JÖNKÖPING UNIVERSITY
School of Education and Communication

”Noll-komma-tio är ju mycket större än noll-komma-nio!”

En kvalitativ studie om kritiska aspekter av tal i decimalform för elever i årskurserna 4–5

KURS: *Examensarbete för grundlärare 4–6, 15 hp*

PROGRAM: *Grundlärareprogrammet med inriktning mot arbete i grundskolans årskurs 4–6*

FÖRFATTARE: *Jesper Larsson*

EXAMINATOR: *Andreas Eckert*

TERMIN: *VT21*

Sammanfattning

Jesper Larsson

”Noll-komma-tio är ju mycket större än noll-komma-nio!”

En kvalitativ studie om kritiska aspekter av tal i decimalform för elever i årskurserna 4–5

Antal sidor: 36

I årskurserna 4–6 ska eleverna genomgå en progression att lära sig hur rationella tal och tal i decimalform är uppbyggda. Forskning har visat att det kan uppstå flera svårigheter och missuppfattningar kring området, bland annat veta siffrors olika platsvärde. Denna studie har inspirerats av en tidigare studie, genomförd av Jarl och Johansson (2014). Syftet med denna studie är att jämföra om samma kritiska aspekter som identifierats i Jarl och Johansson (2014) studie även visar sig i andra elevgrupper. Frågeställningen som studien ska besvara är: Vilka kritiska aspekter kan identifieras i en årskurs 4 och en årskurs 5 kring tal i decimalform?

För att kunna besvara frågeställningen har eleverna i denna studie fått genomföra ett arbetsblad med uppgifter kopplade till tal i decimalform. Därefter har kvalitativa intervjuer genomförts för att få en breddad insikt kring vilka kritiska aspekter eleverna har eller inte har urskilt. Metodvalet i studien har inslag av variationsteorin där eleverna behöver få syn på nödvändiga detaljer (i studien benämnd som kritiska aspekter). Studiens resultat visar att samtliga kritiska aspekter som identifierades i Jarl och Johanssons (2014) studie, även var kritiska i denna studie. Däremot identifierades en ny kritisk aspekt: Elever behöver förstå att siffror på varsin sida om decimaltecknet tillsammans utgör ett tal. Kunskaper om kritiska aspekter kan ses som specialkunskaper för lärare att veta vad som kan missuppfattas kring det matematiska området. Dessa kunskaper kan inte generaliseras, men de kan vara överförbara att en kritisk aspekt kan identifieras i andra elevgrupper.

Sökord: tal i decimalform, decimaltal, variationsteorin, kritiska aspekter, decimala talsystemet

Abstract

Jesper Larsson

”Zero-point-ten is much greater than zero-point-nine!”

A qualitative study about critical aspects of numbers in decimal form for students in grades 4-5

Page numbers: 36

In grades 4–6, students must undergo a progression to learn how rational numbers and numbers in decimal form are structured. Research has shown that there can be several difficulties and misconceptions about the area, including knowing the different place value of numbers. This study has been inspired by a previous study, conducted by Jarl and Johansson (2014). The aim of this study is to compare whether the same critical aspects identified in Jarl and Johansson (2014) studies also show up in other student groups. The subject of interest in this study was: What critical aspects can be identified in a grade 4 and a grade 5 around numbers in decimal form?

In order to be able to answer the question, the students in this study have had to complete a worksheet with tasks linked to numbers in decimal form. Thereafter, qualitative interviews were conducted to gain a broader insight into what critical aspects the students have or have not distinguished. The choice of method in the study has elements of the theory of variation where the students need to see the necessary details (in the study called critical aspects). The results of the study show that all critical aspects that were identified in Jarl and Johansson's (2014) study were also critical in this study. However, a new critical aspect was identified: Students need to understand that numbers on each side of the decimal point together must become a number. Knowledge of critical aspects can be seen as special knowledge for teachers to know what can be misunderstood about the mathematical field. This knowledge cannot generalize, but it can be transferable so that a critical aspect can be identified in other student groups.

Keywords: numbers in decimal form, critical aspects, the variation theory, place value, misconceptions

Innehållsförteckning

1. Inledning

Noll-komma-tio är ju mycket större än noll-komma-nio! Detta är en vanlig missuppfattning hos elever i årskurserna 4–6 eftersom de tänker att talet 0,10 har fler decimaler än 0,9 (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985; Steinle, 2004). I kursplanen för matematik står det att elever i årskurserna 4–6 genom undervisning ska behandla "rationella tal och deras egenskaper" och "positionssystemet för tal i decimalform" (Skolverket 2018, s. 56). Taluppfattning innebär att förstå vad ett tal symboliserar, hur mycket det är värt värdemässigt och hur det förhåller sig till andra tal (Skolverket, 2017). I slutet av årskurs 6 ska elever kunna använda tal i olika sammanhang som är välkända för dem för att uppnå ett godkänt betyg (Skolverket, 2018, s. 60). Mot denna bakgrund är det betydelsefullt att undersöka vad elever behöver lära sig för att överkomma de missuppfattning som är relaterade till tal i decimalform.

För att förstå tal i decimalform behöver elever kunskaper om platsvärde i ett talsystem. Begreppet platsvärde är centralt i relation till det decimala talsystemet. Beroende på vilken position en siffra befinner sig i ett tal kan det vara värdemässigt olika stort. Till exempel består talet 1,8 av siffrorna 1 och 8 där siffran 1 är värd ett ental, eftersom siffran befinner sig på entalspositionen. Siffran 8 befinner sig på tiondelspositionen och är därför värd åtta tiondelar (Howe, 2019; Wong, 2019). Vidare behövs det kunskaper om att siffran noll har betydelse av att vara platshållare för att markera ett tals värde (Björk & Pettersson Berggren, 2014; Hansson, 2019). Denna studie tar vid där litteraturstudien från Parmar och Larsson (2020) slutade eftersom den studien inte fokuserade på tal i decimalform, utan på positionssystemet. Efter att ha läst andra studier (Jarl & Johansson, 2014; Kullberg, 2004) väcktes ett intresse att undersöka vilka kritiska aspekter som kan identifieras i två olika klasser i två olika årskurser kring tal i decimalform. Syftet med denna studie är att identifiera vad som kan vara kritiska aspekter för elever i årskurs 4–5, i relation till tal mellan 0 och 1, och om samma kritiska aspekter som identifierades i Jarl och Johanssons (2014) studie kan vara kritiska i andra elevgrupper. Datainsamling har genomförts med hjälp av ett arbetsblad som skickas ut till elever i årskurserna 4–5, med uppgifter relaterade till tal i decimalform. Eleverna som deltagit i studien gick på en skola som är belägen utanför en mindre stad. Utifrån elevsvaren på arbetsbladet har sedan tio elever valts ut för att delta i kvalitativa intervjuer som kompletterar studiens resultat.

2. Syfte och frågeställning

Syftet med denna studie är att undersöka vad som kan vara kritiska aspekter för elever i årskurserna 4–5, i relation till tal mellan 0 och 1. Studien fördjupar sig om de om de kritiska aspekterna som identifierades i Jarl och Johanssons (2014) studie även är kritiska i andra elevgrupper.

Syftet kommer besvaras med hjälp av följande fråga: Vilka kritiska aspekter kan identifieras i en årskurs 4 och en årskurs 5 kring tal i decimalform?

3. Bakgrund

I detta kapitel kommer det ges förklaringar till olika aspekter av tal i decimalform, till exempel decimaltal. Dessutom kommer kritiska aspekter behandlas och vad som står i skolans styrdokument att eleverna ska utveckla i årskurs 4–6.

3.1 Skolans styrdokument

Skolverket (2019) skriver att lärare har olika riktlinjer att förhålla sig till. En av dessa är att ”. . . stärka elevernas vilja att lära och elevens tillit till den egna förmågan” Skolverket, 2019, s. 12). Dessutom ska lärare kunna erbjuda elever det stöd som behövs för att övervinna de svårigheter som kan uppstå.

I det centrala innehållet för matematik står att elever i årskurs 4–6 genom undervisning ska få möjlighet att utveckla sin förmåga kring ”rationella tal och deras egenskaper” och ”positionssystemet för tal i decimalform” (Skolverket, 2019, s. 56). I ämnet matematik ska elever kunna använda sig av matematik i både matematiska sammanhang, men även i vardagen (Skolverket, 2019). Kommentarmaterialet förtydligar att vardagliga sammanhang kan vara situationer som att handla eller mäta olika typer av sträckor för att utveckla förståelse för tal i decimalform (Skolverket, 2017). I kunskapskravet i slutet av årskurs 6 krävs att elever kan ”utveckla kunskaper i matematik, lösa enkla problem i elevnära situationer på ett i huvudsak fungerade sätt genom att välja och använda strategier och metoder med viss anpassning till problemets karaktär” för ett godkänt betyg (Skolverket, 2018, s. 60). För att förstå tal i decimalform krävs det att elever har god förståelse om positionssystemet och vad platsvärde är för någonting. För att kunna omvandla detta till mer vardagliga situationer kan elever erbjudas att mäta en sträcka i längdhopp och sedan skriva längden med hjälp av decimaltal (Skolverket, 2017).

3.2 Positionssystemet och det decimala talsystemet

Ett positionssystem är ett talsystem där varje siffras position avgör hur mycket den siffran är värd i ett tal (Wong, 2019). Siffrorna ger information om talets värdemässiga storlek där heltalen värdemässigt ökar från höger till vänster, medan tal i decimalform minskar värdemässigt från vänster till höger (Howe, 2019).

Det positionssystem som används idag kommer ursprungligen från det hindu-arabiska talsystemet och är uppbyggt av basen tio (Dietrich et al., 2016; Howe, 2019). Det kallas för *det decimala talsystemet* eftersom *deci* betyder tiondel (Howe, 2019). Systemet består av tio tecken som kallas för siffror. Siffrorna är 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, och 9. Detta system tillåter att siffrorna återanvänds och därför kan värdemässigt stora eller små tal skrivas (Hansson, 2019; Howe, 2019; Wong, 2019). Siffran noll (0) har som uppgift att fungera som platshållare i ett tal (Hansson, 2019; Howe, 2019). Ett exempel är talet 0,5 där nollan har som funktion att markera att talet innehåller noll heltal och fem tiondelar.

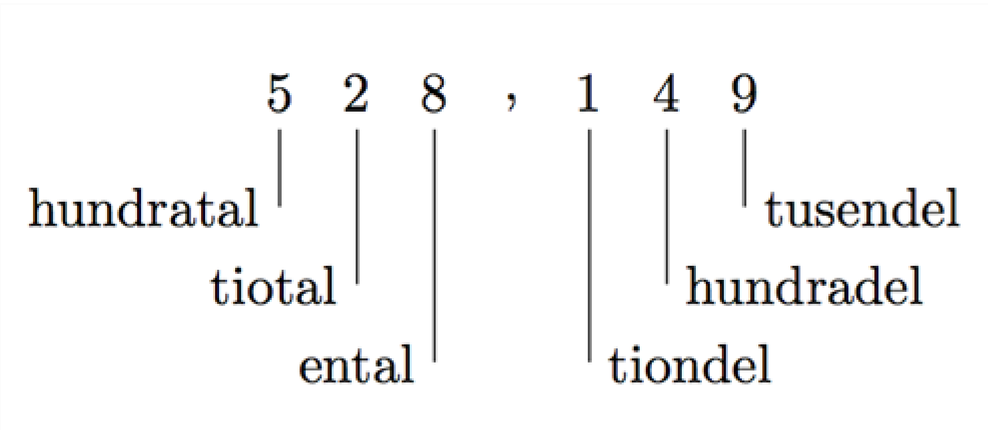
3.2.1 Vad är ett platsvärde?

Ett talsystem ska inte förväxlas med begreppet *platsvärde* eftersom det senare syftar till vilket värde en siffra har i ett tal (Hansson, 2019). Beroende på vilken position en siffra befinner sig i ett tal, kan det värdemässigt vara olika stort (Howe, 2019). För heltal innebär det att siffran längst till höger har platsvärde för ental, andra siffran från höger symboliserar tiotal och så vidare (Hansson, 2019). Ett tal, till exempel 592, kan i utvecklad form skrivas $5 \times 100 + 9 \times 10 + 2 \times 1$ för att det ska vara lättare att se vad varje siffra är värd. Siffran 5 symboliserar i detta tal att det befinner sig på hundratalspositionen och är värd fem hundratal. Siffran 9 befinner sig på tiotalspositionen och symboliserar att det finns nio tiotal och siffran 2 är placerad på entalspositionen och innebär att det finns två ental i talet. Hansson (2019) förtydligar med att det i det decimala talsystemet behövs tio av någonting, till exempel ental, i en position för att växla upp till nästa position. Det förtydligas med skrivelsen att ”*tio tiotal har samma värde som ett hundratal”* (Hansson, 2019, s. 51). Det innebär att om ytterligare ett tiotal adderas så “ger det en av närmast högre positions värde”, i detta fall ett hundratal som adderas till talet (Hansson, 2019, s. 53). Talet blir då talet 602 och en växling har skett. Samma förhållande gäller även när siffror subtraheras. När värdet har passerat noll behöver ett värde från den närmast högre positionen växlas ned. Detta förhållande kan dock vara svårare att förstå eftersom ett uttryck, till exempel 1,5 – 0,6 kräver förståelse att ettan i talet 1,5 symboliserar tio tiondelar. Om elever inte förstår detta kommer de konsekvent att subtrahera det värdemässigt största talet med det minsta, utan att ta hänsyn till vilket tal som är subtrahend eller minuend (Roberts, 1968; Ubuz & Yayan, 2010). Det unika med det decimala talsystemet är att varje siffra kan upprepas oändligt många gånger för att representera ett värdemässigt stort tal (Hansson, 2019; Howe, 2019). Tal i decimalform har samma förhållande, fast förhållandet är i stället att varje siffra närmast till vänster ökar hela tiden tiofalt medan varje siffra till höger minskar tiofalt (Dietrich et al., 2016).

