur 1. En figur som symboliserar ett sätt att analysera och planera undervisningen inom variationsteorin. Det som är centralt är innehållet med lärandeobjektet och dess kritiska aspekter. (U. Runesson, personlig kommunikation, 15 december, 2010)

Kritiska aspekter är ett centralt uttryck inom variationsteorin (Holmqvist, 2006). De kritiska aspekterna är de delar av ett lärandeobjekt som läraren måste ge eleverna möjlighet att upptäcka för att de ska kunna få en förståelse för ett lärandeobjekt. Med detta menas att man ska visa de olika betydelserna för lärandeobjektet samtidigt, inte visa det ena sättet först och det andra sättet i nästa steg (Runesson, 1999; Runesson, 2006; Runesson & Marton 2002). Ett exempel på detta kan vara om en elev ska lära sig likhetstecknet, då måste eleven få möjlighet att lära sig dess fullständiga betydelse samtidigt med hjälp av variation. Eleven måste både få se den operationella och relationella betydelsen samtidigt genom *variation* och på så sätt förstå att det går att utföra beräkningar på båda sidor av likhetstecknet och att likhetstecknet står för ekvivalens. ”När personen i fråga *urskiljer* de olika delarna *samtidigt* och kan sätta samman dem till en helhet blir det möjligt att förstå/…/” (Holmqvist, 2006, s. 16) vad till exempel likhetstecknet är för något. De olika aspekterna av likhetstecknet som beskrivits ovan är kritiska på så sätt att de är helt avgörande för att lärandeobjektet lärs in. Delarna är inte kritiska för de elever som redan har urskiljt dem.

För att lärande ska ske måste eleven få tillfälle att urskilja och uppleva innehållet och detta kan ske i två steg enligt Marton och Booth (2000). Den första delen innebär att eleven måste förstå att det den ska lära sig är relevant och detta uppnås genom att använda sig av barnens värld och erfarenheter. Alla elever har förkunskap av ett aktuellt lärandeobjekt eller en situation (en slags helhet) men det är genom att urskilja fler *delar* eller aspekter av lärandeobjektet vi förstår det annorlunda och vi har då en ny helhetsbild. Ett tydliggörande av *helheten* som sedan följs av delarna som sätts på rätt plats.

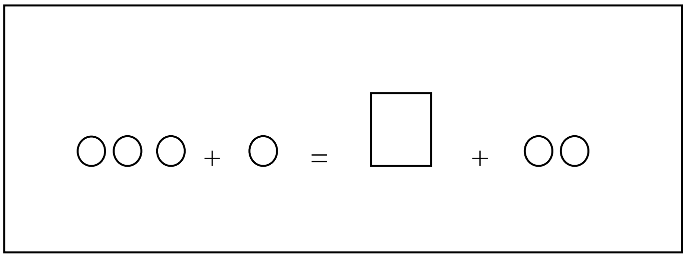
> Ur vår synvinkel går lärande i regel framåt från en odifferentierad och mindre sammanhängande förståelse av helheten till en ökad differentiering och integration av helheten och dess beståndsdelar. På så sätt framskrider lärandet inte så mycket från delar till helheter utan från helheter till helheter. (Marton och Booth, 2000, s. 10)

Den andra delen kan sammanfattas med variation. Sättet som variationsteorin beskriver för att förstå lärandeobjektet, i det här fallet likhetstecknet, är genom variation av de kritiska aspekterna. Genom en variation av ett lärandeobjekt ges eleven möjlighet att generalisera (Marton & Booth, 2000). Det finns olika sätt att använda variation på. Antingen så varieras platsen på de ingående talen samtidigt som metoden hålls konstant, till exempel 4+2=6 som varieras genom att ändra om till 6=2+4 och så vidare. Eller så varieras storleken på talen men operationen hålls konstant: 2+3=5, 4+2=6 (Runesson & Marton, 2002). Ännu en dimension blir det när dessa variationsmetoder visas samtidigt enligt Runesson (2000). Hon beskriver en annan variant på variation som är kontrastering vilket går till så att motsatsen visas. Exempelvis kan en uppgift visas som är ekvivalent, sedan visas motsatsen genom en uppgift som inte är ekvivalent: 4+5=3+6 som kontrasteras med 4+4=3+6.

Sammanfattningsvis kan sägas att genom variationsteorin fästs uppmärksamhet på att eleverna ser olika saker i de olika lärandesituationerna. Detta betyder att man inte kan utgå ifrån att alla elever lär sig samma saker utan det beror på hur de uppfattar eller urskiljer ett lärandeobjekt eller fenomen. För att en elev ska lära sig något måste den urskilja alla de kritiska aspekterna för just det lärandeobjektet genom variation (Runesson, 2006).

2.5 Spelet

Bergsten et al. (1997) redogör för ekvationsspelet vars upphovsmakare är Viggo Kilborn. Spelet kan hjälpa eleven att dels bli bekant med det obekanta i en ekvation som ju vanligtvis är x och dels uppnå förståelse för likhetstecknets rätta betydelse. Spelet har huvudfokus på prealgebra med syftet att lära eleverna ekvationer. Det som har tagits fasta på i denna studie är vinsten med likhetstecknets innebörd och sedan har ursprungsidén förändrats mer mot att enbart behandla likhetstecknet. Den förändrade variant som har använts i denna studie var utformad så att eleverna fick använda pärlor, två tändsticksaskar och en lapp med likhetstecknet på. Huvudsyftet var att genom tändsticksaskarna skapa en eller två obekanta i en uppgift, exempelvis 3+1=__+2 där den tomma platsen symboliserar en tändsticksask. I figur 2 visas spelplanen med pärlorna och en tändsticksask.



Figur 2. Här visas pärlorna genom de runda ringarna och rektangeln symboliserar tändsticksasken. Likhetstecknet syns i mitten och den visades för eleverna med en papperslapp med likhetstecknet på.

3 Syfte

Syftet är att genom en undervisande intervju baserad på ett spel som har sina rötter i ekvationsspelet se om eleverna kan utveckla sin förståelse för likhetstecknets betydelse.

4 Frågeställningar och avgränsning

Forskningsplattformen som denna studie ingår i undersöker bland annat hur elever lär sig matematik genom att pröva ett sätt att undervisa för att sedan revidera och testa i en ny elevgrupp. Forskningsmetoden brukar kallas learning study och den är uppbyggd som en upprepad process där ett avgränsat lärandeobjekt är i fokus (Gustavsson & Wernberg, 2006). Jag inspirerades av denna metod och har testat ett sätt att undervisa om likhetstecknet genom en undervisande intervju som har många likheter med en kvalitativ forskningsintervju (Kvale och Brinkmann, 2009). Idéerna får sedan gärna revideras och testas i en annan elevgrupp som en fortsatt learning study.

Frågor som ska besvaras i studien är:

- Vilka möjligheter till lärande kan den undervisande intervjun med spelet erbjuda?
- Vilka är möjliga kritiska aspekter av likhetstecknet och vilka färdigheter visar eleverna vad det gäller likhetstecknets innebörd?

5 Metod

I detta kapitel kommer en genomgång av metodval, urval och genomförandet av studien att redovisas. Sedan kommer även forskarrollens restriktioner att redogöras för genom tillförlitlighet och de etiska principerna och avslutningsvis kommer analysprocessen att beskrivas.

Syftet är att genom en undervisande intervju baserad på ett spel som har sina rötter i ekvationsspelet se om eleverna kan utveckla sin förståelse för likhetstecknets betydelse. Den undervisande intervjun är ett sätt för en lärare att undervisa en elev om ett specifikt lärandeobjekt. Den undervisande intervjun har många likheter med den kvalitativa forskningsintervjun. Kvale och Brinkmann (2009) beskriver den kvalitativa forskningsintervjuns syfte som är att titta ur den intervjuades perspektiv för att ta reda på konkreta innebörder av specifika situationer. Fokus ligger på att få den intervjuade att beskriva på ett nyanserat sätt för att få fram den kvalitativa mångfalden. För att kunna ha en flexibel intervjusituation valdes en semistrukturerad intervju. Bryman (2009) beskriver den som en lista över de teman som ska beröras som inte behöver följas helt utan den inbjuder till att gå utanför frågorna för att komma åt det som anses vara viktigt. Intervjuerna i denna studie hade dock visst mått av struktur som sedan kunde varieras efter några bestämda ramar.

Tanken från början var att använda Viggo Kilborns (1981) ekvationsspel. Ett pilotförtest genomfördes på 19 elever som visade att det skulle bli för mycket fokus på ekvationer och prealgebra i stället för på likhet vilket inte var meningen. I stället så modifierades ursprungsspelet (se bilaga 3). Utgångspunkten var öppna utsagor som visades med pärlor i formen 2+__=2+2 med en till två obekanta tal där tändsticksasken fick symbolisera de obekanta. I den undervisande intervjun användes inte exakt samma uppgifter i de olika intervjuerna utan samma mönster och antal siffror användes i stället. Även samma stegring i svårighetsgrad användes då tändsticksaskarna flyttades runt. För varje elev visades 4-6 olika varianter av de öppna utsagorna. Det som skulle undersökas var hur elever uppfattar likhetstecknet och var de stöter på problem. Den undervisande intervjun skulle även försöka lära dem dess fullständiga betydelse. På grund av detta poängterades hela tiden likhetstecknet och dess betydelse under intervjuer så att eleverna skulle bli medvetna om tecknet och hur viktigt det är. Under alla intervjuerna var en videokamera riktad mot elevernas händer för att inte några moment skulle falla i glömska och för lättare kunna analysera och se vad eleverna gjorde. Dessa filmer var även ett verktyg för att kunna transkribera.