För tal i decimalform innebär det i stället att läsa talets värde från vänster till höger. Ett tal i decimalform innehåller både heltal och decimaler. Ett exempel är talet 528,149 där siffrorna till höger om decimaltecknet är decimaler. När ett tal i decimalform skrivs med en nolla i slutet, till exempel talet 0,20 kan nollan längst till höger uteslutas utan att talets värde förändras (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985; Tempier, 2016). Samtidigt har nollan längst till höger i talet 0,20 som funktion att beskriva att talet inte innehåller några hundradelar (Gallardo & Hernandez, 2006; Steinle, 2004). Tal i decimalform hör till de rationella talen och kan dessutom skrivas som ett tal i bråkform (Kullberg, 2004). Talet 0,2 kan till exempel skrivas som $\frac{1}{5}$. Kullberg (2004, s. 8) skriver dessutom att ”Ett rationellt tal i decimalform kan skrivas med oändligt många decimaler”. Figur 1 visar hur en siffras platsvärde förändras beroende på vilken position det befinner sig i samt positionernas relationer till varandra.

Figur 1.

Siffrornas olika förhållanden i ett platsvärde synliggörs i det decimala talsystemet (Matteboken, u.å.).



Siffrornas olika platsvärden synliggörs och förändras, beroende på vilken position det har i talet. Siffror till vänster om decimaltecknet representerar heltal, medan siffror till höger om decimaltecknet representerar decimaltal. I talet 528,149 är siffrorna 1, 4 och 9 decimaltal. Siffran 1 är första decimalen, siffran 4 är andra decimalen och siffran 9 är tredje decimalen. Den första decimalen (1) befinner sig på tiondelspositionen. Den andra decimalen (4) befinner sig på hundradelspositionen och den tredje decimalen (9) befinner sig på tusendelspositionen. I detta arbete definieras platsvärde i likhet med ”det värde en siffra representerar i ett tal, utifrån var i talet den står” samt att ”En siffras plats beskriver värdet för position som den står i och siffran beskriver antalet av det värdet” (Hansson, 2019, s. 50).

3.3 Missuppfattningar

Det finns flera missuppfattningar kring förståelse av tal mellan 0 och 1. Nedan listas vad tidigare forskning uppmärksammat som missuppfattningar kring tal i decimalform:

Ett tal som innehåller decimaler är två separata heltal (Rahayu & Putri, 2018; Steinle & Stacey, 1998; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). Ett tal som skrivs i decimalform använder sig av ett tecken för att särskilja heltalet från decimalerna, i denna studie mellan heltalen 0 och 1. Ett tecken är i detta fall en decimalpunkt (.) eller decimaltecken (,) (Kiselman & Mouwitz, 2008; McIntosh, 2008). Placeringen av decimaltecknet görs till höger om entalspositionen. Därmed utgör entalspositionen mittpunkt i talet. Kullberg (2004, s. 8) skriver att decimaltal ". . . oftast är kopplade till mätning och enheter". Ett exempel på en mätning är när elever ska mäta en bräda som är 0,57 meter lång. Talet benämns antingen som *noll komma femtiosju meter* eller *noll och femtiosju meter*. Det kan också uttalas som *noll hela meter och femtiosju centimeter*. Siffrorna 57 i exemplet anger att brädan är 0,57 meter, eller 5 decimeter och 7 centimeter lång. Här skulle elever kunna tolka noll (0) och 57 som två separata tal eftersom siffrorna står på olika sidor om decimaltecknet. Svårigheten här är att förstå att sifforna som utgör decimalerna *ingår* i hela talet.

Ju fler decimaler, desto större tal (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). Om ett tal innehåller flera decimaler, är talet värdemässigt större än ett tal som inte har lika många decimaler. Denna uppfattning beror på en generalisering av att det också gäller för heltalen. Detta förhållande gäller inte nödvändigtvis för decimaltal. Även om eleven ser decimaltecknet så ignoreras decimaltecknet och tas inte i beaktning (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). Talen 0,5 och 0,205 innehåller olika många decimaler. Talet 0,205 är inte värdemässigt större än 0,5 trots att det innehåller fler decimaler. Likaså kan talen 0,5 och 0,500 uppfattas som olika stort, trots att de är värdemässigt lika stora. Antalet decimaler preciserar talet mer till skillnad från få decimaler som kan innebära en avrundning antingen nedåt eller uppåt (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Ju färre decimaler, desto större tal (Resnick et al., 1989; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). I denna missuppfattning har elever en förståelse av decimaltecknets betydelse och att siffrornas platsvärden benämns som tiondel, hundradel och så vidare. Eleverna är medvetna om att en hundradel är värt mindre än en tiondel, men kan generalisera att alla tal som är utskrivna med flera decimaler är värdemässigt mindre än tal som endast är utskrivna som tiondelar. Detta eftersom varje ny decimal innebär fler mindre delar. Ett exempel är talen 0,5 och 0,73 där talet 0,73 består av sju tiondelar och tre hundradelar i jämförelse med talet 0,5 som består av fem tiondelar (Sackur-Grisvard & Leonard, 1989; Steinle & Stacey, 1998; McIntosh, 2008).

Heltal är värdemässigt större än tal i decimalform (Stacey et al., 2001). Denna missuppfattning syftar till att när elever ser talen 0 och 0,2 generaliserar de att 0 är värdemässigt större eftersom detta är ett heltal och inte ett tal i decimalform (Resnick et al., 1989). Den sista missuppfattningen är att **det finns inga tal mellan två närliggande tal** (McIntosh, 2008). Denna missuppfattning grundar sig i en generalisering att det bland heltalen inte finns några tal mellan två närliggande tal. Som ett exempel finns det inga heltal mellan talen 2 och 3. Däremot finns det tal mellan 0,2 och 0,3. Ett sådant tal är till exempel 0,21.

3.3.1 Hur missuppfattningar kan uppstå och förhindras i relation till undervisning

En orsak till att missuppfattningar och svårigheter kan uppstå kring tal i decimalform är språkbruket i klassrummet (Gough, 2007; Steinle, 2004; Kullberg, 2004). Detta visar sig tydligare i talspråk än i skriftspråk eftersom ett decimaltal, till exempel 0,5 kan uttalas som *noll komma fem*, vilket kan resultera i att elever uppfattar femman som ett heltal (Mårtensson, 2015; Roche, 2005). För att underlätta elevers förståelse kan läraren använda sig av språkliga strategier, till exempel att uttala varje tal i decimalform utifrån dess minsta beståndsdel. Således kan det underlätta elevers förståelse för platsvärde av decimaler (Roche, 2005; Kullberg, 2004; Steinle, 2004; Mårtensson, 2015). Uttalet kan till en början vara extra tydligt för att kunna särskilja och veta vad som är heltal och vad som är decimaltal (Steinle, 2004; Mårtensson, 2015). I exemplet med brädan kan läraren benämna brädans längd som *femtiosju hundradelar* eller *noll meter och femtiosju centimeter*. McIntosh (2008) skriver följande:

> Vi läser ”sex och tjugofem” när vi ser 6,25, vilket är helt naturligt i vardagssammanhang. Att utläsa det som ”sex komma tjugofem hundradels kronor” låter konstlat. [...] Läser vi på liknande sätt det nakna talet 6,25 som ”sex och tjugofem” finns risken att eleverna uppfattar att siffrorna på vardera sidan av decimaltecknet inte hör ihop, att det är en sammansättning av två skilda tal.
>
> (McIntosh, 2008, s. 40)

Citatet förtydligar att språket kan orsaka svårigheter i förståelse av hur tal i decimalform utläses. Det är därmed viktigt att lärare använder ett så adekvat språk som möjligt för att inte förvirra eleverna när de undervisar om decimaltal. Till en början kan språket vara konstlat, men ju mer elever får höra decimalerna i talet 0,25 (från citatet) som *tjugofem hundradelar* eller *tjugo tiondelar och fem hundradelar* kan eleverna få ökad förståelse för decimalers värden (Gough, 2007).

Björk och Pettersson Berggren (2014) skriver att ett sätt att introducera decimaler kan vara användandet av en meterlinjal eftersom den är uppdelad i hundra centimeter. Meterlinjalen kan användas som ett visuellt sätt att representera en tallinje mellan värdet 0–1, där talet 1 utgör helheten som är en meter (Björk & Petterson Berggren, 2014). Mittpunkten på sträckan hamnar på 0,5 meter. Detta sätt att uttrycka sig, *noll komma fem*, skulle språkligt sätt kunna vara värdemässigt mindre än talet *noll komma tjugo*. Detta eftersom talet tjugo (20) är värdemässigt större än talet fem (5). I skriven form kan eleverna få en förståelse genom att tillskriva båda talen lika många decimaler (Rahayu & Putri, 2018). *Noll komma fem* kommer då att bli *noll komma femtio*. Därmed går det också att diskutera nollans betydelse i talen. Talet noll har funktionen att vara en platshållare för att markera att en position är upptagen (Howe, 2019; Hansson, 2019).

3.4 Variationsteorin

I studien används variationsteorin som teoretiskt ramverk. Teorin är utvecklad av Ference Marton och används som ett verktyg för att förstå vad elever behöver urskilja för att utveckla kunskaper i förhållande till specifika ämnesinnehåll, men också för att möjliggöra lärande hos elever (Marton & Pang, 2006). Inom variationsteorin återkommer olika begrepp som är kopplade till undervisning, däribland begreppet *kritiska aspekter* (Mårtensson, 2015; Ekdahl, 2019; Kullberg, 2004; Wernberg, 2009). Kritiska aspekter kan förklaras som *nödvändiga detaljer att urskilja* hos någonting för att förstå lektionsinnehållet (Lo, 2004). Det är sådant i lektionsinnehållet som eleverna ska få möjlighet att lära sig för att utveckla kunskaper om något de ännu inte har förstått. Ett exempel på en nödvändig detalj att urskilja kan vara att första siffran till höger om decimaltecknet benämns som tiondel och är värt mer än en hundradel. Utgångspunkten är att undersöka *vad* och *hur* någon tar till sig nya aspekter av ett ämnesinnehåll (Mårtensson, 2015; Wernberg, 2009). Lärandet hos deltagarna ses därför som en förändring mot att upptäcka, uppleva eller förstå någonting som inte har upptäckts tidigare. För att deltagarna ska kunna upptäcka detta behöver de utsättas för sådana situationer på ett eller annat sätt (Ekdahl, 2019).

För att något ska betraktas som en kritisk aspekt är det något läraren avser att eleverna ska urskilja från undervisningstillfället (Mårtensson, 2015; Runesson, 2017). Om eleven urskiljer detta på ett felaktigt sätt, eller inte alls, kan det istället betraktas som en missuppfattning (Ekdahl, 2019). Ett sätt att undersöka om någonting är en kritisk aspekt är att kontrollera med en elev som svarat fel hur denne har tänkt när hen genomförde en uppgift (Marton et al., 2004).

Det som är kritiskt i en elevgrupp skulle även kunna vara kritiskt i en annan elevgrupp. På så vis kan kritiska aspekter vara överföringsbara mellan olika elevgrupper där en kritisk aspekt kan identifieras i en annan elevgrupp. Däremot ska kritiska aspekter inte generaliseras till att gälla samtliga elevgrupper (Kullberg, 2004; Marton et al., 2004).