Ett för- och eftertest användes och dessa redovisas med tabeller i resultatet. Det färdiga förtestet (se bilaga 2) utfördes, analyserades och utifrån resultatet baserades de olika uppgifterna och frågorna till intervjun. Sedan användes samma test som förtestet efter intervjuerna för att se vilken kunskap som hade utvecklats.

Valet av dessa test inspirerades av learning study (Wernberg, 2006). En learning study redovisas genom för och eftertest som är ett verktyg för att se vad eleverna kan och vad de lär sig men det går även att se vad som kan tänkas vara kritiskt i innehållet. Learning study är uppbyggd cykliskt och förutsätter ett upprepande och utvecklande av hur ett specifikt lärandeobjekt ska läras ut. Olika sätt att behandla lärandeobjektets kritiska aspekter leder till olika möjligheter för eleverna att förstå. Denna studie kan ses som Lektion 1 i denna cykel. Utifrån detta valdes vilket fokus studien skulle ha och sedan valdes elevernas vanliga skolmiljö med skolbarn i de passande årskurserna 2 och 3. Valet av miljö för studien med en enskild intervju och en elev i taget valdes för att få fram varje individs kunskaper och sätt att se på uppgifterna med möjlighet att påverka eleverna mot ett lärande.

5.1 Urval

Åtta elever ingick i studien och dessa valdes ut genom bekvämlighetsurval (Bryman, 2009). Som namnet antyder befann sig dessa elever nära till hands under författarens verksamhetsförlagda utbildning (VFU). Klassen som bestod av 19 elever var en blandad årskurs 1-2-3. De utvalda eleverna i undersökningsgruppen gick i klass 2 och 3 med fyra elever från varje årskurs. Dessa årskurser valdes eftersom de befann sig i en intressant fas av sitt lärande, där de redan hade en förståelse av likhetstecknet. Resultaten skulle därför kunna bli intressanta om de redan hade skaffat sig feltolkningar eller färdigheter vad det gällde likhetstecknet. Eftersom möjliga kritiska aspekter skulle vara fokus var det bra att de redan kunde en del om likhetstecknet så att det fanns något att arbeta utifrån. Urvalet till undersökningsgruppen gjordes utifrån resultatet på förtestet vilket alla i klassen genomförde förutom fyra som var frånvarande. För att få så stor variationsbredd som möjligt valdes både elever med bra resultat och elever med sämre resultat. Eftertestet genomfördes även det av alla eleverna i klassen.

5.2 Genomförande

Innan studien startades tillfrågades läraren i klassen om det gick att använda dennes klass. Även eleverna själva tillfrågades muntligt och deras föräldrar tillfrågades genom ett skriftligt intyg som de fick skriva under (se bilaga 1). De fick ta ställning till om deras barn skulle få vara med vid studien och om deras barns händer fick filmas. Först gjordes ett pilotförtest. Detta förtest justerades eftersom stora delar av det inte visade några intressanta fel då många elever hade alla rätt och eftersom fokuseringen från början hade varit fel. Det färdiga förtestet innehöll sedan endast uppgifter av den variant som användes vid intervjutillfället senare, exempelvis 2+2=__+3. Det justerade förtestet genomfördes (se bilaga 2) på 15 av de 19 eleverna i klassen då fyra var frånvarande. Det var 5 elever från klass 2 och 10 elever från klass 3 som gjorde förtestet. Resultaten från förtestet var sedan bas till det fortsatta arbetet. En analys gjordes av resultatet på uppgifterna för att få en bild av vad som skulle kunna vara kritiskt i innehållet likhetstecknet. Sedan riktades spelets upplägg in på uppgifter av typen som eleverna hade problem med eftersom dessa verkade vara de kritiska aspekterna. Förtestet startade studien. De undervisande intervjuerna gjordes sedan ca en vecka efter förtestet. Alla intervjuer gjordes inte samma dag utan de var utspridda på en vecka. Två dagar efter det att alla intervjuer var avslutade genomfördes det avslutande eftertestet.

Innan de riktiga intervjuerna inleddes gjordes en pilotintervju för att testa vilken teknik som skulle användas och för att forskaren skulle kunna träna på intervjuteknik. Det var även ett sätt att få tillfälle att eventuellt justera frågeformuläret. Några justeringar gjordes vad det gäller antal frågor och stegringen i svårighetsgrad. Intervjuerna genomfördes sedan med de utvalda eleverna individuellt. Videokameran sattes på innan eleven hälsades välkommen och sedan började den undervisande intervjun. Eleverna togs ut vid tillfällen där det ansågs finnas tillräckligt med tid, ca 20 min per barn, för att kunna genomföra hela den undervisande intervjun utan att bli avbruten. Intervjuerna hölls på ett undervisande plan. Detta så att eleverna förstod att det var en lärandesituation och inte en leksituation vilket det hade verkat som eleverna hade förväntat sig när spelet tidigare hade presenterats. Efter det att alla intervjuer hade blivit genomförda avslutades hela studien med ett eftertest som var identiskt med förtestet. Eftertestet gemfördes på hela klassen trots att endast 15 av 19 elever hade gjort förtestet. Resultatet från fyra som inte var med vid förtestet har inte tagits med i analysen och resultatdelen. De inspelade intervjuerna från undersökningsgruppens åtta elever transkriberades sedan ordagrant och varje intervju blev cirka fyra sidor text som analyserades för att få fram ett resultat.

5.3 Tillförlitlighet

Reliabilitet och validitet är enligt Bryman (2002) främst något som används inom den kvantitativa forskningen. Forskare är här oense om vilka termer och tillvägagångssätt som ska användas inom den kvalitativa forskningen. Bryman redogör för olika huvudsyner och det som har tagits fasta på i denna studie är de termer som Bryman tar upp från forskarna Lincoln och Guba (1985 och Guba och Lincoln (1994). Deras utgångspunkt är att det inte finns någon absolut sanning om den sociala verkligheten utan att den går att beskriva verkligheten på flera olika sätt. De beskriver två kriterier, trovärdighet och äkthet. Det första kriteriet, trovärdigheten kan delas upp i fyra olika delar: Tillförlitlighet, överförbarhet, pålitlighet och en möjlighet att styrka och konfirmera.

För att stärka trovärdigheten på studien har ett pilottest gjorts av både förtest och själva intervjun med spelet. Sedan har dessa omarbetats för att passa in i studien. Alla delar i studien har utförts på välbekant mark för de som har testats, vilket betyder i deras vanliga skolmiljö, detta för att motverka att eleven ska känna sig stressad och att detta i sin tur påverkar resultatet. Alla intervjuer videofilmades för att stärka pålitligheten så att ingenting skulle gå förlorat på grund av minnesförlust. Eleverna har inte heller fått se varken förtest eller spel i förväg så att de ska kunna ”öva” innan eller förhöra sig om ”rätt” svar på annat håll på förhand. Resultatet är tillförlitligt i den mening att det har gjorts tydligt hur de redovisade resultaten har framförts och hur elevernas resultat och uppfattningar efter genomgången intervju har kategoriserats. Vidare stärktes överförbarheten genom att beskriva data och resultat så utförligt och målande som var möjligt. Detta för att ge läsaren en bas på vilken den kan bilda sig en uppfattning om arbetets överförbarhet till en annan miljö. Även alla faser i analysprocessen är tydligt redovisade, allt för att stärka pålitligheten.

Författaren är nybörjare inom forskningsfältet, därför ska det som framkommit ses ur den synvinkeln. Väl medveten om detta har författaren försökt att hålla sig så professionell som möjligt och försökt att inte låta personliga värderingar styra. Detta för att stärka den så kallade möjligheten att styrka och konfirmera.

Uppmärksammas bör även att författaren medvetet har försökt att påverka eleverna efter förbestämda ramar för att få den så kallade undervisande intervjun till att bli just undervisande.

Det andra kriteriet som forskarna formulerar är äkthetskriteriet som frågar mer generella frågor som får forskningspolitiska konsekvenser. Exempelvis kan nämnas den taktiska autenticiteten där det utreds om studien har gjort möjligheterna att vidta åtgärder som krävs för förbättring större. Genom denna studie har ett försök gjorts vad det gäller elevers förståelse av likhetstecknet innebörd. Ett steg på väg till en förbättring av detta område.

En styrka i studien är att författaren har satt sig in i det matematiska innehållet innan både den undervisande intervjun och förtestet. På så vis har författaren haft en större förståelse och är kanske mer uppmärksam på olika aspekter. Men det kan även vara så att det lästa har styrt något vilket kan ha fört med sig en låsning från att se nya egna saker.

5.4 Forskningsetiska aspekter

Vid all form av forskning föreligger vissa forskningsetiska aspekter som måste tas hänsyn till. Vetenskapsrådet (2010) har listat fyra principer som följts vid det pågående arbetet: konfidentialitetskravet, informationskravet, samtyckeskravet och nyttjandekravet. Konfidentialitetskravet betyder att inga personer förutom forskaren kommer att veta vem som har medverkat i forskningen, detta krav ska inte blandas ihop med anonymitet som är en strängare form där inte ens forskaren vet vem som har sagt vad. För att uppfylla detta krav valdes att presentera eleverna med fiktiva namn. Det rätta namnet på skolan där eleverna studerar kommer heller inte att nämnas. Alla medverkande elever och deras föräldrar har blivit informerade om studiens karaktär och är införstådda med att den är helt frivillig och kräver samtycke från alla och att de när som helst kan avbryta sin medverkan. Det sista kravet, nyttjandekravet, innebär att all data som insamlats endast kommer att användas till avsedd studie.

5.5 Analys av insamlat material

Analysen inleddes i och med att förtestet var genomfört. Testet analyserades för att upptäcka kritiska aspekter i lärandeobjektet likhetstecknet. Det som hittades var att vissa uppgifter orsakade fler fel än andra uppgifter. Innehållet i dessa uppgifter skulle kunna vara kritiskt, därför användes de uppgifterna som flest elever hade fel på som en grund till de undervisande intervjuerna. Efter det genomfördes intervjuerna och sedan fortsatte analysarbetet med transkriberande av alla intervjuerna ordagrant genom videofilmerna. Kvale och Brinkmann (2009) skriver om meningskoncentrering som analysmodell. Den innebär att man utgår från de transkriberade intervjuerna, sedan dras långa sammanhängande stycken ihop så att huvudinnebörden fortfarande finns kvar i ett centralt tema. Meningskoncentrering användes och efter det ställde jag mina forskningsfrågor till dessa centrala teman för att i sista steget knyta samman alltsammans till ett resultat. I det sista steget klipptes de centrala temana isär för att försöka hitta ett sätt att kategorisera det eleverna hade visat och sagt. De klippta delarna flyttades runt för att hitta ett mönster och för att kunna kategorisera resultatet som sedermera blev tre huvudkategorier.

I resultatet kommer begrepp från Skolverkets (2009) analysschema att användas i samband med redogörelsen av analysen. Analysschemat användes som hjälpmedel tillsammans med videoinspelningarna för att ta reda på i vilken utsträckning eleven förstår likhetstecknets innebörd och för att fokusera på hur de visar sin kunskap. Detta för att hitta olikheter i hur eleverna visar sina kunskaper och om eleven klarar av att ta reda på värdena i obekanta tal i enkla uttryck, ett sätt att ta reda på utelämnade tal i en likhet. När eleven kan finna den obekanta så att ekvivalens uppstår har eleven dessutom förståelse för det som hänger ihop med detta, nämligen de fyra räknesätten och likhetstecknet innebörd. Andra begrepp som kommer att användas är *omedelbar taluppfattning* som innebär att eleven med en blick kan uppfatta ett antal utan att behöva räkna föremålen ett och ett. Att kunna *jämföra,* dra slutsatser och lösa uppgifter på olika sätt är andra egenskap som jag har tittat på.

Variationsteorin har använts som ett analysverktyg. För att hitta centrala teman och för att hitta kritiska aspekter har begreppen *urskiljer* och *samtidighet* använts. Fokus kommer att ligga på lärandeobjektet och vad som är kritiskt i dess innehåll för eleverna. Vad urskiljer eleverna, vad urskiljer de inte och vad urskiljer de samtidigt är frågor som tillsammans med forskarfrågorna ställts till meningskoncentreringen. Författaren har även tittat på om eleverna kan se både *helheten* och *delarna* i uppgifterna samtidigt. Det som *varierade* vid spelet var egentligen inte uppgifterna i sig utan talen i uppgifterna och platsen där den obekanta befann sig, detta för att skapa möjligheter till lärande av de *kritiska aspekterna* som hittades i förtestet. Det som var konstant var uppbyggnaden av uppgifterna eftersom den hela tiden utgick ifrån två tal på båda sidor om likhetstecknet.

6 Resultat

I resultatet kommer den undervisande intervjuns tolkade data att redovisas och vad meningskoncentreringen resulterade i.

6.1 Elevernas resultat på för- och eftertest

Den första frågan, vilka möjligheter till lärande kan den undervisande intervjun med spelet erbjuda, besvaras genom en granskning av förtest och eftertest. Resultaten från för- och eftertest kommer att redovisas dels genom Tabell 1 med hela klasserna och dess 15 elever och dels genom Tabell 2 med enbart undersökningsgruppens åtta elever. Båda tabellerna kommer att redovisas genom lösningsprocent för enhetlighetens skull med vetskapen om att det inte är helt brukligt att använda procent vid så få undersökningspersoner.

Uppgifter av den operationella sorten var inte en kritisk aspekt för eleverna. Detta urskiljs tydligt i förtestet som är redovisat i Tabell 1. Uppgift 2+2=4 gav nästintill full lösningsprocent. Detta var genomgående för båda klasserna och även för undersökningsgruppen. Motsatsen till de operationella uppgifterna är då de som kräver den fulla förståelsen för likhetstecknet, de relationella uppgifterna med operationer på båda sidor om likhetstecknet, uppgifter som verkar vara kritiska ur den aspekten att eleverna har svårigheter med just dessa delar. Den mest tydliga kritiska aspekten verkar vara där innehållet i uppgifterna har två obekanta tal på olika platser. Det verkar inte som om valet av plats för de obekanta talen hade någon betydelse utom just att det var två obekanta. Ännu en kritisk aspekt, om än inte lika tydlig var de uppgifter som hade två tal på båda sidor likhetstecknet och en obekant av sorten, 8+4=__+5.

De uppgifter som särskiljer sig i klass 2 gällande ökning i lösningsprocent är uppgifterna 5, 8+4=__+5, och 8, 6+__=8+4, där lösningsprocenten har gått upp från 20 % till 80 % respektive från 40 % till 80 %. När enbart undersökningsgruppen analyseras är ökningen lika uppseendeväckande med en ökning från 0 % till 75 % respektive från 25 % till 75 %. Dessa uppgifter symboliserar precis sådana som var med vid den undervisande intervjun. Noterbart är att uppgift 7 som är liknande, 5+7=__+12, har en minskad lösningspocent från 40 % till 20 % i klass 2 vilket tyder på ytterligare en kritisk aspekt på grund av att det obekanta talet ska bli 0 eller att uppgiften behandlar tal över 10.

I klass 3 var inte skillnaden mellan förtest och eftertest på uppgifterna, 5 och 8, lika stor eftersom de redan vid förtestet visade större lösningsprocent. Det finns egentligen ingenting som sticker ut extra mycket i klass 3 utan lösningsprocenten har ökat något mer på varje uppgift. Klass 3 startade på en högre lösningsprocent på förtestet än klass 2. De uppgifter som särskiljer sig när det gäller minskning eller utebliven ökning i undersökningsgruppen i både klass 2 och klass 3 är alla de uppgifter med två obekanta tal som till exempel uppgift 13, __+6=4+__ och uppgift 11, 7+__=4+__.

Tabell 1. Genomsnittlig lösningsprocent med rätt svar för hela klassen på förtest och eftertest om likhetstecknet.

	Förtest			Eftertest		
Uppgifter	**Klass 2**	**Klass 3**	**Klass 2 och 3**	**Klass 2**	**Klass 3**	**Klass 2 och 3**
1. 2+2=_+3	80	60	**67**	100	90	**93**
2. 2+2=__	80	100	**93**	100	100	**100**
3. 4-_=2+2	60	60	**60**	100	70	**80**
4. _+2=2+2	80	80	**80**	100	90	**93**
5. 8+4=_+5	20	50	**40**	80	60	**67**
6. 4+8=_	40	90	**73**	80	80	**80**
7. 5+7=_+12	40	40	**40**	20	60	**47**
8. 6+_=8+4	40	80	**67**	80	80	**80**
9. _+3=12	40	70	**60**	40	80	**67**
10. 4+3=_+_	40	40	**40**	60	60	**60**
11. 7+_=4+_	60	60	**60**	40	60	**53**
12. 7-_=_+1	40	50	**47**	40	70	**60**
13. _+6=4+_	60	50	**53**	40	60	**53**
14. 4+_=_+8	40	50	**47**	40	70	**60**
Medelvärde	**51**	**63**	**59**	**66**	**74**	**71**

Antalet för klass 2 var 5 elever och antalet för klass 3 var 10 elever. När medelvärden för klass 2 och klass 3 tillsammans har beräknats har viktning gjorts med hänsyn tagen till gruppernas inbördes storlek. Till exempel har medelvärdet för förtest klass 2 och klass 3 för uppgift 1 beräknats som (5 elever x 80 + 10 elever x 60) / (5 elever + 10 elever)

Tabell 2. Genomsnittlig lösningsprocent med rätt svar för undersökningsgruppen på förtest och eftertest om likhetstecknet.

	Förtest			Eftertest		
Uppgifter	**Klass 2**	**Klass 3**	**Klass 2 och 3**	**Klass 2**	**Klass 3**	**Klass 2 och 3**
1. 2+2=_+3	75	25	**50**	100	75	**88**
2. 2+2=__	75	100	**88**	100	100	**100**
3. 4-_=2+2	50	50	**50**	100	75	**88**
4. _+2=2+2	50	75	**63**	100	100	**100**
5. 8+4=_+5	0	25	**13**	75	75	**75**
6. 4+8=_	25	75	**50**	75	75	**75**
7. 5+7=_+12	25	25	**25**	0	75	**38**
8. 6+_=8+4	25	75	**50**	75	75	**75**
9. _+3=12	25	75	**50**	25	75	**50**
10. 4+3=_+_	50	25	**38**	50	75	**63**
11. 7+_=4+_	50	25	**38**	25	75	**50**
12. 7-_=_+1	25	0	**13**	25	50	**38**
13. _+6=4+_	50	25	**38**	25	50	**38**
14. 4+_=_+8	25	25	**25**	25	50	**38**
Medelvärde	**39**	**45**	**42**	**57**	**73**	**65**

Antalet för klass 2 var 4 elever och antalet för klass 3 var 4 elever.