3.4.1 Tidigare studier

Denna studie inspireras av två tidigare studier som identifierat vad som skulle kunna vara kritiska aspekter för elever i årskurserna 4–6 (Jarl & Johansson, 2014; Kullberg, 2004). I båda studierna genomfördes en learning study. I en learning study ska deltagarna genomföra ett förtest med uppgifter kopplade till det matematiska området. Därefter genomförs en lektion kring det matematiska området. Denna lektion ska antingen spelas in eller observeras av en kollega som för anteckningar om vad som hände i klassrummet. Slutligen ska deltagarna besvara ett eftertest för att ta reda på vad deltagarna upptäckt eller fått syn på inom det matematiska området (Mårtensson, 2015; Runesson, 2017). Genom att analysera förtestet, lektionen och eftertestet går det identifiera vad som var avgörande för att deltagarna skulle förstå den kritiska aspekten (Mårtensson, 2015; Lo, 2004). Studien av Kullberg (2004) genomfördes i en årskurs 6 och identifierade två kritiska aspekter som var avgörande för eleverna i studien. Dessa två kritiska aspekter var:

- ”***Olika former av rationella tal***. *Med det menas olika sätt att uttrycka decimaltalen som i olika bråkform och procent*” (Kullberg, 2004, s. 36). Det innebär att ett tal i decimalform, till exempel 0,2, kan skrivas som 20 % eller som bråktalet $\frac{1}{5}$.
- ”***Del-helhets förhållandet***. *Med det menas att man kan ta (andelen) noll komma nittiosju av (helheten) något, till exempel linjalen*” (Kullberg, 2004, s. 36). Det innebär att se skillnaden mellan delen och helheten, till exempel talet 0,65 kan delas in i sextio tiondelar och fem hundradelar av en hel.

Jarl och Johansson (2014) genomförde sin studie i två elevgrupper i årskurs 4. Deras studie gick ut på att undersöka om samma kritiska aspekter som Kullberg (2004) identifierade i årskurs 6 även kunde identifieras i två elevgrupper i årskurs 4. Resultatet från Jarl och Johansson (2014) studie visade att samma kritiska aspekter som identifierades i årskurs 6 även var kritiska i årskurs 4. Vidare identifierades ytterligare sex kritiska aspekter som var nödvändiga för elever i årskurs 4. Dessa sex kritiska aspekter var följande:

- *Eleverna behöver förstå att det finns tal mellan heltalen.*
- *Eleverna behöver få syn på vilka siffror i decimaltalen som är decimaler.*
- *Eleverna behöver förstå nollans betydelse som decimal.*
- *Eleverna behöver förstå siffrornas positionsvärden i decimaltalen.*
- *Eleverna behöver utläsa decimalerna som hel, tiondel och hundradel, alternativt som hel och hundradel.*
- *Eleverna måste förstå skillnaden mellan tiotal och tiondelar respektive hundratal och hundradelar* (Jarl & Johansson, 2014, s. 24).

Denna studie kommer inte använda sig av en learning study. Däremot kommer denna studie, genom ett arbetsblad och elevintervjuer, undersöka om samma kritiska aspekter som Jarl och Johansson (2014) identifierade också kan identifieras i andra elevgrupper.

4. Metod

Med utgångspunkt i studiens syfte och frågeställning har både en kvantitativ- och kvalitativ metod genomförts. Den kvantitativa metoden användes i form av arbetsblad (se bilaga 2) för att få en överblick över elevers korrekta och felaktiga svar. Utifrån hur eleverna svarat på arbetsbladet har ett urval gjorts för att genomföra kvalitativa semistrukturerade intervjuer (Bryman, 2018, kap. 7).

I detta avsnitt redogörs hur urval, datainsamling, bearbetning och analys har gjorts för att besvara studiens syfte och frågeställning. Avsnittet avslutas med vilka etiska ställningstagande som har gjorts.

4.1 Urval

Studien är genomförd på en skola utanför en mindre stad. Deltagarna i studien grundar sig i ett bekvämlighetsurval. Det innebar att deltagarna vid tillfället var tillgängliga för skribenten med förhoppningen att få en stor svarsfrekvens (Bryman, 2018, kap. 8). Den första kontakten innebar mejlkontakt med klasslärare på skolan. Efter att lärarna blivit informerade om studiens syfte och tillvägagångssätt, tilläts studien att genomföras i enlighet med *informationskravet* och *nyttjandekravet* som innebar att de deltagande får information om studiens syfte och användning. Därefter mejlades en samtyckesblankett ut (se bilaga 1) till klasslärarna som delade ut denna till samtliga 49 elever. Av detta skäl förhåller sig studien till de forskningsetiska principerna om *informationskravet, samtyckeskravet* och *anonymitetskravet* eftersom det i samtyckesblanketten angavs att det inte skulle gå att spåra vem som sagt vad (Bryman, 2018, kap. 6; Vetenskapsrådet, 2017). Utöver det gavs information om att samtliga deltagare skulle få påhittade namn. Sammanlagt 40 samtyckesblanketter samlades in med positivt svar om att få delta i intervjuerna. Samtidigt bestämdes datum för genomförande av intervjuer.

Eleverna i studien gick i årskurs 4 och årskurs 5 när studien genomfördes. En exkludering gjordes av årskurs 6 eftersom dessa var upptagna med nationella prov. Totalt deltog 49 elever och de fick, om de ville, genomföra ett arbetsblad (se bilaga 2). Varför samtliga 49 elever genomförde arbetsbladet berodde på att samtyckesblanketten efterfrågade om eleverna fick intervjuas eller inte. Arbetsbladet bestod av sammanlagt åtta uppgifter. Dessa uppgifter har konstruerats utifrån tidigare forskning och presenteras i tabell 1.

Tabell 1.

Hur uppgifterna i arbetsbladet har konstruerats.

Uppgift	Beskrivning	Inspiration	Kritisk aspekt
1	Skriva tal i siffror	Engström (2016)	Alla siffror utgör ett tal
2	Namnge tiondel, hundradel och tusendel	Engström (2016)	Platsvärde
3	Placera ut talen 0,9 och 0,10 på en tallinje	Kullberg (2004) Jarl och Johansson (2014)	Platsvärde, nollans betydelse av platshållare
4	Jämföra samma tal som är skrivet på två olika sätt	Mårtensson (2015) Jarl och Johansson (2014)	Nollans betydelse, ju fler decimaler innebär inte värdemässigt större tal
5	Kan det finnas ett tal mellan 0,5 och 0,6?	Kullberg (2004) Jarl och Johansson (2014)	Platsvärde
6	Storleksordna tal	Mårtensson (2015) Kullberg (2004) Jarl och Johansson (2014)	Platsvärde
7	Sortera tal i talsorter	Engström (2016)	Platsvärde
8	Hur beräkningar görs med tal i decimalform	Engström (2016)	Alla siffror utgör ett tal

Utifrån hur eleverna har svarat på detta arbetsblad har ett målstyrt urval genomförts för att kunna fördjupa sig kring forskningsfrågan (Bryman, 2018, kap. 18). Ett målstyrt urval innebär att skribenten till studien väljer ut vilka personer som ska intervjuas, utifrån datainsamlingen (se bilaga 4).

Av sammanlagt 49 elever har följande kriterier gjorts för intervju:

- vårdnadshavare har godkänt att eleven fick delta i intervju och
- elever med övervägande fel svar i arbetsbladet.

Grunden för dessa kriterier är de kritiska aspekter som Jarl och Johansson (2014) identifierades i årskurs 4. Studien undersöker om samma kritiska aspekter även visar sig i andra elevgrupper i årskurserna 4 och 5.

Sammanlagt deltog tio elever för intervju, fem från årskurs 4 och fem från årskurs 5. Från början skulle åtta elever deltagit i intervjuerna, men fler elever ville dock delta. Därmed inkluderades två elever, som svarat mer rätt än fel på arbetsbladet, i intervjun. Inkluderingen av dessa två elever gjordes eftersom jag ville få en kontrast i hur elever som urskiljer de kritiska aspekterna i årskurserna 4–5 resonerar kring tal i decimalform jämförts med elever som inte urskilt detta.

De elever som har deltagit i intervju presenteras i tabell 2 (alla namn är påhittade).

Tabell 2.

Totalt gjordes tio intervjuer, fördelade på fem elever i årskurs 4 och fem elever i årskurs 5.

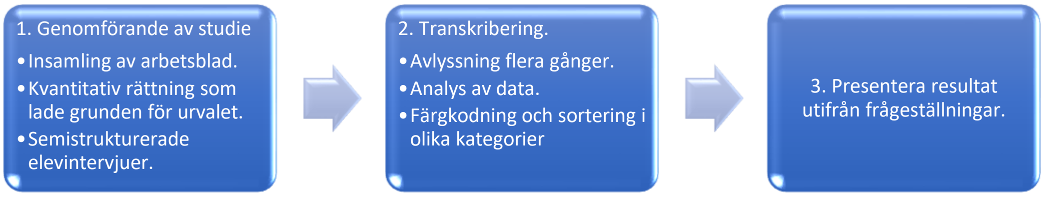
Elev	Årskurs
Robert	4
Bianca	4
Bill	4
Fidan	4
Preben	4
Joakim	5
Azad	5
Nilla	5
Harald	5
Christian	5

4.2 Genomförande

I detta avsnitt presenteras hur studien har genomförts. Figur 2 visar en överskådlig bild över arbetsgången. Därefter ges mer detaljerad beskrivning av hur arbetsprocessen ser ut.

Figur 2.

En överskådlig bild över arbetsprocessen



Genomförandet har genomförts på skolan där eleverna fick instruktion att göra så gott ifrån sig som möjligt. Om de inte kunde svara på en uppgift kunde de försöka med nästa uppgift istället. Arbetsbladen samlades sedan in och rättades kvantitativt (se bilaga 4) för att kunna lägga grunden till det målstyrda urvalet. Sammanlagt åtta elever ingick i urvalet, men eftersom fler elever ville delta i intervju så inkluderades ytterligare två elever. Dessa två elever hade övervägande fler korrekta svar på arbetsbladet. Inkluderingen av dessa två elever gjordes för att få en kontrastering i hur elever som urskiljer de kritiska aspekterna resonerar kring tal i decimalform. Dessa elever fick delta i semistrukturerade intervjuer där förutbestämda frågor (se bilaga 3) ställdes kring uppgifterna på arbetsbladet.

Semistrukturerade intervjuer innebär att frågorna i frågeschemat är öppna kring ett specifikt ämnesinnehåll samt att frågorna inte behöver följa en viss ordning. Eleverna fick mer frihet att utveckla sina svar, samtidigt som spontana följdfrågor som ”varför tror du att det blir så…?” kunde ställas i syfte att få fördjupade svar. Av detta skäl kunde nya aspekter identifieras. Samtidigt kunde eleverna, om de inte förstod en uppgift, få frågan uppläst av skribenten. Vid en sådan situation kunde skribenten peka på tal i uppgiften eller betona viktiga begrepp. Eleverna blev informerade om att deras namn skulle ersättas med ett påhittat namn och att de när som helst, utan att behöva ange en anledning, avbryta intervjun. Samtliga uppgifter förutom två, uppgift 1 och 2, ingick i samtalet. Dessa uppgifter exkluderades eftersom samtliga elever svarade rätt på uppgifterna. Därför var dessa uppgifter ointressanta för studien. Sju intervjuer genomfördes på plats. Resterande tre intervjuer genomfördes digitalt i plattformen *Zoom*. Intervjuerna gjordes enskilt med varje elev i ett grupprum på skolan. Elevintervjuerna spelades in med hjälp av en mobiltelefon, eftersom ”Ett mycket vanligt sätt att lösa dilemmat med reproduktion av samtal är att använda sig av en bandspelare, enbart eller tillsammans med anteckningar. På det sättet ser man till att få med allt på intervjun" (Ryen, 2004, s. 56). Vissa av intervjuerna stördes dock av störande moment, så som skrapljud när stolen eleven satt på rörde sig på golvet. Av detta skäl har det inspelade materialet lyssnats igenom flera gånger för att sedan transkribera det som har sagts (Bryman, 2018, kap. 20). Transkriberingen har därefter lästs flera gånger och analyserats med färgkodning för att kunna kategorisera analysarbetet. De olika färgerna har använts för att särskilja vilka citat som hör till vilken kritisk aspekt. De olika kritiska aspekterna som har varit till grund för kategoriseringarna var de som Jarl och Johansson (2014) identifierade i en tidigare studie.

4.3 Analys

Analysen har genomförts i flera steg där arbetsblad, intervjuer och transkribering ingått. Genom en triangulering har de kritiska aspekterna kunnat identifieras. En triangulering innebär att analysera någonting på flera olika sätt. I denna studie har kritiska aspekter identifierats genom arbetsblad och elevintervjuer. Arbetsbladet analyserades kvantitativt och lade grunden för vilka kritiska aspekter som eleverna inte hade urskilt samt vilka elever som skulle delta i intervjuerna. Under intervjuerna har eleverna sedan fått berätta, utifrån arbetsbladet, hur de uppfattat eller urskilt den kritiska aspekten. Triangulering medförde att det gick att kontrollera materialet en extra gång för att säkerställa resultatet (Bryman, 2018, kap. 17). Med utgångspunkt i tidigare forskning kunde en förutfattad mening ifrån skribenten ha bedömts om vad som är kritiskt för eleverna (Kullberg, 2004).