6.2 Elevernas resultat på spelet

Genom den andra forskningsfrågan kommer de kritiska aspekterna och färdigheterna som eleverna visade att redogöras för genom analysen av den undervisande intervjun sammantaget med för- och eftertest. Utdrag ur intervjudialogerna kommer att redovisas och för att klargöra dessa visas intervjuarkommentarer och tankar inom parentes i dessa utdrag. När resultatet har sammanställts visas inte spelet så som eleverna fick se det med pärlor och en lapp med likhetstecknet på utan i stället så visas talen med siffror och symboler. Där eleverna har sett en tändsticksask visas detta med ett understreck och blank yta. Den redovisade kategoriseringen av elevernas färdigheter valdes utifrån deras förståelse av likhetstecknet under intervjuerna. De fiktiva namnen som valts på eleverna är Oliver, Kevin, Axel och Anna, 8 år samt Elin, Cilla, Love och Alina 9 år.

6.2.1 Full förståelse

Två av eleverna, Oliver och Kevin från klass 2, visar redan vid de inledande frågorna om vad likhetstecknet betyder och vad det kan användas till att de har uppnått full förståelse för likhetstecknet. Detta betyder att de vet att likhetstecknet innebär ekvivalens och att det går att utföra beräkningar på båda sidor om likhetstecknet och har därmed den relationella förståelsen. Dessa färdigheter gör att de kan urskilja både helheten och de enskilda delarna av uppgiften samtidigt. De uppvisar omedelbar taluppfattning vilket betyder att eleven inte behöver räkna varje tal utan eleven ser direkt helheten och kan utifrån det ge ett svar. Eleverna förstår att det blir lika mycket på båda sidor, i stället för att utföra varje liten del i räkneoperationen så jämför eleven talen och ser hur det ska bli lika mycket. I Dialog 1 ser eleven att 6 är 1 mer än 5 och utifrån det kan han lägga 1 och 2 på den andra sidan och vidare ökar han bara en mer i en av tändsticksaskarna:

Dialog 1. Kevin 8 år

1. **Intervjuaren:** /…/vi gör såhär, så tänkte jag, 5+__=6+__
2. **Kevin:** Då är det 5 (vänster led), det är 6 (höger led), då kan man göra såhär, lägger man 1 där (höger led) och 2 där (vänster led).
3. **Intervjuaren:** Helt rätt, men kan man göra på något annat sätt?
4. **Kevin:** Mmm, man kan lägga 2 där (höger led) och 3 där (vänster led).

De elever som har uppnått relationell förståelse visar även prov på uppfinningsrikedom och förmåga att lösa uppgifter på olika sätt. Dessa elever har förmågan att se samband och de förstår räknesätten vilket Oliver 8 år visar prov på i Dialog 2. Han tar först samma siffror som på den andra sidan men sedan kommer han även på att det går att variera de två talen på den andra sidan på många olika sätt:

Dialog 2. Oliver 8 år

1. **Intervjuaren**: /…/ 5+4=__+__
2. **Oliver**: Det här är nog enkelt
3. **Intervjuaren**: Det tror jag med
4. **Oliver**: Där är det 9 (vänster led), lika med, om jag lägger 5 där och 4 där (höger led)

5. **Intervjuaren**: Yes, jättebra
6. **Oliver**: Nä, 4 där och 5 där (tvärtom)
7. **Intervjuaren**: Kan man göra på något annat sätt då?
8. **Oliver**: Man kan ju ta 6 där och 3 där (höger led).
9. **Intervjuaren**: Yes

6.2.2 På god väg

I denna kategori kunde tre av eleverna från undersökningsgruppen urskiljas, Axel från klass 2 och Love och Alina från klass 3. De befinner sig på vägen mot att veta likhetstecknets fulla betydelse men de har inte riktigt förmågan att urskilja dess hela innebörd. Love är en av dem, han kunde förklara med ord att han visste att det skulle vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet men i den undervisande intervjun med honom så visade sig många av de kritiska aspekterna i innehållet som en svårighet och han visade många feltolkningar. Det han urskiljer är det operationella medan han inte urskiljer del och helhet i uppgifterna. Han hade svårt att generalisera kunskapen om ett visst innehåll och överföra det till olika situationer. Han kunde inte se sambandet mellan en situation och en annan eftersom han hade så skilda resultat på testerna och intervjun. Skälet till att han ändå placerades i denna kategori är att han hade 10 rätt på förtestet och hela 13 av 14 rätt på eftertestet. I dialog 3 visar Love hur han först vill ”lägga ihop” alla talen och sedan ändrar han sig och vill glömma bort den sista siffran.

Dialog 3. Love 9 år

1. **Intervjuaren**: Vet du vad det betyder? =
2. **Love**: Lika med tecken.
3. **Intervjuaren**: Vad kan man använda det till?
4. **Love**: Att det ska vara lika mycket på båda sidorna.
5. /…/
6. **Intervjuaren**: Nu gör vi sådär 2+2=__+3. Hur många ska man lägga i den asken då?
7. **Love**: Där har vi 4 (vänster led), plus 3 (höger led) eller?
8. **Intervjuaren**: Hur tänker du?
9. **Love**: Jag tänker att först så tar man dem (vänster led) och plussar och sen så tar man den (höger led).
10. **Intervjuaren**: Var plussar man den någonstans (höger led)?
11. **Love**: Eh, dit (från höger till vänster led).
12. **Intervjuaren**: Kan man göra så, eller hur tänker du?
13. **Love**: Eller nä, vänta, eller så ska man bara ta den (asken) och plussa på det (höger led: __+3)
14. **Intervjuaren**: Testa du, hur många vill du lägga i den (asken)?
15. **Love**: 4 (2+2=4 och glömma bort 3)
16. **Intervjuaren**: Testa du.
17. **Love**: Sen så lägger man i (han lägger i 4 i asken)
18. **Intervjuaren**: Titta på det här talet nu då, hur många är det där (vänster led) nu då?
19. **Love**: 4
20. **Intervjuaren**: Och där (höger led)?
21. **Love**: eh, 9, nej 7
22. /…/
23. **Intervjuaren**: Tänk på lika med tecknet. Likhetstecknet.
24. **Love**: Där är det 4 (vänster led), och där 7 (höger led). Då kan man bara ta dän dem (de längst bort i högerled 2+2=4), eller ta dän 3 där (i asken så det blir 2+2=1+3 som var ursprungsidén)

Alina är också en av dem som är på god väg till full förståelse av likhetstecknet. Hon hade endast 4 rätt av 14 på förtestet och sedan hade hon alla rätt på eftertestet. Hon visar tydligt under den undervisande intervjun att hon klarar av alla uppgifterna. I dialog 4 visar hon sin förmåga att urskilja helheten i uppgifter med både en och två obekanta samtidigt som hon urskiljer delarna. Hon placerades ändå i denna kategori på grund av förtestet men hon var på gränsen till att passa in i kategorin full förståelse:

Dialog 4. Alina 9 år

1. **Intervjuaren:** /…/ vad skulle du göra på ett sådant här tal, 5+7=__+12
2. **Alina:** Eh, (räknar alla pärlorna), det skulle vara 0
3. /…/
4. **Intervjuaren:** det här tar vi, tar vi 5 där och 4 där, sen tar vi två askar, 4+5=__+__
5. **Alina:** Då ska, kan det ligga, ska det ligga, man kan säga att det ska ligga en 2 där i och sen en 7 där, 5+4=2+7

Även Axel var på gränsen till att passa in i kategorin full förståelse eftersom han i stora delar av intervjun visade prov på en förmåga att urskilja helheten av uppgifterna. Han visade i början av intervjun att han endast kunde urskilja den operationella innebörden av likhetstecknet eftersom han i stället för att urskilja helheten och delarna i uppgiften vill lägga ihop alla talen. Detta visas i början av Dialog 5. I den senare delen av dialogen visas Axels förmåga att urskilja helheten efter en stunds undervisning och poängterande av likhetstecknets betydelse under intervjun:

Dialog 5. Axel 8 år

1. **Intervjuaren:** **/…/** 1+4=__+4, ska vi se då, vad tror du man ska lägga i den asken nu?
2. **Axel:** 9 (snabbt svar)
3. **Intervjuaren:** 9? Va…, hur tänker du? Kan du förklara?
4. **Axel:** Det är ju 9 där (visar alla talen) så…
5. **Intervjuaren:** Det är nio allt som allt men…(lyfte på asken)
6. **Axel:** 1
7. **Intervjuaren:** 1 ja, just det, du ändrade dig, varför ändrade du dig? Du kom på att…?
8. **Axel:** Där är det ju 1 (vänsterled), då ska det vara 1 där (högerled)
9. /…/
10. **Intervjuaren:** **/…/**5+__=3+4
11. **Axel:** 2
12. **Intervjuaren:** Hur tänker du? Du tänker att…
13. **Axel:** Det blir ju det
14. **Intervjuaren:** För att..
15. **Axel**: Det är 8 där (höger led) och bara 5 där (vänster led).
16. **Intervjuaren:** Ja, sju menar du va?
17. **Axel:** Ah. Den ska ju ha 2 där (asken) då blir det ju också 7.
18. **Intervjuaren:** Precis, helt riktigt. Nu ska jag göra en svårighet till dig. Jag lägger två såna. Nu
    1. kan man ju göra på olika sätt här nu då: 4+__=__+3
19. **Axel:** Den ska ha inga (vänsterled) fler, men den ska ha 1 (högerled)

6.2.3 Kritiska aspekter

Tre av eleverna, Anna från klass 2 och Elin och Cilla från klass 3, kategoriserade jag som att de behövde mer hjälp med att urskilja de kritiska aspekterna. De olika feltolkningarna skulle kunna bero på att eleverna inte urskiljer delarna och helheten samtidigt. Det som eleverna inte urskiljer är att det skall vara lika mycket på båda sidor av likhetstecknet, 8=8 samt att det kan förkomma räkneoperationer på båda sidor om likhetstecknet, 2+3=4+1, med andra ord att likhetstecknet betyder ekvivalens och inte bara ”det blir” eller ”summan av”. Precis som förtestet visade så resulterade även den undervisande intervjun i att uppgifter med operationer på båda sidor om likhetstecknet och flera obekanta gav flest problem.

Anna säger att likhetstecknet ska vara i slutet av uppgiften vilket tyder på en operationell uppfattning av likhetstecknet. Anna har en väldigt precis beskrivning i Dialog 6 där hon säger att likhetstecknet ska vara näst sist i talet:

Dialog 6. Anna 8 år

1.	**Intervjuaren:**	Vad kan man använda det till?
2.	**Anna:**	Om någon skriver en siffra, om någon skriver det är plus eller minus till exempel, kan någon skriva det i slutet.
3.	**Intervjuaren:**	Just det, i slutet där på det talet då?
4.	**Anna:**	Nej, näst sist.

Eleven fick sedan skriva ett sådant tal och skrev då: 3+4=7.

Elin urskiljer endast den operationella betydelsen och därmed upphör vänster led att existera när det är beräknat. Hon urskiljer inte de kritiska aspekterna del och helhet i uppgifterna och att operationer kan utföras på båda sidor om likhetstecknet. I dialog 7 var Elin frågande till uppgiften, 4=2+2. Hon undrade om jag inte hade gjort fel eftersom jag visade en uppgift från höger till vänster enligt henne:

Dialog 7. Elin 9 år

1.	**Elin:**	Har du gjort åt det hållet? (visar från höger till vänster)
2.	**Intervjuaren:**	Vad tror du? Stämmer det eller, kan man göra så? Hur tänker du?
3.	**Elin:**	Kanske
4.	**Intervjuaren:**	Kommer du ihåg vad vi sa om det här med lika med tecken? Vad var det som det betydde nu igen? Att det ska va…
5.	**Elin:**	Lika mycket på båda sidorna, sådär kan man inte göra.
6.	**Intervjuaren:**	Sådär kan man faktiskt göra, för ser du, hur många var det på den sidan (vänsterled)?
7.	**Elin:**	4
8.	**Intervjuaren:**	Och hur många var det på den sidan (högerled)?
9.	**Elin:**	2 (pekar på den längst bort till höger).
10.	**Intervjuaren:**	På den sidan, om du tänker dig, här har du lika med tecknet, så tänker du hur många var det där (vänsterled)?
11.	**Elin:**	4
12.	**Intervjuaren:**	Och hur många var det på den sidan (högerled)?
13.	**Elin:**	4, hela blir rätt!

Kritiskt i uppgiften 2+2=__+3 är att det finns två tal efter likhetstecknet som gör att elever tenderar att ”glömma bort” ett av de tal som förvirrar för dem. Dessa uppgifter frångår deras operationella förståelse där man inte kan utföra beräkningar på båda sidor om likhetstecknet och det de urskiljer är att likhetstecknet alltid ska vara på samma plats. De urskiljer inte delarna och inte heller delarna i delarna. De urskiljer läsriktningen som att den alltid är från vänster till höger och i samband med detta försvinner vänsterled när det är uträknat. I dialog 8 lägger Elin ihop vänsterled och säger att svaret blir 4 samtidigt som hon inte ”ser” den sista siffran 3 som inte borde vara där och förvirra:

Dialog 8. Elin 9 år

1.	**Intervjuaren:**	/…./nu ska vi göra såhär, att vi tar: 2+2=__+3, nu ska vi se om du kan lista ut hur många vi ska lägga i den asken där?
2.	**Elin:**	2 plus 2 är lika med 4 (pekar på asken), ska man lägga i asken.
3.	**Intervjuaren:**	Hur tänker du? Du tänker att…
4.	**Elin:**	2 plus 2 är ju 4, då ska man lägga fy.., nä det går inte, eller det går.
5.	**Intervjuaren:**	Blir det rätt då? Om man lägger 4 där (i asken)…
6.	/…/	
7.	**Intervjuaren:**	Ska jag visa dig? Vi gör såhär, om man bara tar 1, ser du? På den sidan om lika med tecknet är det 4 och på den sidan om lika med tecknet är det…
8.	**Elin:**	4

Efter många turer fick jag till slut visa Elin vad som skulle vara i asken.

Ett annat sätt på vilket de kritiska aspekterna om ekvivalens försvårar i innehållet är genom att eleven verkar vilja ”lägga ihop alla” eller ”plussa” över likhetstecknet eftersom de tror att likhetstecknet betyder ”det blir” eller ”summan av”. De urskiljer inte symbolerna. Dessa feltolkningar har sina rötter i den operationella tolkningen av likhetstecknet. I dialog 9 vill Cilla gärna lägga ihop både vänster och höger led för att komma fram till en ”summa” att stoppa i asken:

Dialog 9. Cilla 9 år

1.	**Intervjuaren:**	/…/2+2=__+3, hur många vill du lägga i asken?
2.	**Cilla:**	2 och 2 är 4, sen är det 3 där, då är det 7 tillsammans med alla pärlor.
3.	**Intervjuaren:**	Du får ju tänka på att du har likhetstecknet där, hur var det med likhetstecknet nu igen? Hur tänker du?
4.	**Cilla:**	Vänta, då ska det vara 1 där (i asken).

6.3 Resultatsammanfattning

För att knyta ihop resultatet vill jag sammanfatta det genom att redovisa en lista i punktform. Genom att jämföra de olika kategorierna har jag även fått fram de kritiska aspekterna av likhetstecknet för dessa elever såsom färdigheter som var en av mina forskningsfrågor. Den första punkten besvarar min första forskningsfråga som frågade vilka möjligheter till lärande spelet kan erbjuda. Då en jämförelse görs mellan 6.2.1, 6.2.2 och 6.2.3 är min uppfattning att detta är det sammanfattade resultatet:

- Eftertestet visade ökad lösningsprocent på uppgifter med öppna utsagor i både klass 2 och 3.
- Uppgifter av operationell sort (2+2=4) visade sig inte vara en kritisk aspekt.
- Uppgifter av relationell sort (4=2+2) visade sig vara en kritisk aspekt.
- Flera av eleverna hade svårigheter att urskilja delarna och helheten i uppgifterna samtidigt.
- Den mest tydliga kritiska aspekten var uppgifter med två obekanta tal på olika platser som till exempel 2+__=3+__.
- En kritisk aspekt var uppgifter med beräkningar av två tal på båda sidor av likhetstecknet som 2+2=__+3. Dessa uppgifter var kritiska eftersom eleverna hade en operationell uppfattning av likhetstecknet. De feltolkade uppgifterna och ville antingen ”lägga ihop” alla siffrorna genom att ”plussa” över likhetstecknet eller ”glömma bort” den sista siffran.
- Uppgiften 5+7=__+12 var kritisk eftersom den skulle ge svaret noll och den behandlade tal över tio.
- Två av eleverna visade prov på full förståelse av likhetstecknets innebörd. Dessa elever kunde se helheten och hade en strukturell uppfattning av likhetstecknets betydelse.

7 Diskussion

Under denna rubrik kommer en diskussion föras kring metoden och resultatet av den genomförda undervisande intervjun och analysen av förtest och eftertest.

7.1 Metoddiskussion

Metoden byggde jag på det jag hade läst om innan jag började med studien. Grundpelarna var Viggo Kilborns ekvationsspel och variationsteorin. I en learning studie med för- och eftertest används variationsteorin som ett verktyg för att planera och analysera undervisning (Gustavsson & Wernberg, 2006). Jag inspirerades av detta och använde metoden för att kontrollera om den undervisande intervjun hade erbjudit något lärande av de kritiska aspekterna. Efter pilotförtestet drog jag slutsatsen att det skulle bli för svårt för eleverna om jag förde in det ursprungliga spelet. Därför valde jag att förändra det med fokus på likhet och obekanta tal. Så här i efterhand reflekterade jag över att jag kanske borde ha använt exakt samma tal och exakt samma ordning för att underlätta analysen. Å andra sidan så hade det nog varit svårt att helt följa denna plan eftersom eleverna befann sig på så olika platser rent kunskapsmässigt. En viss flexibilitet hade jag nog ändå fått ha. Vad detta hade för inverkan på mitt resultat är svårt att säga men det skulle vara intressant att göra en studie med mer struktur på frågorna. Fördelen med att använda sig av ett förtest tycker jag var att det blev väldigt tydligt vilka som behövde mer hjälp med att förstå de kritiska aspekterna av likhetstecknet. Det framkom också tydligt vilket innehåll som måste behandlas och det blev även en utvärdering med eftertestet som visade vilka möjligheter till lärande den just utförda lektionen bidrog till där mitt eftertest visade på viss framgång. För att ta lektionen ännu ett steg längre skulle learning studien kunna utvecklas ännu mer. Detta innebär att jag (eller någon annan) tar upplägget och resultatet från den första undervisande intervjun, förändrar, modifierar och gör om samma sak förhoppningsvis bättre fast på andra elever. Även samma förtest och eftertest kan användas och sedan kan samma procedur upprepas ännu en gång.