Nedan redogörs hur analysprocessen har genomförts:

- Steg 1 innebar att kvantitativt analysera elevsvaren från arbetsbladet och sammanställa i en tabell (se bilaga 4). Detta lade grunden till vilka åtta elever som skulle intervjuas. Därefter tillkom ytterligare två elever till intervjun. Dessa två elever hade övervägande fler korrekta svar på arbetsbladet och valdes ut för att få en kontrastering i hur elever resonerade som har urskilt de kritiska aspekterna.
- Steg 2 innebar att lyssna igenom det inspelade materialet och transkribera intervjuerna. Denna del var svår och tidskrävande. Varje transkribering tog ungefär att timme att genomföra.
- Steg 3 innebar att läsa igenom transkriberingen flera gånger för att kunna identifiera och fördjupa sig på de olika kritiska aspekterna.

- Steg 4 innebar att färgkoda de olika kritiska aspekterna i olika kategorier, i syfte att kunna kategorisera vad eleverna har urskilt och inte urskilt.

5. Resultat

Studien undersökte följande forskningsfråga: Vilka kritiska aspekter kan identifieras i en årskurs 4 och en årskurs 5 kring tal i decimalform?

Resultatet är uppdelat i sex underkategorier som är namngivna efter de identifierade kritiska aspekterna från Jarl och Johanssons (2014) studie.

5.1 Det finns tal mellan tal

Uppgift 4 testade den kritiska aspekten om det fanns något tal mellan 0,5 och 0,6. Elevsvaren på arbetsbladet varierade från att det inte fanns ett tal mellan 0,5 och 0,6, till att det kunde finnas ett eller flera tal. De elever som haft ett felaktigt svar och svarat att det inte finns något tal, alternativt att det endast finns ett tal mellan 0,5 och 0,6, hade inte urskilt innebörden av platsvärden och de olika delarna (hundradel, tusendel och så vidare). Utifrån de elever som blev intervjuade var det endast Christian som hade svarat att det inte fanns flera tal mellan 0,5 och 0,6 med orden:

> *Jag tror bara att det finns ett tal eftersom en femma är ju typ en del av en tia. Det är ju typ mitten av en tia med. En femma är även vanligt tal att ha med, så jag tänkte att en femma och en sexa är ju hel [heltal] så 0,55 är ju i mitten… Man brukar ju ha en femma för att visa att det är mitt emellan.* (Christian, årskurs 5)

Av citatet kan antydas att Christian endast ser att talet 0,55 är det enda tal som kan befinna sig mellan 0,5 och 0,6. En anledning till detta kan vara att, som han uttryckte sig i citatet, det tal som brukar representeras som det enda mellan två tal i decimalform är det som befinner exakt i mitten mellan två tal.

5.2 Vilka siffror är decimaler i decimaltal?

I uppgift 7 identifierades att flera elever ännu inte hade urskilt den kritiska aspekten om vad som är heltal, tiondel och hundradel. I uppgift 7 skulle olika tal i decimalform sorteras i olika talsorter (se figur 3).

Figur 3.

Talen i kolumnen längst till vänster ska delas in i olika talsorter.

Tal	Tiotal	Ental	Tiondel	Hundradel	Tusendel
0,3					
1,52					
14,1					
22,101					

När Harald fick frågan hur han skulle placera siffrorna uttryckte han följande kring talet 0,3:

> *Jag tänkte… Ehm... Asså första är ju ental [0]. Sen den andra siffran [3] är tiondel, så det är fel… Trean på tiotal och nollan som ett ental!* (Harald, årskurs 5)

Citatet från Harald kan antyda att han till en början kan ha urskilt siffrornas relation till varandra. Däremot ändrade han sig i intervjun till att siffran 3 skulle vara ett tiotal i stället för en tiondel. Detta skulle kunna bero på en osäkerhet eller en generalisering om att en trea alltid är värdemässigt större än en nolla, oberoende var i talet siffran befinner sig.

Christian svarade så här angående vad siffrorna i talet 0,3 representerade:

> *Om det står 0,3 så är trean entalet eftersom det står bakom det här kommatecknet. När siffran alltid står bakom kommatecknet så är det alltid ett ental.* (Christian, årskurs 5)

Av citatet kan det tolkas som att Christian sett decimaltecknet men tog inte hänsyn till dess funktion att dela upp talet i heltal och decimaler. I stället kan han ha behandlat siffrorna som heltal där en nolla som är placerad till vänster om talet inte fyller någon funktion. Bianca hade däremot delat upp talet 1,52 i heltal och decimaler:

> *Det är för att den [ettan] är på den sidan [till vänster om decimaltecknet]. Då blir ju det ett tal! Till höger om decimaltecknet blir en del.* (Bianca, årskurs 4)

I just hennes resonemang argumenterade hon för att endast heltal kunde benämnas som tal. Vid frågan om siffrorna på båda sidor om decimaltecknet tillsammans kunde utgöra ett tal kom följande svar:

> *Tillsammans? Nej, det [siffran till vänster om decimaltecknet] är ett tal!* (Bianca, årskurs 4)

Det som Bianca hade urskilt var att decimaltecknet skiljer heltalen från decimalerna. Däremot hade hon inte urskilt att samtliga siffror tillsammans utgör ett tal. Detta skulle också kunna bero på att hon i uppgiften ”upptäckt en skiljelinje” där siffrorna benämndes med suffixen *-tal* och *-del* om vardera sida om decimaltecknet.

5.3 Utläsa tal som hel, tiondel och hundradel

Utifrån uppgift 7 visade det sig att flera elever inte hade urskilt hur de skulle placera ut heltal, tiondelar och hundradelar. I samtliga intervjuer uttalade eleverna decimalerna på samma sätt som de uttalade heltal, till exempel 0,3 som ”noll komma tre”. Hur mycket respektive siffra var värd varierade mellan eleverna. Harald argumenterade för att trean var värd tre tiotal, medan Preben argumenterade för att trean var värd tre ental:

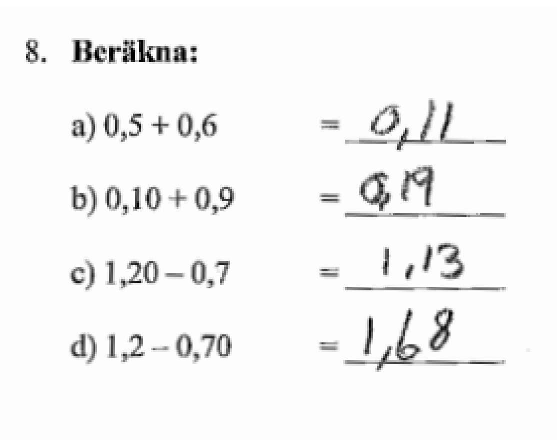
> *Trean på tiotal och nollan som ett ental!* (Harald, årskurs 5)
>
> *Jag hade placerat trean i 0,3 på ental… Det är ju en trea och då blir det ett ental… Noll är ju inte värt någonting.* (Preben, årskurs 4)

Ingen av eleverna har urskilt att siffran till vänster om decimaltecknet är entalspositionen. Den aspekt som framkom genom intervjuerna var att siffrorna på respektive sida om decimaltecknet kunde uppfattas som två separata tal. Bianca förklarade, som tidigare nämnt, att siffror till vänster om decimaltecknet är tal, men att siffror till höger om decimaltecknet var delar. Detta skulle kunna antyda att hon såg siffrorna om varsin sida om decimaltecknet som två separata tal. Det skulle också kunna betyda att hon urskilt att heltal alltid befinner sig till vänster om decimaltecknet och att siffrorna till höger om decimaltalet alltid benämns som ”delar” (tiondel, hundradel…).

Liknande problematik som nyligen har beskrivits framkom även i uppgift 8 på arbetsbladet. I uppgiften fanns fyra deluppgifter med additions- och subtraktionsoperationer med tal i decimalform (se figur 4). Här skulle eleverna urskilja att samtliga siffror i ett uttryck tillsammans utgjorde ett tal.

Figur 4.

Elever hade svårt med uppgift 8. Här visas ett elevsvar.


8. Beräkna:

a) 0,5 + 0,6 = 0,11

b) 0,10 + 0,9 = 0,19

c) 1,20 – 0,7 = 1,13

d) 1,2 – 0,70 = 1,68

I årskurs 4 fanns ingen elev som svarade rätt på samtliga deluppgifter. Fidan försökte lösa deluppgift 8a och förklarade så här:

> *Jag tänkte att man plussar ihop 5 och 6 och då blir det 11. Då har jag skrivit 0,11. För jag vet... Jag tror inte att det blir en etta där [heltal].* (Fidan, årskurs 4)

Utifrån citatet kan det tolkas som Fidan tolkat siffrorna om varsin sida om decimaltecknet som två separata tal som därefter adderas var för sig. Därefter har uträkningen behandlat ”de två separata talen” på samma sätt som heltal adderar med varandra. Det innebar att nollorna adderades med varandra och talen 5 och 6 adderades med varandra. Bill har försökte lösa uppgifterna utefter sina tidigare kunskaper. Han förklarade sina lösningar på uppgift 8c och 8d så här:

> *Där skrev jag en etta och sedan tog jag 20 minus 7. Då fick jag ett komma tretton [1,13]. Då fick jag bort nollan helt. På sista uppgiften [1,2 – 0,70] gjorde jag likadant. Jag skrev en etta och sedan kollade jag på noll komma sjuttio [0,70]. Jag skrev en etta och sedan ett kommatecken. Sedan tog jag 70 - 2 som är 68. Då fick jag det till ett komma sextioåtta [1,68].* (Bill, årskurs 4)

Citatet från Bill kan tolkas som att han tänkt att det var två separata tal på varsin sida om decimaltecknet. Därmed har han inte vetat hur han skulle räkna ut när ett tal ska subtraheras med ett värdemässigt större tal utan att få negativa tal. Bill var inte ensam om att skriva detta svar på arbetsbladet. De flesta elever i årskurs 4 har svarat på detta sätt och inte vetat hur de skulle lösa uppgifterna. Detta förtydligades även i intervju med Bianca:

> *...jag fattade inte hur jag skulle räkna ut den.* (Bianca, årskurs 4)

Vad som gick att identifiera från de tre elevsvaren i intervjun var att eleverna kan ha tänkt att det är två separata tal om båda sidor av decimaltecknet. Däremot kunde Robert, som på arbetsbladet svarat likadant som Bill, urskilja vad han hade gjort för fel. Robert resonerade följande kring uppgift 8c:

> *Det är ju en hel och ehh… 20 hundradelar. Då får jag ju 120 hundradelar och då tar man ju bort sju stycken tiondelar. Så då tar man ju bort… man börjar ju med dem så är det ju bara fem kvar och då tar man bort dem så har man fem [tiondelar] kvar.* (Robert, årskurs 4)

Citatet från Robert antyder att han under intervjun urskilde siffrornas olika platsvärden, samtidigt som han gjorde en enhetsomvandling till hundradelar i båda termerna.

De elever i årskurs 5 som svarat fel på arbetsbladet kan ha, likt eleverna i årskurs 4, behandlat siffrorna på varsin sida om decimaltecknet som två separata tal. Det framgick i intervjuerna av både Joakim och Harald i sina förklaringar av hur de försökt lösa uppgiften 1,20 – 0,7:

> *Vänta lite… Jag räknade 20 - 7 eftersom att det är noll komma… Hade det stått till exempel ett komma tjugo [1,20] minus ett komma sju [1,7] så hade det liksom blivit noll komma…tretton.* (Harald, årskurs 5)
>
> *Där är ju ettan och den blir… Den blir ju inte mindre för att det är en sjua så då satte jag dit den [ettan]. Sen så gjorde jag sju minus tjugo. Det blir tretton. Svaret blir ett komma tretton [1,13].* (Joakim, årskurs 5)

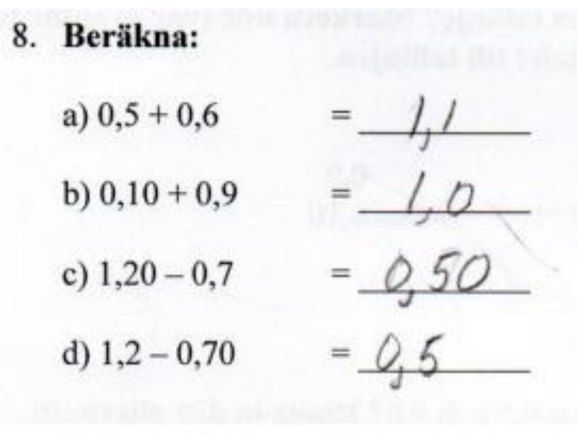
Citaten från Joakim och Harald visar att just de två eleverna kan ha tänkt att det var två separata tal på varsin sida om decimaltecknet. En av de elever i årskurs 5 som löste uppgift 8c och 8d var Nilla. Hon förklarade sina beräkningar så här:

> *... jag lade på en nolla efter noll komma sju samtidigt som jag tog bort nollan och kommatecknet före sjuan. Då blev det sjuttio. Sedan tog jag bort kommatecknet mellan ettan och tvåan i ett komma tjugo för att få 120. Då tänkte jag 120–70 som är 50. Sen la jag till en nolla och ett kommatecken före 50. I uppgift 8d har man bytt platser på nollorna efter talen. Det är samma tal!* (Nilla, årskurs 5)

Citatet visar att Nilla urskilt decimalernas olika platsvärden och samtidigt förlängt båda termerna hundrafalt för att få en lättare uträkning. Dessutom förklarar Nilla i citatet att det är samma tal i 8c och 8d. Nillas svar visualiseras i figur 5.

Figur 5.

Ett korrekt elevsvar på uppgift 8.

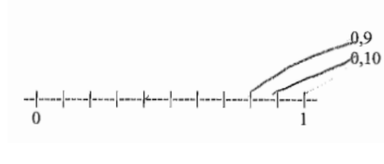
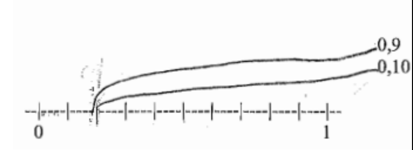


5.4 Nollans betydelse av decimaltal

Denna aspekt testades på två olika sätt; placering av talen 0,9 och 0,10 en tallinje och storleksordning mellan talen 0,5 och 0,50. Figur 6 visas de tre vanligaste svaren som elever i både årskurs 4 och 5 gav på arbetsbladet när de skulle placera ut talen 0,9 och 0,10 på en tallinje. Gemensamt för dessa svar var att samtliga elever hade placerat talet 0,10 som värdemässigt större än talet 0,9. Däremot varierade placeringen av talen.

Figur 6.

De tre vanligaste elevsvaren var talen 0,9 och 0,10 ska placeras på en tallinje som är graderad mellan 0 och 1.

Placera talen 0,9 och 0,10 på en tallinje. Markera ditt svar ovanför tallinjen genom att dra ett streck från talet till tallinjen		
		

Det som gick att utläsa var att eleverna svarat att 0,10 är värdemässigt större än 0,9. Eleverna hade inte urskilt nollans betydelse som platshållare samt att om en nolla, som befinner sig längst till höger bland decimalerna, inte påverkar talets värde.

Preben menade att ”0,10 är ju mycket större än 0,9” eftersom tio är mer än nio. Detta skulle kunna bero på att Preben generaliserar sina kunskaper om vad som gäller för heltalen där talet 10 är värdemässigt större än talet 9 i talramsan där tio kommer efter nio. Fidan hade placerat ut talen på samma sätt som Preben, men utvecklade sitt svar mer:

> *Om det är 0,9 och 0,10 så är det ju ganska nära varandra. Jag tror att det är så, för 0,9 och för att komma upp till 0,10 kanske man bara ska lägga till en [tiondel]. Man räknar ju 9 och sen blir det 10. Det var lite så jag tänkte.* (Fidan, årskurs 4)

Fidan kan genom sitt svar ha tänkt att talet 0,10 naturligt kommer i ordningsföljd efter talet 0,9 eftersom han vet att det är så bland heltalen. Han har däremot inte urskilt att en storleksjämförelse mellan tal i decimalform kräver att talen har lika många decimaler efter decimaltecknet. Bianca hade, till skillnad från Preben, Harald och Fidan som placerade talen nära talet 1 på tallinjen, placerat talen nära 0. Hon gav denna förklaring:

> *Jag räknade millimeter. Asså jag tror att det så att… Eftersom det var noll där så räknade jag till där det stod nio och tio på min linjal.* (Bianca, årskurs 4)

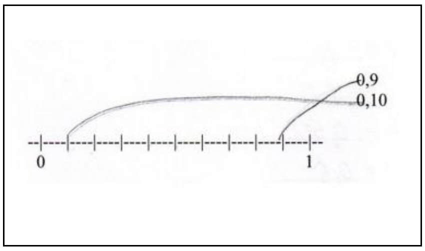
Citatet från Bianca kan antyda att hon såg tallinjen som avståndet på sin linjal mellan siffrorna 0 och 1. En elev som däremot hade urskilt den kritiska aspekten att förstå nollans betydelse av platshållare var Nilla. Hon förklarar sin tankegång så här:

Jag lade på en nolla efter nian [0,9] så det blev 0,90. Det är innan heltalet. Sedan har vi andra talet, 0,10 som inte är lika stort utan en tiondel av heltalet. Då hamnar det talet nära 0 på tallinjen. Jag gjorde så här eftersom… det skulle vara lättare att se vilket tal som var störst. Jag ville ha lika många decimaler i båda talen för att kunna jämföra dem. (Nilla, årskurs 5)

Citatet från Nilla kan antyda att hon urskilt att en storleksjämförelse mellan tal i decimalform kräver att samtliga tal består av lika många decimaler. Vad som går att se i hennes svar är att hon lagt till en extra nolla till höger om siffran 9 i talet 0,9 för att få ut talet 0,90. Genom detta resonemang kan det ha tolkats som att Nilla även urskilt att en nolla längst till höger bland decimaltal kan uteslutas utan att påverka talets värde. Figur 7 visas Nillas svar på arbetsbladet.

Figur 7.

Nillas placeringar av talen 0,10 och 0,9 på en tallinje mellan värdena 0 och 1.



I uppgift 5 på arbetsbladet skulle eleverna visa förståelse att en nolla längst till höger i ett decimaltal kunde uteslutas. Talen som användes var 0,5 och 0,50. Eleverna skulle visa om de urskilt att talen var värdemässigt lika stora. De elever som deltog i intervjun och inte hade urskilt detta förklarade i intervjun att ”femtio är ju större än fem! Därför är 0,50 [uttal ”noll komma femtio”] större än 0,5 [uttal: ”noll komma fem”]” (Preben, årskurs 4; Harald, årskurs 5). En anledning till att eleverna svarade som de gjorde kan bero på att de har utläst talen som ”noll komma femtio” respektive ”noll komma fem”. Genom detta sätt att uttala talen kan de ha generaliserat till det var två separata tal om decimaltecknet och att femtio är värdemässigt större än fem eftersom detta förhållande gäller bland heltalen.

Bill, Azad och Christian hade till en början samma resonemang som både Preben och Harald, men ändrade sig när de fick resonera kring varför de hade svarat som de gjorde. Christian hade ett utvecklat svar om varför båda talen är lika stora:

… man behöver faktiskt bara lägga till en nolla för att talen är fortfarande lika stora. Det spelar ingen roll om det är 0,6 eller 0,60 eller 0,7 och 0,70. Talen är fortfarande lika stora bara om man lägger till en nolla. Man lägger bara till en nolla fast det är lika stora tal! (Christian, årskurs 5)

Christians svar kan antyda till att han urskilt att en storleksjämförelse mellan tal i decimalform erfordrar att talen har lika många decimaler.

5.5 Siffrors olika platsvärden

Uppgift 7 i arbetsbladet testade också om eleverna hade urskilt siffrornas platsvärde eller inte genom att placera ut siffror i olika talsorter. Detta visade sig vara svårt för elever i både årskurs 4 och 5, eftersom hälften av eleverna i de båda årskurserna placerade ut talen fel på arbetsbladet. Ett exempel på ett elevsvar från årskurs 5 ges i figur 8.

Figur 8.

Ett elevsvar där det varit svårt att dela upp de olika talsorterna till respektive platsvärde.

Tal	Tiotal	Ental	Tiondel	Hundradel	Tusendel
0,3	0	3	0	0	0
1,52	1	5	2	0	0
14,1	14	1	0	0	0
22,101	22	1	0	1	

Figur 8 visar endast ett exempel på hur ett felaktigt elevsvar såg ut. Det som går att se är att eleven inte vetat skillnad på vad tiotal, ental, tiondel, hundradel och tusendel är. Det som skett kan vara att eleven i första talet tänkt att siffran 3 är ett ental eftersom en nolla längst till vänster kan uteslutas bland heltalen. I övriga rader har eleven fyllt i kolumnerna från vänster till höger utan att ta hänsyn till hur mycket varje siffra är värd. I rad tre och fyra har eleven inte tagit hänsyn till att första siffran till vänster är ett tiotal och andra siffran är ett ental. Eleven kan därför ha sett talen 14 och 22 som tiotal och därför placerat dessa tal på tiotalspositionen utan att reflektera över hur mycket 14 respektive 22 tiotal är värt (140 respektive 220). De felaktiga elevsvaren i arbetsbladet visade att flera elever inte urskilt de olika siffornas platsvärden. Dessutom uppmärksammades det, under intervjun, att flera av eleverna som intervjuades uttalade decimalerna fel samt decimaltecknet som *kommatecken*. När Preben fick frågan hur han skulle sortera talet 0,3 i talsorter svarade han följande:

> *Jag hade placerat trean i 0,3 på ental… Det är ju en trea och då blir det ett ental… Noll är ju inte värt någonting*. (Preben, årskurs 4)

Preben har inte urskilt siffrornas olika platsvärden i talet eftersom han svarade att trean är värd ”ett ental” i stället för tre tiondelar. Hur talet 14,1 kunde sorteras in i talsorter och om värdet på de båda ettorna i talet kunde vara detsamma, kom följande svar från Preben:

I talet 14,1 så är den första ettan värd mer eftersom den är först i talet. Den sista ettan står sist i talet och är värd ett ental. (Preben, årskurs 4)

I detta tal har Preben urskilt att värdet på de båda ettorna skiljer sig åt och att den ettan som befinner sig längst till vänster är värd mer än ettan längst till höger. Utifrån Prebens svar kan det därför antydas att han urskilt att ju längre till vänster en siffra befinner sig i ett tal, desto större värde på siffran. Det motsatta visar sig också i hans svar, nämligen att ju längre till höger en siffra befinner sig, desto mindre värde får den siffran.

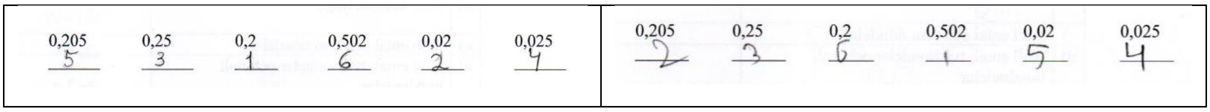
Ytterligare en uppgift som testade platsvärde var uppgift 6 på arbetsbladet. I denna uppgift skulle sex tal i decimalform storleksordnas. De sex olika talen var, i storleksordning från det minsta till största:

0,02 0,025 0,2 0,205 0,25 0,502

De flesta elever visade inga svårigheter med att markera det värdemässigt största talet (0,502). Däremot varierade svaren kring vilket tal som var värdemässigt störst eller minst, vilket kan ses i figur 9 där två olika storleksordningar är presenterade.

Figur 9.

Två olika elevsvar som visar hur de valt att storleksordna talen.



Bianca och Bill gav liknande svar om vilket tal som skulle vara det värdemässigt största talet efter 0,502 tillika det värdemässigt minsta talet:

Det näst största talet är 0,205. Jag tänkte väl att där var det ju också en femma i slutet och ett tal mer, en siffra mer. (Bianca, årskurs 4)

För att den hade tre… decimaler [0,205]. Det minsta talet är 0,2 eftersom det endast har en bokstav… eller en siffra efter decimaltecknet! (Bill, årskurs 4)

Utifrån Biancas och Bills svar kan de ha tänkt att det värdemässigt största talet är det som innehåller flest decimaler. De kan ha tänkt så här eftersom detta förhållande gäller för heltal. Harald hade tänkt att det värdemässigt minsta talet skulle vara 0,025 med följande förklaring:

…det är mer siffror i det talet [0,025] och därför är det… det minsta talet! (Harald, årskurs5)

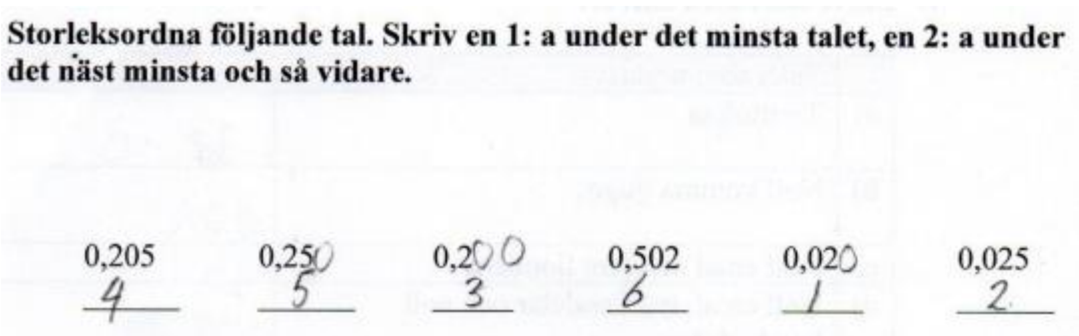
Haralds svar skiljer sig på det sättet att han ansåg att det värdemässigt största talet var det som innehöll minst antal decimaler. Detta skulle kunna bero på att han urskilt att en tiondel är värdemässigt större än en hundradel och tusendel och därmed inte tagit hänsyn till vilken siffra som befann sig på tiondelspositionen. Av de tre citaten har eleverna inte urskilt att det i decimaltal är siffrans platsvärde som avgör talets värde och inte antal decimaler. Harald har inte urskilt siffrornas platsvärde och har svarat att det värdemässigt minsta talet är det som innehåller flest decimaler. Bianca och Bill tänkte i stället att det tal som innehåller flest decimaler är värdemässigt störst. Azad hade i sitt svar på arbetsbladet tänkt likadant, att ett tal är värdemässigt större ju fler siffror det innehåller, men kunde i intervjun resonera att så behövde det inte alls vara:

> *Vi behöver lägga till lika många decimaler bakom för att kunna jämföra talen… Men jag vet inte vilken siffra man ska lägga till. Vi kan lägga till en femma… eller en trea. Vi kan också lägga till en sjua!* (Azad, årskurs 5)

Utifrån Azads svar hade han urskilt att ett tal inte blir värdemässigt större ju fler decimaler det har. Däremot visade han osäkerhet i vilken siffra som kunde läggas till för att få lika många decimaler i talen. Azad hade urskilt två aspekter, men visste inte att en nolla kan uteslutas från ett tal i decimalform, om den är placerad längst till höger. Azads beskrivning visualiserades genom Nillas svar (figur 10).