Tidpunkten som valdes för eftertestet var en illa vald tid. Eleverna var upprymda och glada, detta berodde på att det var min sista dag på skolan och jag skulle bjuda på fika i slutet av dagen. Skulle jag göra om studien så skulle jag tänka över valet av tillfälle för eftertestet mycket noggrannare. Resultatet hade kanske kunnat bli bättre om eleverna hade varit mer fokuserade på sin uppgift och detta sänker ju såklart trovärdigheten på studien.

När jag analyserade intervjuerna upptäckte jag att det var tydligt att utförandet av intervjuerna hade kunnat göras ännu bättre. Fler följdfrågor hade varit att föredra för att tränga ännu djupare ner i elevernas tankar och få fram ännu mer av hur de resonerade. Nu blev det mer att jag nöjde mig med att de svarade rätt. Det var bara om det svarade fel som jag försökte få fram mer hur de hade tänkt. Svarade eleverna fel så var jag för snabb med att hjälpa dem om jag ska se ur ett urskiljandeperspektiv, däremot kanske det var bättre ur ett lärandeperspektiv för att få dem att verkligen uppmärksamma likhetstecknet och dess rätta innebörd. Här ser jag en konflikt mellan mig som forskare och mig som lärare. Under de undervisande intervjuerna märkte jag av detta då jag ibland blev lite osäker över hur mycket jag som lärare skulle hjälpa eleverna för att de skulle förstå och hur mycket jag som forskare ville ha fram som senare skulle gå att analysera. Motsatsförhållandet försvinner lyckligtvis när jag som arbetande lärare är forskare i viss mån. Jag som arbetande lärare vill utveckla mitt eget sätt att lära ut men utan den forskarrollen som måste presentera något att analysera för någon annan.

Metoden som sådan var ändå tillfredställande då jag fann att det hade skett ett kunskapsinhämtande trots bristfällig planering. Det kom även fram många olika sätt att uppfatta likhetstecknet på vilket också var spännande eftersom jag hade läst om det innan och tagit upp det i min bakgrund. Det som framkom var olika feltolkningar och missuppfattningar av likhetstecknet som jag läst om i Carpenter et al. (2003) och Pettersson (2010). Till exempel så var det några av eleverna som trodde att likhetstecknet enbart var en operator, några ville lägga ihop alla talen i uppgiften 2+3=__+1 för att komma fram till summan 6 att stoppa i asken. Det var även några som inte uppmärksammade det sista talet i uppgiften 2+2=__+2 utan glömde bort det och ville stoppa 4 i asken.

Positivt med metoden är att jag märkte att det gav möjligheten att göra punktinsatser där det verkligen behövdes hos de elever som behövde mer hjälp med att förstå de kritiska aspekterna av likhetstecknet. Eftersom läraren i den undervisande intervjun med spelet direkt kan se när eleven är på väg att göra fel och påpeka detta så kanske en del feltolkningarna kan stoppas. Samtidigt som det kändes bra att kunna vägleda eleven genom denna punktinsats så kändes det ändå som om det fattades något. Först kunde jag inte komma på vad det var, men sen kom jag på att de andra eleverna fattades. Vissa av eleverna märktes det inte på och de kände sig nog inte obekväma eller ensamma i den utsatta situation som min undervisande intervju ändå var. Det verkade ändå som om några av dem tyckte att det var lite konstigt att sitta där med mig alldeles ensam vilket kanske hämmade en del av eleverna.

Jag är medveten om att på grund av det lilla urvalet hade resultaten kunna bli helt annorlunda med andra elever i andra klasser. Jag förstår också att en annan undervisningssituation hade kunna ge samma resultat och att denna specifika situation med vuxen och elev i en sådan här undervisande intervju är en väldigt ovanlig lektion som kanske inte går att använda sig av i den riktiga skolverksamheten. Däremot kanske min studie går att titta på och använda sig av på andra sätt. Till exempel så tror jag att de kritiska aspekterna av likhetstecknet som framkom skulle gå att titta på och användas för att tydliggöra med en helklass eller mindre grupper. Jag är likaså medveten om att på grund av samma lilla urval som inte är ett representativt urval för populationen (Bryman, 2002) så går det inte att generalisera och dra några generella slutsatser av resultatet.

Sammanfattningsvis skulle jag vilja säga att de viktigaste slutsatserna av spelet är att det inte är metoden som sådan som är avgörande för resultatet utan jag tror att det är vad läraren gör för att lyfta de kritiska aspekterna av lärandeobjektet likhetstecknet som avgör om eleverna lär sig likhetstecknet.

7.2 Resultatdiskussion

De kritiska aspekterna och feltolkningarna av likhetstecknet hänger ihop. Jag redogjorde för dem i min bakgrund från Petterson (2010) och Carpenter et al. (2003) som säger att feltolkningarna har sina rötter i den operationella tolkningen av likhetstecknet. Jag har sammanfattat dessa till fyra olika huvudkategorier:

- De elever som inte urskiljer båda leden samtidigt utan uppgifterna måste se ut på det operationella viset: 2+2=4.
- Addition eller subtraktion ”över likhetstecknet”. Lägga ihop alla talen i uppgifterna. 7=__+5 blir 12 och 8+4=__+5 blir 17.
- Bortser eller ”glömmer bort”, 8=4+__+3 blir 12
- 8=4+__+3. Eleven sätter in 4 för att konstatera att 4+4=8 eller genom att addera 4 och 3 och får felsvaret 7

Vid mina intervjuer kunde jag urskilja flera av dessa olika feltolkningar som alla härstammar från att eleverna inte har förstått likhetstecknet innebörd. Det var tydligt att de elever som hamnade under överskriften ”Kritiska aspekter” i mitt resultat var de som hade problem med dessa feltolkningar. Precis som tidigare forskning och resultat från TIMSS (Skolverket, 2008a, 2008b) visar om uppgifter av den traditionella operationella sorten så bekräftade mitt förtest att uppgifter som denna, 2+2=4, knappt gav eleverna några problem alls. De elever som behövde mer hjälp med de kritiska aspekterna hade en operationell uppfattning av likhetstecknet som flertalet forskare har beskrivit (Bergsten et al. 1997; Hattikudur & Alibali, 2010; Knuth et al., 2006; Pettersson, 2010). Dessa elever verkar vara så fastlåsta i det operationella tänkandet att de inte kopplar var likhetstecknet är någonstans utan de tror att det alltid ska vara på samma ställe. Eleverna urskiljer endast en del och inte helhet och del samtidigt som Runessons (2006) forskning beskriver. De här eleverna verkar vilja ”lägga ihop alla” eller ”plussa” över likhetstecknet på uppgifter av relationell sort eftersom de tror att likhetstecknet betyder ”det blir” eller ”summan av”. Den kritiska aspekt som gav flest problem var uppgifter där det var två tal på båda sidor om likhetstecknet och flera obekanta tal som exempelvis __+6=4+__. Dessa uppgifter uppvisar flera kritiska svårigheter, både operationer på båda sidor om likhetstecknet och även två obekanta tal vilket troligtvis förvirrar för eleverna som inte har den fulla förståelsen av likhetstecknets innebörd. Den kritiska delen i uppgiften 2+2=__+3 är att det finns två tal efter likhetstecknet. Detta gör att elever tenderar att ”glömma bort” det sista av talen Sättet på vilket uppgiften är uppbyggd frångår även den deras operationella förståelse där man inte kan utföra beräkningar på båda sidor om likhetstecknet vilket är beskrivet i bakgrunden från Carpenter et al. (2003) forskning. De urskiljer läsriktningen från vänster till höger och i samband med detta försvinner vänsterled när det är uträknat och de tror att likhetstecknet alltid ska vara på samma plats. Även detta kan sammanfattas med den kritiska aspekten helhet och del i uppgifterna. En annan aspekt som skulle kunna vara kritisk i innehållet för elever är att de har svårt att generalisera kunskapen om ett visst innehåll och överföra det till många olika situationer. Eleven kan inte se sambandet mellan en situation och en annan. Detta visade sig hos några av eleverna som inte hade några stora svårigheter vid intervjuerna men de kunde sedan inte överföra denna kunskap till att skriva svar på uppgifterna vid eftertestet. I ett fall var det även tvärtom, eleven klarade testerna men inte intervjuerna.

Det jag märkte som förenade de elever som uppvisade problem vid mina intervjuer var att de i allmänhet var lite osäkra på sin matematiska förmåga. De var försiktiga, tysta och tog inte för sig vid spelet. Det verkade som om de helt enkelt inte trodde på sin egen förmåga och att de därför utgick ifrån att deras svar skulle bli fel. Vad detta beror på är svårt att svara på men en gissning är att de helt enkelt har svårigheter med matematik i stort och även andra ämnen och att de behöver komma till rätta med detta problem för att senare klara sig i ämnet matematik och följaktligen också andra ämnen i skolan.