Figur 10.

Nilla förlängde decimalerna genom att lägga till nollor. På det sättet fick samtliga tal lika många decimaler


Storleksordna följande tal. Skriv en 1: a under det minsta talet, en 2: a under det näst minsta och så vidare.

0,205	0,250	0,2000	0,502	0,020	0,025
4	5	3	6	1	2

Vid intervju med Nilla kring hur hon tänkt svarade hon följande:

Jag har satt ut lika många decimaler i varje tal för att det skulle bli lättare att storleksordna talen. Då blev det lättare att se vilket tal som är störst och minst eftersom det är lika många decimaler i talen. Det tal jag lade till var noll, för det är ingenting där. Om det hade stått 0,26 så skulle det vara sex hundradelar, men det står ju inte. (Nilla, årskurs 5)

Nilla urskilde samtliga kritiska aspekter genom att tilldela samtliga tal lika många decimaler. Den siffra som lades till var en nolla och det kan därmed antydas att Nilla urskilt att en nolla längst till höger bland decimaltal kan uteslutas.

5.6 Skillnad mellan tiotal och tiondel

Utifrån arbetsbladet flera elever att de inte hade urskilt skillnaden mellan tiotal och tiondel. Dock visade alla elever som deltog i intervjuerna, utom Harald, att de hade urskilt skillnaden mellan tiotal och tiondel. När han fick frågan om vad siffrorna till höger om decimaltecknet har för platsvärde svarade han:

Den andra siffran efter kommatecknet är en tiondel! (Harald, årskurs 5)

Vid frågan om vad den första siffran efter decimaltecknet har för platsvärde svarade han att det var ”tiotal”. Han ville även förtydliga att talet 0,3 delades upp i följande talsorter:

Trean är ett tiotal och nollan är ett ental! (Harald, årskurs 5)

Det Harald inte hade urskilt var att siffran noll befann sig på entalspositionen och siffran 3 på tiondelspositionen. Han skulle också kunna ha tänkt att ett tal inte kan innehålla en nolla som är placerad längst till vänster eller att nollan längst till vänster kan uteslutas eftersom det gäller för heltal.

5.7 Sammanfattning av resultat

I denna studie har sju kritiska aspekter varit avgörande för att de valda elevgrupperna ska förstå tal i decimalform. Sex av dessa identifierades även i studien av Jarl och Johansson (2014, s. 24):

- ”Elever behöver förstå att det finns tal mellan decimaltal.
- Elever behöver förstå vilka siffror som är decimaler i tal i decimalform.
- Elever behöver utläsa tal som hel, tiondel och hundradel.
- Elever behöver förstå nollans betydelse av att vara platshållare i ett tal.
- Elever behöver förstå siffrors platsvärde för tal i decimalform.
- Elever måste förstå skillnaden mellan hel, tiondel och tiotal.”

En sjunde kritisk aspekt identifierades i denna studie, nämligen:

- Elever behöver förstå att siffror om båda sidor av ett decimaltecken tillsammans utgör ett tal.

Efter en jämförelse av arbetsbladet och intervjusvar från årskurserna 4–5, kunde skillnader identifieras i hur eleverna förstod de kritiska aspekterna. Elever i årskurs 4 hade inte fått syn på positionernas platsvärden eller nollans betydelse i tal. I årskurs 5 hade hälften av alla elever urskilt platsvärde och nollans betydelse. För båda årskurserna har dock språkliga svårigheter bidragit till att tal i decimalform uppfattades som två separata tal.

6. Diskussion

I detta avsnitt diskuteras studiens metod och resultat.

6.1 Metoddiskussion

I studien deltog två klasser, bestående av en årskurs 4 och en årskurs 5, som godkänt sin medverkan i studien och intervju i enlighet med samtyckeskravet (Bryman, 2018, kap. 6). De två eleverna som inkluderades i intervjun bidrog till att en kontrast kunde göras i hur elever resonerade som hade urskilt de kritiska aspekterna. På detta sätt gick det att jämföra hur elever resonerar som både har, men också inte har, urskilt de kritiska aspekterna.

Två begrepp som används inom forskningsundersökningar är validitet och reliabilitet (Bryman, 2018, kap. 3). Dessa begrepp behandlar studiens trovärdighet utifrån den data som har analyserats och om resultatet ger de svar som studiens undersöker. Validitet innebar att studiens resultat hänger ihop med vad som ska mätas utifrån studiens frågeställningar. Av resultatet i denna studie kan det antas att eleverna i årskurs 4 ännu inte fått undervisning kring tal i decimalform, något som ordinarie lärare hade förvarnat om. Av detta skäl kan validiteten i denna studie ifrågasättas. Dessutom inkluderades två elever som hade urskilt de kritiska aspekterna. Denna inkludering bidrog dock till att kunna få en kontrast i förståelsen av hur dessa elever hade urskilt de kritiska aspekterna. Detta kunde ha påverkat resultatet på så vis att de kritiska aspekterna har synliggjorts, något som kanske inte hade gjorts om dessa elever inte inkluderades. Däremot har studien försökt hålla hög validitet eftersom fokus har legat på att identifiera vad som kan vara svårt för elever att urskilja kring tal i decimalform. För att höja validiteten i denna studie konstruerades en intervjuguide (se bilaga 3) som ställde frågor som utgick från det valda området för att hålla sig till ämnet och besvara frågeställningarna. Reliabilitet innebar att kunna få samma resultat om studien genomför en andra gång. Mot denna bakgrund har denna studie försökt hålla hög reliabilitet eftersom samma frågor kan återanvändas och resultatet skulle kunna bli detsamma i åldersgruppen.

Däremot går det inte betrakta studien som en variationsteoretisk undersökning fullt ut eftersom endast kritiska aspekter har inkluderats. Det kan ha funnits fler kritiska aspekter som inte har kunnat identifierats på grund av att eleverna endast fick genomföra ett arbetsblad samt att det totalt var tio elever som genomförde intervjuer. Om det hade varit andra tio elever, eller ytterligare tio elever, som deltagit i intervjun är det inte säkert att resultatet hade blivit detsamma. Fler kritiska aspekter hade kanske inte identifierats, men resultatet hade kunnat verifieras mer. Tidsaspekten för studien har också haft betydelse för resultatet eftersom genomförandet av arbetsbladet och intervjuerna endast har genomförts vid två tillfällen. Om studien hade genomförts under en längre tid, till exempel ett halvår, är det inte säkert att det hade bidragit till att fler kritiska aspekter hade identifierats, men reliabiliteten hade varit högre. Det är dessutom inte säkert att samma kritiska aspekter skulle kunnat identifierats en annan elevgrupp på en annan skola under samma tidsperiod. Utifrån elevsvaren på arbetsbladet och arbetsbladets sammanställning (se bilaga 4) går det inte med säkerhet avgöra om dessa kritiska aspekter gäller för alla de elever som inte medverkade i intervjun. Dessutom är det inte säkert att de kritiska aspekter som har identifierats kring tal i decimalform i denna studie gäller för samtliga elever i årskurserna 4–6 eftersom det är ett för litet urval som inte kan generaliseras. Däremot kan kritiska aspekter som har identifierats i denna studie kunna visa sig i andra elevgrupper. Därmed kan kritiska aspekter vara överförbara och identifieras i andra elevgrupper.

6.2 Resultatdiskussion

Resultatdiskussionen kommer diskuteras utifrån studiens syfte. Syftet diskuterar likheter och skillnader mot tidigare studien av Jarl och Johansson (2014).

Samtliga kritiska aspekter som identifierats i den tidigare studien från Jarl och Johansson (2014), kunde även identifieras i denna studie. Vad detta berodde på skulle kunna vara att denna studie har utgått från liknande uppgifter i samma åldersgrupp och att skribenten haft förutfattade meningar om vad som kunde varit kritiskt (Kullberg, 2004). Det skulle också kunna bero på att eleverna ännu inte har fått undervisning kring dessa kritiska aspekter eller påträffat tal i decimalform innan.

De likheter som identifierades utifrån arbetsbladet var att flera elever i båda studierna var omedvetna om att det kunde finnas oändligt med tal mellan två närliggande tal. Flera elever i både årskurs 4 och årskurs 5 svarade att det inte fanns något tal mellan två närliggande tal – 0,5 och 0,6. Tidigare forskning hade identifierat att denna missuppfattning kunde bero på en generalisering av att det bland heltalen inte kunde finnas något tal mellan två närliggande heltal. Eleverna kan därför ha tänkt att samma relation gäller för tal i decimalform (McIntosh, 2008). De elever som blev intervjuade kunde dock urskilja att det kunde finnas tal mellan två närliggande tal i decimalform genom att lägga till en decimal till höger om de befintliga decimalerna. Värdet på den extra decimalen var alltid en femma. Varför det skulle vara just en femma i stället för en annan siffra var desto svårare att veta eftersom tidigare forskning inte identifierat detta. I denna studie framkom det av en elev att en femma skulle läggas till eftersom det var den vanligaste siffran som brukar användas för att visa ett tal som är mellan två närliggande tal i decimalform. För att förhindra liknande fel skulle introduktionen av tal i decimalform kunna utgå från mätning av olika sträckor, i syfte att visualisera att en sträcka kan preciseras med hjälp av fler decimaler (Skolverket, 2017; Kullberg, 2004; Björk & Pettersson Berggren, 2014). Som tidigare nämnts är en meterlinjal ett bra verktyg för att visualisera en tallinje mellan värdet 0–1, där talet 1 utgör en hel meter (Björk & Pettersson Berggren, 2014). Mittpunkten hamnar på 0,5 eller 0,50 meter beroende på hur många decimaler som används. Fler decimaler i ett tal innebär, som tidigare nämnt, ett mer precist värde på talet (Kiselman & Mouwitz, 2008). Detta sätt att visualisera att det finns flera tal mellan två närliggande tal kan öka elevernas kunskaper om antal decimaler.

Utifrån elevintervjuerna kunde det identifieras att elevsvårigheter och missuppfattningar som uppstod kunde vara relaterade till språk. Detta gällde även i Jarl och Johanssons (2014) studie. Elever uttalade tal i decimalform, till exempel 0,3, som ”noll komma tre”. Mot denna bakgrund identifierades att eleverna i båda studierna tolkade ett tal i decimalform som två separata tal. Denna missuppfattning grundar sig i att eleverna kan ha uppfattat trean som ett heltal i stället för att trean hör ihop med nollan och decimaltecknet (Mårtensson, 2015; Gough, 2007). Jarl och Johansson (2014) synliggjorde denna kritiska aspekt för eleverna genom att de uttalade talen som ”noll hela och tre tiondelar”. I denna studie uttalade skribenten talet på samma sätt, men eleverna i intervjun fortsatte trots allt att uttala talet som ”noll komma tre”. Varför eleverna i denna studie fortsatte uttala talet på detta sätt skulle kunna bero på att de var vana vid att uttala decimaltecknet som ”kommatecken” eller att deras ordinarie lärare konsekvent också sa ”kommatecken”. Ytterligare en likhet som var relaterad till språk var att eleverna i båda studierna hade svårigheter i att skilja på begreppen tiotal och tiondel samt hundratal och hundradel. Av detta skäl har elever i båda studierna missuppfattat att en hundradel är värd mer än en tiondel eftersom de inte urskilt att hundradel är värt mindre än en tiondel (McIntosh, 2008; Gough, 2007; Mårtensson, 2015).

Eftersom denna studie genomfördes i andra elevgrupper, har sammanlagt fyra skillnader kunnat identifieras mot studien av Jarl och Johansson (2014). Dessutom har andra kritiska aspekter kunnat identifieras. De fyra skillnader som kunnat identifieras utifrån arbetsbladet och de elevintervjuer som har gjorts har varit;

- placering av talen 0,9 och 0,10 på en tallinje,
- siffror på varsin sida om decimaltecknet kunde tolkas som två separata tal,
- flera elever urskilde inte siffrornas platsvärde eller vetat hur tal i decimalform kunde beräknas,
- elever tolkade ett tal i decimalform som innehöll få decimaler var värdemässigt störst, utan att ta hänsyn till siffrornas placering.

Den första skillnaden identifierade storleksrelationen mellan talen 0,9 och 0,10. I Jarl och Johanssons (2014) testades denna kritiska aspekt genom att elever fick ringa in vilket av talen som var värdemässigt störst. I denna studie skulle eleverna placera ut talen på en tallinje som var graderad mellan 0 och 1. Dessa tal är värdemässigt långt ifrån varandra. Ändå placerade de flesta elever i denna studie dessa tal bredvid varandra, där 0,10 var värdemässigt större. Detta gällde för båda årskurserna. En orsak till detta skulle kunna vara, som tidigare nämnt, språket som försvårar hur dessa tal uttalas. Denna generalisering skulle kunna bero på att eleverna i talspråk uttalar räkneramsan *nio* och därefter *tio* (Gough, 2007; McIntosh, 2008; Kullberg, 2004). Detta skulle också kunna syfta till att elever tänker att ett tal som innehåller fler decimaler är värdemässigt större eller att eleverna inte har urskilt de olika siffrornas platsvärden (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985; Hansson, 2019). Mot denna bakgrund anser skribenten att det är nödvändigt att använda ett så adekvat språk som möjligt vid uttal av tal i decimalform för att förtydliga siffrornas olika platsvärden. Av detta skäl får eleverna möjlighet att urskilja att den första siffran till höger om decimaltecknet alltid befinner sig på tiondelspositionen, samt att den sista nollan i ett uttryck med tal i decimalform kan uteslutas.

Den andra skillnaden som identifierades i denna studie, men inte i Jarl och Johanssons (2014) studie, var att när elever skulle göra beräkningar med tal i decimalform så behandlades siffrorna på varsin sida om decimaltecknet som två separata tal. Utifrån ett elevsvar identifierades en ny kritisk aspekt, nämligen att siffror på båda sidor om ett decimaltecken tillsammans utgör ett tal. Eleven uppfattade att siffror till vänster om decimaltecknet kunde betraktas som tal, och siffror till höger är delar. Orsaken till detta skulle kunna bero på att eleven trodde att decimaltecknet separerar siffrorna till två separata tal och att dessa tal då ska behandlas som heltal och delar (Rahayu & Putri, 2018; Steinle & Stacey, 1998; Kiselman & Mouwitz, 2008; Kullberg, 2004). Enligt eleven var siffrorna på varsin sida om decimaltecknet två skilda tal som separerades med hjälp av decimaltecknet. Det skulle också kunna antydas att uppgiften i sig var dåligt konstruerad. Det innebar att kolumnerna längst upp kunde fungera som en skiljelinje mellan vad som var ”tal” och vad som var ”del”. Eleven kan ha upptäckt detta och trott att det endast är heltalen som kan benämnas som tal. Tyvärr fick jag aldrig något svar om ”delarna” (siffrorna till höger om decimaltecknet) någonsin kunde bli ett helt tal.

Den tredje skillnaden som identifierades var när eleverna beräknade tal i decimalform, där heltalen beräknades för sig och decimalerna för sig. Jarl och Johansson (2014) hade inte identifierat några beräkningar av tal i decimalform i sin studie. Anledningen till att eleverna beräknade heltalen för sig och decimalerna för sig skulle kunna bero på att eleverna inte hade urskilt siffrornas olika platsvärden. Det kan också ha berott på att de inte urskilt decimaltecknets innebörd och tolkat tecknet som att det delar upp siffrorna i två separata tal (Rahayu & Putri, 2018; Steinle & Stacey, 1998; Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). Av detta skäl kunde beräkningen 0,5 + 0,6 ge svaret 0,11. Det eleverna inte hade urskilt var siffrornas platsvärde där femman och sexan är tiondelar. Vidare hade eleverna inte urskilt att tio tiondelar ger en hel. Eleverna behandlade decimalerna utifrån antal siffror, i detta fall en siffra i varje uttryck, alltså som ental. Detta visades i uttrycket 1,2 – 0,70 där elever gav svaret 1,68. Det eleverna inte hade urskilt var, som tidigare nämnt, siffrornas platsvärde. Det skulle också kunna innebära att när eleverna inte vetat hur de skulle beräkna tal i decimalform, övergeneraliserade de till att utgå från den största termen som skulle subtraheras med den minsta termen. De har därmed inte tagit hänsyn till subtrahenden eller minuenden i beräkningen (Roberts, 1968). Det kan också ses som att elever inte urskilt att det är siffran på entalspositionen som utgör mittpunkten i talet, istället för decimaltecknet (Resnick et al., 1989). Det innebär, som tidigare nämnt, att växlingar i subtraktionsalgoritmer upplevdes som svårare än additionsalgoritmer med tal i decimalform, trots att dessa också visade att eleverna behandlade siffrorna på varsin sida om decimaltecknet som två separata tal (Ubuz & Yayan, 2010).

Den fjärde skillnaden som har identifierats var att flera elever ansåg att ett tal i decimalform som innehöll fler decimaler var värdemässigt större än ett decimaltal som hade få decimaler. Vad detta skulle kunna bero på kan ha med en generalisering av elevernas tidigare kunskaper om heltal där fler siffror i talet innebär ett ökat värde (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985). För decimaltal gäller såklart detta förhållande, förutsatt att siffrorna befinner sig på samma platsvärde. Om samma siffror återfinns i decimaltal, men på olika platsvärden gäller inte förhållandet om att fler siffror innebär ett värdemässigt större tal. En elev ansåg däremot att ett tal som innehöll så få decimaler som möjligt var det värdemässigt största talet. Vad detta berodde på kan ha att göra med att eleven var medveten om att tiondelar är värdemässigt större än hundradelar och tusendelar. Däremot hade eleven inte lagt någon större vikt vid att se vilka tal som utgjorde hundradelarna eller tusendelarna (Sackur-Grisvard & Leonard, 1985; McIntosh, 2008). Det bidrog till att talet 0,2 blev värdemässigt större än talet 0,502.

6.2.1 Konklusion

De kritiska aspekter som har identifierats i denna studie ska inte generaliseras till att gälla samtliga elevgrupper i årskurs 4 och 5. Däremot kan de vara överförningsbara till andra elevgrupper. Detta eftersom en kritisk aspekt som har identifierats i denna studie även kan vara kritisk i en annan elevgrupp. Således har det som visat sig vara kritiska aspekter i årskurs 4 inte nödvändigtvis varit kritiskt i årskurs 5, till exempel att känna till att talen 0,5 och 0,50 är lika stora eftersom det är samma tal.

De likheter som kunde identifieras var de kritiska aspekterna och språket som kunde orsaka både svårigheter och missuppfattningar. De skillnader som kunde identifieras var kopplade till hur eleverna hade svarat i både arbetsblad och intervju. En kritisk aspekt som identifierades i denna studie, som inte hade identifierats i Jarl och Johanssons (2014) studie, var att elever behöver förstå att alla siffror på varsin sida om decimaltecknet tillsammans utgör ett tal. Om studiens syfte inte hade varit att jämföra resultatet mot en tidigare studie är det möjligt att andra eller fler kritiska aspekter hade identifierats.

6.3 Vad studien bidrar till

De kritiska aspekter som har identifierats i denna studie kan inte generaliseras till alla elevgrupper (Marton et al., 2004). Däremot kan de kritiska aspekter som har identifierats i denna studie användas som en kunskapsbas för lärare att identifiera vad elever i årskurserna 4–6 kan missuppfatta kring tal i decimalform (Kullberg, 2004). Således kan kunskaper om kritiska aspekter fungera som överförbara eftersom en kritisk aspekt skulle kunna identifieras i andra elevgrupper i årskurs 4 och 5. En kritisk aspekt som är kritisk i årskurs 4 kan därför vara kritisk för alla personer som ännu inte upptäckt och urskilt nödvändiga detaljer i ett innehåll (Lo, 2004). Mot denna bakgrund går det inte att avgöra om en kritisk aspekt är kopplad till en viss ålder eller årskurs eftersom den alltid kommer vara kritiskt för en person som ännu inte urskilt denna kritiska aspekt. Skolverket (2019) skriver att eleverna genom undervisning ska erbjudas undervisning om positionssystemet, dess uppbyggnad och struktur samt siffrors relationer till varandra. Mot denna bakgrund är det viktigt att lärare använder ett så adekvat språk som möjligt för att inte förvirra elevernas förståelse kring tal i decimalform (Gough, 2007; McIntosh, 2008).

Genom att lärare blir medvetna om vilka missuppfattningar som kan förekomma kring tal i decimalform, skulle kunskaper om kritiska aspekter kunna ses som specialkunskaper. Detta eftersom det erfordrar en fördjupad kunskap om vilka detaljer elever behöver få syn på i ett ämnesinnehåll. Kunskapen kan därefter vidareförmedlas till andra lärare så dessa också är medvetna om vad som kan upplevas svårt för elever. Genom detta kan andra lärare ta del av vilka missuppfattningar som elever kan ha, och på så sätt bemöta elevernas svårigheter på ett mer elevnära sätt. Således kan lärare ha förståelse för vad de elever som upplever matematik som svårt går igenom. Av detta skäl kan lärare erbjuda extra anpassning till elever, eftersom eleverna har rätt till det stöd som behövs för övervinna de svårigheter som kan uppstå inom matematik. Mot denna bakgrund kan lärare anpassa sin undervisning kring tal i decimalform så att alla elever kan utvecklas i sin takt och på så sätt stärka elevens tillit till sig själv (Skolverket, 2019).

6.4 Förslag till vidare forskning

Flertalet av eleverna i årskurs 4 hade inte urskilt att en storleksjämförelse med tal i decimalform kräver att talen har lika många decimaler, medan flertalet av eleverna i årskurs 5 hade urskilt detta. Trots detta svarade de flesta elever i årskurs 5 att talet 0,10 var värdemässigt större än talet 0,9 när de kunde redogöra för att talen behöver lika många decimaler för att kunna jämföras. Det hade varit intressant att göra om testet med eleverna i årskurs 4 om ett år för att undersöka om de skulle urskilja denna kritiska aspekt för att på så sätt dra en slutsats om det skett en progression eller inte från årskurs 4 till årskurs 5. Det hade dessutom varit intressant att göra om testet med eleverna i årskurs 5 för att undersöka om fler hade urskilt att talet 0,9 är värdemässigt större än 0,10.

Tack!

Jag vill rikta ett tack till samtliga deltagare som har deltagit i studien. Jag vill också tacka den skola som har tillåtit att studien fick genomföras där. Utan ert deltagande hade denna studie aldrig kunnat genomföras.

Referenser

Bryman, A. (2018). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (tredje upplagan). Liber.

Dietrich, J. F., Huber, S., Dackermann, T., Moeller, K., & Fischer, U. (2016*). Place-value understanding in number line estimation predicts future arithmetic performance*. British Journal of Developmental Psychology, 34(4), 502–517. https://doi.org/10.1111/bjdp.12146

Ekdahl, A. (2019). *Teaching for the learning of additive part-whole relations: The power of variation and connections*. [Doktorsavhandling, Jönköping University]. Jönköping Universitys publikationer – elektroniskt arkiv. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1372663/FULLTEXT01.pdf

Engström, S. (2016). *Positionssystemet: Elevers möjligheter att förstå positionssystemet i årskurs 6*. Jönköping University, School of Education and Communication. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:939630/FULLTEXT01.pdf

Johansson, G., & Jarl, S. (2014). *Noll komma trettio måste vara större än noll komma fem, eller?: En variationsteoretisk klassrumsstudie om decimaltal i årskurs 4*. Jönköping University, School of Education and Communication. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:715147/FULLTEXT01.pdf

Gallardo, A. & Hernández, A. (2006). *The zero and negativity among secondary school students.* Annual Meeting International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME-30), pp. 153-160. https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.954.8433&rep=rep1&type=pdf#page=161

Gough, J. (2007). *Teaching square roots: Conceptual complexity in mathematics language*. Australian Senior Mathematics Journal, 21(1), 53–57. https://dro.deakin.edu.au/eserv/DU:30007799/gough-teachingsquare-2007.pdf

Hansson, H. (2019). *Betydelsen av att variera innehållsliga aspekter för yngre elevers lärande av platsvärde*. Forskning om undervisning och lärande. 3(7), 48–74. https://forskul.se/wp-content/uploads/2019/10/ForskUL_vol_7_nr_3_s_48- 74.pdf

Howe, R. (2019). *Learning and using our base ten place value number system: theoretical perspectives and twenty-first century uses*. ZDM, 51(1), 57–68. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0996-3

Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM och Göteborgs Universitet. http://www2.math.uu.se/~kiselman/sprakensrikedomar.pdf

Kullberg, A. (2004). *Tal, delar och oändlighet. En studie om avgörande skillnader i undervisning och lärande om decimaltal. [Numbers, parts and infinity. A study about differences in teaching and learning about decimal numbers; in Swedish]*. Institutionen för pedagogik och didaktik, Göteborgs Universitet. https://docplayer.se/14822833-Tal-delar-och-oandlighet-angelika-kullberg.html

Lo, M.L. (2014). *Variationsteori – för bättre undervisning och lärande*. Studentlitteratur.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2004). *The Space of Learning*. I Marton, F., & Tsui, A. B. M. (red.). *Classroom discourse and the space of learning. (s. 3-40).* Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F., & Pang, M. F. (2006). *On some necessary conditions of learning*. The Journal of the Learning sciences, 15(2), 193–220. https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1207/s15327809jls1502_2

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal – en handbok*. Nationellt centrum för Matematikutbildning.