Jag såg en ökning i lösningsfrekvens mellan för- och eftertest vilket borde betyda att eleverna har lärt sig något av det som utfördes under den undervisande lektionen, spelet har alltså erbjudit ett lärande som min första forskningsfråga ville utreda. Klass 2 visar fortfarande lägre lösningsfrekvens än klass 3 på eftertestet men har ökat med fler procentenheter. Detta skulle kunna bero på att klass 3 startade på en högre nivå rent kunskapsmässigt och kunde kanske därför inte utvecklas lika mycket från sitt utgångsläge. Klass 2 var säkerligen mer formbara helt enkelt.

Eftertestet visade också att de elever som hade problem innan den undervisande intervjun hade fortsatta problem efter, en hade till och med sämre resultat efter intervjun. Dessa elever måste få fler tillfällen att urskilja de kritiska aspekterna av likhetstecknet, de måste få tillfälle att erfara att det går att utföra beräkningar på båda sidor om likhetstecknet och på så sätt kommer även dessa elever klara av flera obekanta och även relationella uppgifter. Det kan även vara så att det finns något mer som är kritiskt i innehållet likhetstecknet som jag inte hade med. Det kanske var så att även om jag visste vad som var kritiskt så gavs inte någon möjlighet för eleverna att urskilja dessa aspekter. Enligt variationsteorin så pekas det på att eleverna måste urskilja två eller flera aspekter samtidigt och detta kom inte fram i min undervisande intervju tillräckligt bra. Eleverna kanske skulle behöva fler uppgifter och andra variationsmönster för att få möjlighet att urskilja likhetstecknets alla kritiska aspekter. De elever som har mest svårigheter kanske även skulle ha nytta av att bara arbeta laborativt innan de får se likhetstecknet i vanliga aritmetiska uppgifter. En annan förklaring till varför elever fortfarande har svårigheter efter min undervisande intervju skulle kunna vara att de helt enkelt inte är mogna rent kognitivt som Baroody och Ginsburg (1983) har kommit fram till i sin forskning eller att de inte var mottagliga just vid tillfället för intervjun. Ett annat svar skulle kunna vara att metoden ändå inte var tillräckligt effektiv och att den behöver utvecklas som jag skrev om i metoddiskussionen.

De elever som uppvisar full förståelse av likhetstecknet visar *tilltro till sin egen förmåga* som är en analysdel i Analysschemat från Skolverket (2009). De vet att de kan och är inte rädda för att svara fel heller. De svarar med stor säkerhet och kommer ofta snabbt på svaret utan att tänka någon längre tid. De visade sig kluriga, hittade på många lösningsmetoder och skämtade fram och tillbaka under den undervisande intervjun. I analysschemat betonas att det är bra om eleven ser samband och förstår räknesätten vilket dessa elever gör. Det står även om omedelbar taluppfattning vilket dessa elever uppvisar och det betyder att eleven inte behöver räkna varje del utan eleven ser omedelbart helheten och kan utifrån det ge ett svar. Även Carpenter et al. (2003) beskriver elever som kan förstå att det blir lika mycket på båda sidor utan att egentligen utföra räkneoperationen utan i stället jämför eleven talen och ser hur det ska bli lika mycket.

Slutligen vill jag återkoppla till metoddiskussionens slutsats om att de elever som lärde sig något kanske inte gjorde det på grund av spelet som sådant utan för att de kritiska aspekterna lyftes och för att de hade möjlighet att urskilja dessa aspekter.

7.3 Didaktiska implikationer

Genom denna studie har jag kommit till nya insikter som jag kommer att ha nytta av som lärare. Studien har visat att det är av vikt att utgå från elevernas svårigheter med de kritiska aspekterna av lärandeobjektet likhetstecknet. Utifrån elevernas förförståelse bildar sig läraren en uppfattning av hur en lektion ska läggas upp och sedan kan denna lektionsplanering komma att revideras och omarbetas beroende på klass. För att motverka svårigheter med och feltolkningar av de kritiska aspekterna av likhetstecknet så tror jag att likhetstecknet måste arbetas med på andra sätt än som många arbetar med det idag. Många poängterar nog fortfarande samma gamla ramsa som jag fick lära mig på lågstadiet som jag har för mig var utformad såhär: term + term = summa, 2+2=4. Om detta är det enda sätt en elev får se likhetstecknet på så är det ju inte så konstigt om eleven får svårigheter med de kritiska aspekterna av likhetstecknet. McNeil et al. (2006) framhåller att det är mycket bättre att visa tal med räkneoperationer på båda sidor om likhetstecknet för att uppnå den relationella förståelsen för tecknet. Jag tror även att det är bra att isolera likhetstecknet innan det sätts in sammanhanget med den uppgift som ska räknas ut. Då får eleven möjlighet att lära sig dess fulla betydelse innan siffrorna kommer till. En variation av de olika aspekterna måste göras samtidigt för att eleven ska kunna urskilja alla olika kritiska delar av likhetstecknet. Till exempel kontrastera likhetstecknet mot tecken som inte betyder "lika mycket" som Hattikuduru och Alibalis (2010) studie visar bra resultat för. Sedan tror jag på ett utvecklande av läroböckerna så att de inte endast behandlar operationella uppgifter som McNeil et al. (2006) beskriver utan blandar både de operationella och relationella uppgifterna.

7.4 Slutord och förslag till vidare forskning

Vid mitt arbete med denna studie fann jag såklart saker som jag hade kunnat göra bättre och som skulle gå att utveckla för ett bättre resultat genom en fortsatt learning studie. Eftersom mitt syfte var att se om eleverna hade utvecklat sin förståelse för likhetstecknets betydelse efter spelet så skulle jag vilja sammanfatta denna studie genom att reda ut svaret. Svaret blir då att spelet var relativt framgångsrikt och en möjlig väg för att utveckla elevernas förståelse men kanske inte helt tillfredställande eftersom inte alla eleverna lärde sig likhetstecknets fulla innebörd. En intressant aspekt var att de elever som hade mest problem med de kritiska aspekterna av likhetstecknet innan studien var de som hade mest problem även efter studien var avslutad. Det svåra är ju då som jag redan visste att ta sig an dessa kritiska aspekter ännu en gång för att utveckla och göra bättre. Jag ser detta som lektion 1 i en learning study. Lektionen bör alltså revideras och testas igen av andra studenter. Det jag skulle tänka på till nästa gång eller om någon annan skulle ta upp den här tråden och utveckla studien så skulle det vara att koncentrera talen till ett fåtal och sedan variera dem på olika sätt. Eftersom de kritiska aspekterna kan behandlas genom att något hålls invariant och något varierar så är frågan vilka mönster av variation som kan fungera. Till exempel så skulle det vara intressant att se hur eleverna reagerar på att först bli visade 4=4. Sedan visa dem 2+2=2+2 för att i nästa steg vända på det och visa pärlorna som 4=2+2 och 2+2=4. Avslutningsvis kanske upgiften skulle kunna bli 0+2=4-2 eller liknande. Denna variation går att hålla på med i många varianter.

En tanke jag funderade på är när likhetstecknet ska introduceras. Är det en självklarhet att likhetstecknets fulla betydelse ska läras ut direkt när likhetstecknet introduceras eller kan det fungera att först lära eleverna den operationella betydelsen och senare introducera ekvationer och den relationella betydelsen. Måste det vara "fel" att likhetstecknet delas upp i två steg? Jag undrar om det finns något som säger att det måste vara bättre att lära "allt" på en gång? Det jag har hittat inom forskningen säger att eleverna måste lära sig likhetstecknets fulla betydelse vilket jag ser som självklart för att de ska klara av till exempel algebra. Enligt variationsteorin skulle de olika betydelserna kunna kontrasteras för ett lärande (Runesson, 2000). Detta skulle kunna se ut som 2+2=4 och kontrastera med 2+2=3+1. Carpenter et al. (2003) beskriver elevers förståelse av likhetstecknet som mycket svår att förändra då elever håller fast vid det den har lärt sig väldigt ihärdigt. Detta skulle kanske kunna vara en av anledningarna till att det är bra att lära den rätta betydelsen direkt. Eller kan det vara så att de elever som senare får svårigheter med de kritiska aspekterna skulle ha fått det även om de hade fått tillfälle att lära sig den fulla betydelsen direkt vid introducerandet?

Procedurell och konceptuell förståelse av likhetstecknet och matematik i stort tycker jag verkar spännande och jag skulle gärna själv göra en studie om detta. Enligt vad jag har läst i forskningen (Alibali, TIMSS mm) så verkar det som om dessa två sätt att se på matematiken hänger ihop. Trots detta så verkar det som om vi i Sverige mest undervisar enligt den ena, den procedurella förståelsen och de östasiatiska länderna mer lutar åt den konceptuella förståelsen. Även läroböckerna lägger fokus på det procedurella i Sverige. Kan detta vara en av anledningarna till att Sverige faktiskt blir sämre i matematik i jämförelse med dessa länder? Eller kan det vara för att asiaterna lägger mer tid på matematik?

8 Referenser

Ahlberg, Ann (2000). Att se utvecklingsmöjligheter i barns lärande. I A. Ahlberg (Red.), *Matematik från början.* Göteborg: Nämnaren Nationellt centrum för matematikutbildning.

Baroody, Arthur, J. & Ginsburg, Herbert, P. (1983). The Effects of Instruction on Children's Understanding of the "Equals" Sign. /Elektronisk version/. *The Elementary School Journal,* 84(2), 198-212. http://www.jstor.org/pss/1001311

Bergsten, Christer, Häggström, Johan, Lindberg, Lisbeth (1997). *Algebra för alla - Nämnaren TEMA.* Göteborg: Nämnaren Nationellt centrum för matematikutbildning

Bryman, Alan (2002). *Samhällsvetenskapliga metoder.* Malmö: Liber.

Carpenter, Thomas, P., Franke, Megan, Loef, & Levi, Linda (2003). *Thinking mathematically -Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Tillgänglig från http://books.heinemann.com/shared/onlineresources/e00565/chapter2.pdf

Gustavsson, Laila & Wernberg, Anna (2006). Design experiment, lesson study och learning study. I M. Holmqvist (Red.), *Lärande i skolan - Leraning study som skolutvecklingsmodell* (s.29-50). Lund: Studentlitteratur

Hattikudur, Shanta & Alibali, Martha, W. (2010). Learning about the equal sign: Does comparing with inequal symbols help?. *Journal of Experimental Child Psychology*, 107, (1), 15-30.

Holmqvist, Mona (2006). Att teoretisera lärande. I M. Holmqvist (Red.), *Lärande i skolan - Learning study som skolutvecklingsmodell* (s.9-27). Lund: Studentlitteratur.

Høines, Marit, Johnsen (2000). *Matematik som språk: verksamhetsteoretiska perspektiv* (2 uppl.). Malmö: Liber ekonomi

Kilborn, Wiggo (1981). *Vad vet fröken om baskunskaper.* Stockholm: Liber.

Knuth, Eric, J., Stephens, Ana, C., McNeil, Nicole, M., & Alibali, Martha, W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. /Elektronisk version/. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(4), 297-312. http://128.104.130.43/alibali/files/Knuth_Stephens_McNeil_Alibali_JRME_2006.pdf

Kvale, Steinar & Brinkmann, Svend (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun* (2. uppl.). Lund: Studentlitteratur AB.

Malmer, Gudrun (1991). Språkets roll i matematikinlärning. I G. Emanuelsson, B. Johansson & R. Ryding (Red.), *Tal och räkning 1.* Lund: Studentlitteratur

Marton, Ference & Booth, Shirley (2000). *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur.

Marton, Ference, Runesson, Ulla & Tsui, B. M. Amy (2004) The space of learning, I F. Marton, A. B.M. Tsui (Red.), *Classroom discourse and the space of learning.* (s.3-40). Mahwa, NJ: Erlbaum.

McNeil, Nicole, M., & Alibali, Martha, W., (2005). Knowledge Change as a Function of Mathematics Experience: All Contexts are Not Created Equal. /Elektronisk version/. *Journal of Cognition and Development,* 6(2), 285–306. http://www.nd.edu/~nmcneil/McNeilAlibali05a.pdf

McNeil, Nicole, M., Grandau, Laura, Knuth, Eric, J., Alibali, Martha, W., Stephens, Ana, C., Hattikudur, Shanta & Krill, Daniel, E. (2006). Middle-School Students' Understanding of the Equal Sign: The Books They Read Can't Help. /Elektronisk version/. *Cognition and Instruction,* 24(3), 367–385. http://www.nd.edu/~nmcneil/McNeiletal06.pdf

Pettersson, Astrid (2010, januari). Utveckla din bedömarkompetens. Bedömning av kunskap för lärande och undervisning i matematik. *Skolverket.* Hämtad november 16, 2010, från http://www.skolverket.se/sb/d/3276/a/18547

Runesson, Ulla (1999). *Variationens pedagogik: skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Runesson, Ulla (2000). Variation för lärande. /Elektronisk version/. *Nämnaren,* 2, 19-25. http://ncm.gu.se/media/namnaren/fulltextpdf/2000/nr_2/1925_00_2.pdf

Runesson, Ulla (2005). Beyond discourse and interaction. Variation: a critical aspect for teaching and learning mathematics. /Elektronisk version/. *Cambridge Journal of Education,* 35(1), 69-87. http://gup.ub.gu.se/gup/record/index.xsql?pubid=30143

Runesson, Ulla (2006) Vad är möjligt att lära sig? Variationens och samtidighetens betydelse. I M. Holmqvist (Red.), *Lärande i skolan - Learning study som skolutvecklingsmodell* (s.67-85). Lund: Studentlitteratur.

Runesson, Ulla & Marton, Ference (2002). The object of learning and the space variation. I F. Marton, & P. Morris (Red.), *What matters? Discovering critical conditions of classroom learning.* (s.19-37). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Skolverket (2000). *Kursplan med kommentarer till mål som eleverna lägst ska ha uppnått i slutet av det tredje skolåret i ämnena matematik, svenska och svenska som andraspråk.* Hämtad från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2142

Skolverket (2008a). *TIMSS 2007 - huvudrapport.* Hämtad från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2127

Skolverket (2008b). *TIMSS 2007 - Uppgifter i matematik, årskurs 4.* Hämtad från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2122

Skolverket (2009). *Analysschema i matematik för åren före årskurs 6.* Hämtad från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2219

Skolverket (2010a) *Lgr11. Kursplanen i matematik.* Hämtad från http://www.skolverket.se/content/1/c6/02/21/84/Matematik.pdf

Skolverket (2010b). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007.* Hämtad från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2306

Skolverket (2010c). *Ämnesproven i grundskolans årskurs 3 - En redovisning av utprövningsomgången 2009.* Hämtad från http://www.skolverket.se/publikationer?id=2326

Sverige. Skolöverstyrelsen. (1979). *Matematikterminologi i skolan* (Ny uppl.). Stockholm: Liber Utbildningsförlag

Vetenskapsrådet (2010). *Forskningsetiska principer.* Hämtad från http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pd

Tillståndslapp till föräldrarna **Bilaga 1**

Hej!

Som ni kanske vet så befinner jag, Angelica Blomgren, mig på ert barns skola just nu. Jag går Lärarprogrammet på Högskolan för lärande och kommunikation i Jönköping och studerar till lärare för de tidigare åldrarna.

Under min praktik kommer jag att spela ett spel som heter ekvationsspelet med vissa av barnen för att samla data till min examensuppgift. Dessa tillfällen kommer jag att spela in genom att filma barnens händer när de spelar spelet med mig. Jag vill observera att det är **enbart deras händer** jag kommer att filma, detta för att senare kunna analysera vad barnen har sagt under spelets gång.

Ekvationsspelet uppfanns av Wiggo Kilborn 1973. Det går ut på att man gömmer knappar i tändsticksaskar, där man ska lista ut hur många knappar som ligger gömda i askarna.

All data som jag samlar in kommer att behandlas konfidentiellt, dvs. materialet jag samlar in och namnen på deltagarna kommer **inte** att lämnas ut till någon annan. Däremot kommer min handledare Pernilla Mårtensson på högskolan antagligen titta på inspelningarna för vidare analys. Tre månader efter att vår uppsats har blivit godkänd kommer banden att raderas.

Barnen kommer att kunna delta frivilligt och endast med Er tillåtelse. Skriv under bifogad lapp.

Är det något ni undrar över så fråga gärna, antingen när ni träffar mig på skolan eller via min e-post Lu06blan@hlk.hj.se

Ser fram emot denna tid på skolan!

Med vänlig hälsning/ Angelica Blomgren

Jag godkänner att mitt barn _______________ (namn) får spela ekvationsspelet med Angelica och att samtalet under spelets gång spelas in samt att händerna på mitt barn filmas.

________________ ____

Datum Målsmans underskrift

Lämnas till Angelica eller Åsa snarast, senast måndag 18 oktober 2010.

Förtest/ Eftertest **Bilaga 2**

Sätt in ett tal i rutan. Namn:____________________

2 + 2 = __ + 3

2 + 2 = __

4 – __ = 2 + 2

__ + 2 = 2 + 2

8 + 4 = __ + 5

4 + 8 = __

5 + 7 = __ + 12

6 + __ = 8 + 4

__ + 3 = 12

4 + 3 = __ + __

7 + __ = 4 + __

7 - __ = __ + 1

__ + 6 = 4 + __

4 + __ = __ + 8

Intervjufrågor **Bilaga 3**

Fråga 1. Vet du vad det betyder?

= (liten papperslapp med likhetstecknet på)

Fråga 2. Vad kan man använda likhetstecknet till?

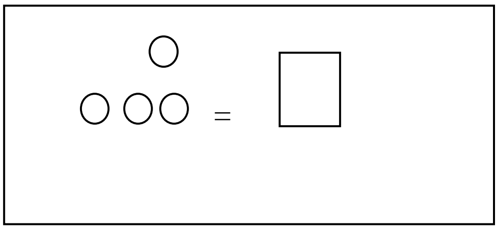
Fråga 3. Pärlor på båda sidor om likhetstecknet. 2-4 olika varianter.

Ex:

5=5

4=2+2

4=?



Fråga 4. Två tal på båda sidor om likhetstecknet och en eller två obekanta. 4-6 olika varianter.

Ex:

4+3=_+_

_+6=4+_

5+7=_+12

3+1=_+2