Mårtensson, P. (2015). *Att få syn på avgörande skillnader: Lärares kunskap om lärandeobjektet* [Learning to see distinctions: Teachers gaining knowledge of the object of learning]. Jönköping University, School of Education and Communication. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:805788/FULLTEXT01.pdf

Parmar, R., & Larsson, J. (2020). *Platsvärde i det decimala talsystemet: en litteraturstudie om hur platsvärde förhåller sig till addition och hur undervisning kan genomföras kring det decimala talsystemet*. Jönköping University, School of Education and Communication. https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:1440580/FULLTEXT01.pdf

Rahayu, A. P., & Putri, R. I. I. (2018). *Learning Process of Decimals through the Base Ten Strips at the Fifth Grade*. International Journal of Instruction, 11(3), 153-162. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1183429.pdf

Roberts, G. H. (1968). *The failure strategies of third grade arithmetic pupils*. The Arithmetic Teacher, 15(5), 442-446. https://www.jstor.org/stable/pdf/41185806.pdf

Roche, A. (2005). *Longer is larger – Or is it?* Australian Primary Mathematics Classroom, 10(3), 11–16. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ794018.pdf

Runesson, U. (2017). *Variationsteori som redskap för att analysera lärande och designa undervisning*. I Carlgren, I. (red.) (2017). *Undervisningsutvecklande forskning: exemplet learning study*. (Första upplagan). Gleerups.

Ryen, A. (2004). *Kvalitativ intervju: från vetenskapsteori till fältstudier*. (första upplagan). Liber ekonomi.

Sackur-Grisvard, C., & Leonard, F. (1985). *Intermediate cognitive organization in the process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers*. Cognition and Instruction, 2, 157–174. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0202_3

Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik (reviderad 2017)*. Skolverket.

Skolverket (2019). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011: reviderad 2019. (Sjätte upplagan)*. Skolverket.

Steinle, V. & Stacey, K. (1998). *The incidence of misconceptions of decimal notation amongst students in Grades 5 to 10*. In C. Kanes, M. Goos & E. Warren (Eds.), *Teaching mathematics in new times* (548–555). Mathematics Education Research Group of Australasia. https://www.researchgate.net/profile/Kaye-Stacey/publication/242543817_The_incidence_of_misconceptions_of_decimal_notation_amongst_students_in_Grades_5_to_10/links/0046352be4b8ce128d000000/The-incidence-of-misconceptions-of-decimal-notation-amongst-students-in-Grades-5-to-10.pdf

Steinle, V. (2004). *Detection and remediation of decimal misconceptions*. In B. Tadich, S. Tobias, C. Brew, B. Beatty, & P. Sullivan (Eds.), *Towards excellence in mathematics* (pp.460-478). The Mathematical Association of Victoria. https://extranet.education.unimelb.edu.au/SME/TNMY/Decimals/Decimals/backinfo/refs/steinlemav2004.pdf

Talsystem. (u.å.). I Matteboken. https://www.matteboken.se/lektioner/matte-1/tal/talsystem

Ubuz, B., & Yayan, B. (2010). *Primary teachers' subject matter knowledge: Decimals*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(6), 787-804. https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/00207391003777871

Wong, T. T. Y (2019). *The roles of place-value understanding and non-symbolic ratio processing system in symbolic rational number processing*. The British journal of psychological society, 89(4), 635-652. https://doiorg.proxy.library.ju.se/10.1111/bjep.12249

Vetenskapsrådet. (2017). *God forskningssed*. Vetenskapsrådet. https://www.vr.se/download/18.2412c5311624176023d25b05/1555332112063/God-forskningssed_VR_2017.pdf

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt: vad elever förväntas lära sig, vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna*. Institutionen för naturvetenskapernas och matematikens didaktik, Umeå universitet (Doktorsavhandling). https://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:278517/FULLTEXT01.pdf

Bilaga 1: Samtyckesblankett

Till elever och vårdnadshavare för klass x.

Mitt namn är Jesper Larsson och studerar på högskolan för lärande och kommunikation i Jönköping. Jag genomför just nu min mitt examensarbete, vilket handlar om elevers förståelse av decimaltal i positionssystemet. Jag kommer att intervjua några elever och använda dessa svar i mitt arbete. Syftet med dessa intervjuer är att ta reda på hur undervisning kring decimaltal kan öka elevernas förståelse kring detta.

För att jag ska kunna analysera elevernas svar kommer jag att spela in dessa intervjuer. Dessa ljudfiler kommer därefter att raderas efter att arbetet är godkänt. De som kommer ta del av detta material är endast jag och min handledare från högskolan.

För att få genomföra intervjuerna behöver jag ert godkännande.

Tveka inte att höra av er om ni undrar över något!

Mailadress: laje17ff@student.ju.se

Telefon: XXX-XXX XX XX

Med vänlig hälsning,
Jesper Larsson

Godkännande

Elevens namn: ____

Vårdnadshavares underskrift: ______________________________________

Förtydligande: ____

☐ Jag godkänner att mitt barn intervjuas.

☐ Jag godkänner **inte** att mitt barn intervjuas.

Svar lämnas till klasslärare senast den ...

Bilaga 2: Uppgifter

Matematik: Tal i decimalform

1. **Skriv talet med siffror.**

	Talet som beskrivs	
a)	Trettioåtta	
b)	Noll komma tjugo	
c)	Noll ental och fem tiondelar	
d)	Noll ental, två tiondelar och noll hundradelar	

2. **Skriv hur mycket den <u>understrukna</u> siffran är värd.**

a) 0,<u>3</u>97: *Tre tiondelar*

b) 0,0<u>5</u>0: ______________________________

c) 0,12<u>2</u>: ______________________________

d) 0,<u>4</u>05: ______________________________

3. **Placera talen 0,9 och 0,10 på en tallinje. Markera ditt svar ovanför tallinjen genom att dra ett streck från talet till tallinjen**.

0,9
0,10

```
--|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--
  0                                                   1
```

4. **Kan det finnas något tal mellan 0,5 och 0,6? Ringa in ditt alternativ.**

a) Nej, det finns inget tal mellan 0,5 och 0,6.

b) Ja, det finns ett tal och det är 0,55.

c) Ja, det finns flera tal mellan 0,5 och 0,6.

5. **Vilket tal är störst av 0,5 och 0,50? Ringa in ditt alternativ.**

a) 0,5 är större

b) 0,50 är större

c) talen är lika stora

6. **Storleksordna följande tal. Skriv en 1: a under det minsta talet, en 2: a under det näst minsta och så vidare.**

0,205	0,25	0,2	0,502	0,02	0,025
_______	_______	______	______	______	_______

7. **Dela in talet i olika talsorter. Där det inte ska fyllas i något kan du skriva noll (0)**.

Tal	Tiotal	Ental	Tiondel	Hundradel	Tusendel
0,3					
1,52					
14,1					
22,101					

8. **Beräkna:**

a) 0,5 + 0,6 = ___________

b) 0,10 + 0,9 = ___________

c) 1,20 – 0,7 = ___________

d) 1,2 – 0,70 = ___________

Lycka till!

Bilaga 3: Intervjufrågor

Inledning

Jag håller på att studera till lärare och skulle bli glad om du är intresserad av att hjälpa mig med att förstå hur du uppfattar matematik.

1. Varför är det viktigt att kunna matematik, enligt dig?
2. När har du varit i kontakt med decimaltal?

Stödfrågor:

1. Använder du matematik på din fritid?

Huvudfrågor

1. Hur tänkte du när du gjorde uppgift…?

Stödfrågor:

- Jag tror jag förstår, men för säkerhets skull kan du förklara igen hur du tänkte?
- Så du menar att…?
- Varför tror du att det blir så?

Bilaga 4: Analys av arbetsblad

Analys av arbetsbladet sammanställdes i en tabell där samtliga elevers resultat noterades. Flera kolumner har skapats för att särskilja deluppgifter i de olika uppgifterna. På översta raden anges vilken uppgift som avses. Noteringar i tabellen är nummer- och färgkodade för att lättare få en överblick av vad flertalet av elevgruppen/er har urskilt eller inte. Nummer som använts är 0 och 1. En 0 innebär ett felaktigt svar och färgats med röd bakgrund. En 1 innebär ett korrekt svar på uppgiften och färgats med grön bakgrund. Om elev inte genomfört en (del)uppgift har kolumnen lämnats tom med en röd bakgrund. Kolumnen näst längst till höger anger den enskilda elevens poäng och till höger om denna kolumn anges totala poäng som gick att få på arbetsbladet. Raden längst ned anger, i procent, hur många i elevgruppen som lyckats bra eller mindre bra med en specifik uppgift

Båda årskurserna är placerade bredvid varandra för att lättare kunna jämföra årskurserna med varandra.

Årskurs 4

	Fråga	1				2			3	4	5	6	7				8				Poäng	Totalt
#	Elev	a	b	c	d	b	c	d					a	b	c	d	a	b	c	d		poäng
1		1	1			1	1	1	0	1							1				7	19
2		1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0		12	19
3		1	1	1	1	1	1	1	0	1	0		0	0	0	0	0	0	0	0	8	19
4		1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	11	19
5		1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	13	19
6		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	13	19
7												0	0	0	1	1					2	19
8		1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	8	19
9		1	1	0	0				0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	4	19
10		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	11	19
11		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0						0	0	0		7	19
12		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0					0	0	0	0	7	19
13		1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	14	19
14		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	4	19
15		1	1	0	0	0	0	1	0	1	0						0	0	0	0	4	19
16		1	1	0		1	1	1	0	0	1						0	0	0		6	19
17		1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	11	19
18		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	13	19
19		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	14	19
20		1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0		12	19
21		1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1					12	19
22		1	1																		2	19
23		1	1							1	0						0	0	0	0	3	19
24		1	1						0	1	0	0					1	0	0	0	4	19
25		1	1	1					0	0	1										4	19
Antal rätt		24	24	14	15	16	16	18	2	9	11	7	9	6	13	13	3	0	0	6		
av		25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25		
Antal rätt		96%	96%	56%	60%	64%	64%	72%	8%	36%	44%	28%	36%	24%	52%	52%	12%	0%	0%	24%		

Årskurs 5

	Fråga	1				2			3	4	5	6	7				8				Poäng	Totalt
#	Elev	a	b	c	d	b	c	d					a	b	c	d	a	b	c	d		poäng
1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	19
2		1	1	1	1	1	1	1		0	1	1					0	0	0	0	9	19
3		1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	7	19
4		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	15	19
5		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1	13	19
6		1	1	0		0		1	0	0	1	0					0	0	0	0	4	19
7		1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	13	19
8		1	1	1	1	1	1	1		1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	10	19
9		1	1	0	0				0	1	1	0	0	0	0	0	1	0			5	19
10		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	13	19
11		1		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	17	19
12		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	17	19
13																	0	0	0	0	0	19
14		1	0	0	1	1	1	1	0	1	1		1	0	0	0	1	0	0	1	10	19
15		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	15	19
16		1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	17	19
17		1	1			1	1	1	0	1	1		1	1			1	0	0		10	19
18		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	16	19
19		1	1			1	1	1	0	0	1		1	0			1	0	0		8	19
20		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	19
21		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	16	19
22		1	1	1	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	16	19
23		1	1	1		1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	10	19
24		1	1	1	1			1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	19
25																					0	19
Antal rätt		23	21	16	16	19	19	20	10	11	20	8	18	14	13	13	17	7	7	13		
av		24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24		
Antal rätt		96%	88%	67%	67%	79%	79%	83%	42%	46%	83%	33%	75%	58%	54%	54%	71%	29%	29%	54%		